General Exponential and Logarithmic Functions
الدوال الأسية العامة و الدوال اللوغاريتمية العامة
Math 111
Lecture 9

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

تعريف :

تعرف الدالة الأسية العامة على النحو التالي:

إذا كان لدينا العددين $a > 0$ و x فان الدالة الأسية العامة للأساس a هي:

تعريف :

تعرف الدالة الأسية العامة على النحو التالي:

إذا كان لدينا العددين $a > 0$ و x فان الدالة الأسية العامة للأساس a هي:

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad x \mapsto a^x.$$

تعريف :

تعرف الدالة الأسية العامة على النحو التالي:

إذا كان لدينا العددين $a > 0$ و x فان الدالة الأسية العامة للأساس a هي:

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad x \mapsto a^x.$$

عندما $a = e$ فان نحصل علي التالى:

$$a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} = e^x.$$

ملحوظات:

- مجال الدالة $f(x) = a^x$ هو $\mathbb{R}$ ومداها $(0, \infty)$.

ملحوظات:

- مجال الدالة $f(x) = a^x$ هو $\mathbb{R}$ ومداها $(0, \infty)$.
- $a > 1 \rightarrow \ln a > 0$

وتكون تزايدية مع تزايد x .

ملحوظات:

- مجال الدالة $f(x) = a^x$ هو $\mathbb{R}$ ومداها $(0, \infty)$.
- $a > 1 \to \ln a > 0$

وتكون تزايدية مع تزايد x .

- $a < 1 \to \ln a < 0$

وتكون تناقصية

ملحوظات:

- مجال الدالة $f(x) = a^x$ هو $\mathbb{R}$ ومداها $(0, \infty)$.
- $a > 1 \to \ln a > 0$

وتكون تزايدية مع تزايد x .

- $a < 1 \to \ln a < 0$

وتكون تناقصية

- $a = 1 \to f(x) = 1$

بيان الدالة

$$f(x) = a^x$$

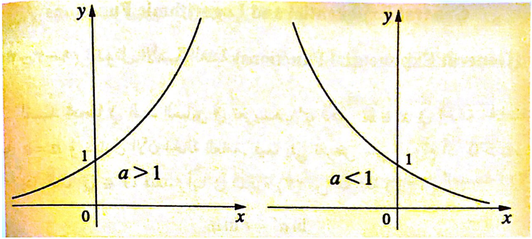

Figure: a^x.

خصائص الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل x, y فان:

- $a^{(x)} a^{(y)} = a^{(x+y)}$,

خصائص الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل x, y فان:

- $a^{(x)} a^{(y)} = a^{(x+y)}$,
- $\frac{a^{(x)}}{a^{(y)}} = a^{(x-y)}$,

خصائص الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل x, y فان:

- $a^{(x)} a^{(y)} = a^{(x+y)}$,
- $\frac{a^{(x)}}{a^{(y)}} = a^{(x-y)}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,

خصائص الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

لكل $a, b > 0$ و لكل x, y فان:

- $a^{(x)} a^{(y)} = a^{(x+y)}$,
- $\frac{a^{(x)}}{a^{(y)}} = a^{(x-y)}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $a^x b^x = (ab)^x$.

إشتقاق الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a,$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)}(\ln a)f'(x).$$

إشتقاق الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a,$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)}(\ln a)f'(x).$$

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall p \in \mathbb{R}.$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$(1) y = 5^{x^2+5}$,

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = 5^{x^2+5} \; ,$$

$$(2) y = \sin x 3^{\sin x}.$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = 5^{x^2+5} \ ,$$

$$(2) y = \sin x 3^{\sin x}.$$

$$(3) y = 9^{\sqrt{x}}.$$

تكامل الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c,$

تكامل الدالة الأسية العامة:

مبرهنة:

- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c,$
- $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{1}{\ln a} a^{f(x)} + c.$

Example

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int 5^{5x+15} dx \ ,$$

Example

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int 5^{5x+15} dx \ ,$$

$$(2) \int \frac{9^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

تعريف :

تعرف الدالة اللوغارتمية العامة على أنها دالة عكسية لدالة الأسية العامة
آي للاساس a ويرمز لها بالرمز $\log_a$

$$\log_a$$

تعريف :

تعرف الدالة اللوغارتمية العامة على أنها دالة عكسية لدالة الأسية العامة آي للاساس a ويرمز لها بالرمز $\log_a$

$$\log_a$$

$$\log_a : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}.$$

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a(x).$$

تعريف :

تعرف الدالة اللوغارتمية العامة على أنها دالة عكسية لدالة الأسية العامة آي للاساس a ويرمز لها بالرمز $\log_a$

$$\log_a$$

$$\log_a : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}.$$

$$x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a(x).$$

ملحوظات:

- $\ln = \log_e$

ملحوظات:

- $\ln = \log_e$
- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$,

ملحوظات:

- $\ln = \log_e$
- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$,
- $\log = \log_{10}$

ملحوظات:

- $\ln = \log_e$
- $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$,
- $\log = \log_{10}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a.$$

بيان الدالة

$$\log_a(x)$$

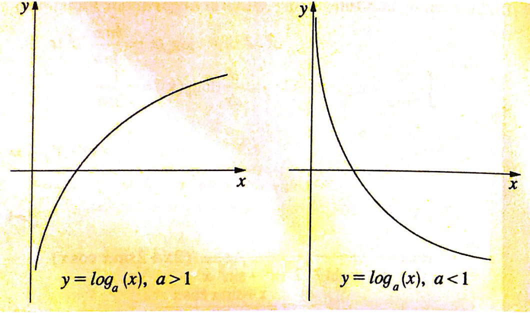

Figure: $\log_a(x)$.

إشتقاق الدالة اللوغارتمية العامة:

مبرهنة:

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{\ln a}(\frac{1}{x}),$$

$$\frac{d}{dx}\log_a f(x) = \frac{1}{\ln a}(\frac{f'(x)}{f(x)}).$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \log_7(x^3 + 2x^2) \ ,$$

Example

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = \log_7(x^3 + 2x^2) \ ,$$

$$(2) y = \log(\sin x).$$

تكامل الدالة اللوغارتمية العامة:

مبرهنة:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \log_a(x) + c.$$

Example

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \frac{dx}{x \log x}$$

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$(1) y = 8^{x^2+1}$,

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = 8^{x^2+1} \ ,$$

$$(2) y = (x^2+1)10^{\frac{1}{x}}.$$

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$(1) y = 8^{x^2+1} \ ,$$

$$(2) y = (x^2 + 1) 10^{\frac{1}{x}}.$$

$$(3) y = \pi^{\pi}.$$

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

$$(1) y = 8^{x^2+1} ,$$

$$(2) y = (x^2 + 1) 10^{\frac{1}{x}} .$$

$$(3) y = \pi^{\pi} .$$

$$(4) y = \log \left| \frac{1 - x^{10}}{2 - 5x^3} \right| .$$

Exercises

مثال : أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$(1) y = 8^{x^2+1} \ ,$$

$$(2) y = (x^2 + 1)10^{\frac{1}{x}}.$$

$$(3) y = \pi^{\pi}.$$

$$(4) y = \log\left|\frac{1 - x^{10}}{2 - 5x^3}\right|.$$

$$(5) y = \log \ln x.$$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

$$(1) \int \pi^x dx$$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية:

$$(1) \int \pi^x dx$$

$$(2) \int 3^{\cos x} \sin x dx$$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

$$(1) \int \pi^x dx$$

$$(2) \int 3^{\cos x} \sin x dx$$

$$(3) \int_1^2 5^{-2x} dx$$

Exercises

مثال : أوجد تكامل كل من الدوال التالية :

$$(1)\ \int \pi^x dx$$

$$(2)\ \int 3^{\cos x} \sin x dx$$

$$(3)\ \int_1^2 5^{-2x} dx$$

$$(2)\ \int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Thanks for listening.