جزء الاستنتاج الرياضي والعلاقات والدوال حتى الدالة الأسية واللوغاريتمية

يتم شرحها خلال الأسابيع السابع والثامن والتاسع

الفصل الثاني

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

عتبر الاستنتاج الرياضي من الطرق الرياضية الهامة في اثبات صحة الكثير من النظريات والقوانين والعلاقات الرياضية التي تعتمد علي مجموعة الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة الموجبة). وقبل أن نستطرد في تقديم كيفية استخدام طريقة الاستنتاج الرياضي سوف نقدم ما يعرف **بفرضيات أو مسلمات بيانو** Piano's axioms التي توضح كيفية دراسة خواص الأعداد الطبيعية N: وهذه الفرضيات تتكون من .

1- لكل عنصر $n \in N$ يوجد عنصر آخر $n' \in N$ يسمى التالي (اللاحق) للعنصر n بحيث $n' = n + 1$ هذا يعني $n \in N \Leftarrow n' \in N$.

2- الواحد الصحيح ينتمي إلي مجموعة الأعداد الطبيعية N $(1 \in N)$ وهو ليس نالي لأي عنصر آخر في N، أي أن $n' \neq 1$ لجميع قيم $n \in N$، والواحد الصحيح هو أول عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية.

3- كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية تحتوي الواحد الصحيح وتحتوي العنصر التالي لكل عنصر فيها هي المجموعة N نفسها.

4- لكل عددين m, n يكون m', n' إذا وإذا فقط $m = n$.

لاحظ أن الفرضية الثالثة لها أهميه خاصه حيث تعتبر مبدأ (اساس) طريقة الاستنتاج الرياضي ولتوضيح ذلك سوف نقدم المثاليين التاليين. بفرض أن لدينا المتتابعة التالية

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

فيكون المجاميع الجزئية لهذه المتتابعة علي الصورة

$$S_1 = 1^2 = 1$$

$$S_1 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

مما سبق يمكنا استنتاج مجموع n حد

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

والسؤال الآن هل نحن نستطيع أن نأكد أن هذه العلاقة صحيحه لجميع قيم $n \in N$ ؟ بمعنى آخر هل لدينا ضمان أن هذه العلاقة لاتفشل عند $n = 100$ أو $n = 3000$ أو أي عدد آخر أكبر؟

(لاحظ أننا سوف نثبت أن هذه العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \in N$ من خلال الأمثلة في هذا الفصل).

مثال آخر، بفرض أن التعبير $n^2 - n + 41$ يمثل عدد أولي لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. ولاختبار ذلك سوف نعوض بقيم مختلفه لـ n كما يلي

عندما $n = 1$ فإن التعبير $n^2 - n + 41$ يساوي 41 عدد أولي

عندما $n = 2$ فإن التعبير $n^2 - n + 41$ يساوي 43 عدد أولي

عندما $n = 3$ فإن التعبير $n^2 - n + 41$ يساوي 47 عدد أولي

عندما $n = 4$ فإن التعبير $n^2 - n + 41$ يساوي 53 عدد أولي

عندما $n = 5$ فإن التعبير $n^2 - n + 41$ يساوي 61 عدد أولي

وكما هو واضح أن التعبير صحيح وأن جميع النواتج أعداد أولية. والسؤال مره آخرى هل نحن متأكدين من صحة هذا التعبير لجيع قيم n ؟ في الحقيقة هذا التعبير غير صحيح عندما $n = 41$ حيث

$$n^2 - n + 41 = (41)^2 - 41 + 41 = (41)^2$$

وهذا وكما هو واضح ليس عدد أولي.

نستنتج من دراستنا للمثال الآخير أن صحة العلاقة عند بعض القيم لـ n لايعني أن العلاقة صحيحة بصفة عامة. ولهذا السبب ولكي نبرهن النظريات الرياضية التي تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة نستخدم طريقة الاستنتاج الرياضى والتي تعتمد في الاساس علي الفرضية الثالثة لفرضيات بيانو والتي يطلق عليها أحياناً **بفرضية الاستنتاج** Induction axiom. والتي يمكنا صياغتها كما يلي:

بفرض أن S مجموعة أعداد صحيحة موجبة لها الخواص الآتية

(أ) $1 \in S$

(ب) إذا كان $k \in S$ فإن $k + 1 \in S$

فإن S تحتوي علي جميع الأعداد الصحيحة الموجبة.

نلاحظ من الخاصية (ب) أنه إذا كان مثلا العدد 10 ينتمي إلي S فإن $10 + 1 = 11$ ينتمي إلي S. وحيث أن 11 فإن $11 + 1 = 12$ ينتمي إلي S حسب هذه الخاصية. وهكذا.... ومن الخاصية (أ) $1 \in S$ فإن $2 \in S$ وبالتالي $3 \in S$ وهكذا.... ومن ثم فإن جميع الأعداد الصحيحة الموجبة تنتمي إلي S. وسوف نستخدم هذه الفرضية (فرضية الاستنتاج) في برهان **مبدأ الاستنتاج الرياضي** Principal mathematical induction.

نظرية 1.2: (مبدأ الاستنتاج الرياضي)

لتكن P_n علاقة رياضية تتعلق بالعدد الصحيح الموجب n. فإذا كان:

(أ) P_1 صحيحة.

(ب) صحة العلاقة P_k يؤدي إلي صحة العلاقة P_{k+1}.

فإن P_n تكون صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة.

ملحوظة 1.2

لاحظ الجزء الأول من (ب) في النظرية (1.2) هو فرض صحة العلاقة P_k ثم نحاول أثبات صحة العلاقة P_{k+1}.

وسوف نلخص طريقة الاستنتاج الرياضي بالخطوات الثلاثة التالية:

1- نختبر صحة العلاقة أو النظرية عند بعض القيم الصحيحة الموجبة وذلك بالتعويض المباشر عن $n = 1,2$

2- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$.

3- نثبت أن العلاقة صحيحة عند $n = k + 1$ اعتماداً علي الفرض أن العلاقة صحيحة عند $n = k$ (أنظر الخطوة 2 وهو ما يطلق عليها **فرض الاستنتاج** Induction hypothesis).

ومن ذلك نستنتج أن العلاقة أو النظرية تتحقق وصحيحة لجميع قيم $n \in N$.

ملحوظة 2.2

1- الخطوة 1 لا تمثل يقيناً مطلقاً في اثبات صحة أو عدم صحة علاقة أو نظرية ما.

2- الخطوات الثلاثة ضرورية وملزمة ولايمكن الاستغناء عن احداها.

3- يوجد بعض العلاقات الرياضية التي تكون صحيحة عند $n = 1$ ولكنها غير صحيحة عند $n = 2,3, \dots$ لذلك يجب أن نختبر صحة العلاقة عند $n = 1,2$ علي الأقل. فعلي سبيل المثال نلاحظ أن العلاقة الرياضية $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = \frac{1}{2}(n^2+1)$ صحيحة عندما $n = 1$ ولكنها غير صحيحة عندما $n = 2$ وبالتالي تكون هذه العلاقة غير صحيحة لجميع قيم $n \in N$.

وسوف نقدم الآن بعض الأمثلة التي توضح طريقة الاستنتاج الرياضي، لاحظ أن n عدد صحيح موجب في جميع الأمثلة الآتية:

مثال 1.2

أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

الحل:

نستخدم خطوات الاستنتاج الرياضي كالتالي:

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$ وذلك بالتعويض عن $n = 1$ في الطرفين (الطرف الأيمن $R.H.S.$ والطرف الأيسر $L.H.S.$) فنجد أن

$$L.H.S. = 1, \qquad R.H.S. = \frac{1}{2}(1)(1+1) = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

وبالمثل نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$ وذلك بالتعويض عن $n = 2$ في الطرفين فنجد أن

$$L.H.S. = 1 + 2 = 3, \qquad R.H.S. = \frac{1}{2}(2)(2+1) = \frac{1}{2}(2)(3) = 3$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

2- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$$

3- نحاول أثبات أن العلاقة صحيحة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \qquad (2.1)$$

$$L.H.S. = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1)$$

$$= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

ملحوظة 3.2

للحصول علي المعادلة (2.1) في المثال السابق والتي نريد أثبات صحتها بالنسبة للطرف الأيسر نحن لدينا الحد النوني في هذا المثال هو $n = k$ (من فرض الاستنتاج) وبالتالي سوف يضاف إليه الحد التالي له وهو $(k+1)$ وللتوضيح اكثر، الحد النوني في مثال (2.2) بعد فرض الاستنتاج هو k^2 وبالتالي الحد المضاف هو $(k+1)^2$ ومثال آخر إذا كان الحد النوني بعد فرض الاستنتاج هو $\frac{k}{k+1}$ فإن الحد المضاف هو $\frac{k+1}{k+2}$ وهكذا. وبالنسبة للطرف الأيمن يمكن الحصول عليه بسهولة وذلك بالتعويض في الطرف الأيمن في المعادلة الأصلية عن كل n بـ $k + 1$.

ففي المثال السابق لدينا الطرف الأيمن $\frac{1}{2}n(n+1)$ وباستبدال كل n بـ $k + 1$ نحصل علي

$$\frac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

أو بطريقة أخرى اضافة الحد الذي ترتيبة $n = k + 1$ للطرفين ففي المثال (2.1) يضاف $(k+1)$ للطرفين، وفي مثال (2.2) يضاف $(k+1)^2$ للطرفين وهكذا ....

مثال 2.2

أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

1− نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = 1^2 = 1, \qquad R.H.S. = \frac{1}{6}(1)(2)(3) = 1$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S. = 1^2 + 2^2 = 5, \qquad R.H.S. = \frac{1}{6}(2)(3)(5) = 5$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

2− نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

3− نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$L.H.S. = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$ (من فرض الاستنتاج)

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

ملحوظة 4.2

يمكنا كتابة المثاليين السابقين علي الصورة التالية:

$$1 - \sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad 2 - \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حيث أن

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \cdots + n, \qquad \sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

مثال 3.2

أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$$

الحل:

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = 1^3 = 1, \qquad R.H.S. = \frac{1}{4}(1)^2(2)^2 = 1$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S. = 1^3 + 2^3 = 9, \qquad R.H.S. = \frac{1}{4}(2)^2(3)^2 = 9$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

2- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$\sum_{r=1}^{k} r^3 = \frac{1}{4}\, k^2(k+1)^2$$

3- نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^3 = \frac{1}{4}\,(k+1)^2(k+2)^2$$

$$L.H.S. = \sum_{r=1}^{k+1} r^3 = \sum_{r=1}^{k} r^3 + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}\, k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$= \frac{1}{4}\,(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]$$

$$= \frac{1}{4}\ (k+1)^2[k^2+4k+4]$$

$$= \frac{1}{4}\ (k+1)^2(k+2)^2 = R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

مثال 4.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

الحل:

1− نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S.=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}, \qquad R.H.S.=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S.=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \qquad R.H.S.=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

2− نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

3− نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

$$L.H.S.=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$ (من فرض الاستنتاج)

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)} = R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

<u>مثال 5.2</u>

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots \text{ إلي } n \text{ حداً} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

<u>الحل</u>:

في هذا المثال وقبل أن نستخدم خطوات الاستنتاج الرياضي نوجد أولا الصورة العامة للحد النوني للطرف الأيسر في العلاقة المعطاة والذي يأخذ الشكل $\frac{n}{(n+1)!}$ وبالتالي فإن العلاقة يمكنا كتابتها علي الصورة

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

والآن نبدأ في استخدام خطوات الاستنتاج الرياضي كما سبق

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}, \qquad R.H.S. = 1 - \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{(2)!} = \frac{1}{2}$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S. = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{6},$$

$$R.H.S. = 1 - \frac{1}{(2+1)!} = 1 - \frac{1}{(3)!} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{6}$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

1- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$$

2− نثبت صحة العلاقة عند $n=k+1$ أي نريد أثبات أن

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$L.H.S.=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{1}{(k+1)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$ (من فرض الاستنتاج)

$$=1-\frac{(k+2-k-1)}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}=R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$. بفرض صحتها عندما $n=k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n=1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n\geq 1$ حيث $n\in N$.

مثال 6.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

الحل:

1− نختبر صحة العلاقة عندما $n=1$:

$$L.H.S.=1+\frac{1}{1}=2,\qquad R.H.S.=1+1=2$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n=2$:

$$L.H.S.=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=(2)\left(\frac{3}{2}\right)=3,\qquad R.H.S.=2+1=3$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n=2$.

2− نفرض صحة العلاقة عند $n=k$ أي أن

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1$$

3- نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=k+2$$

$$L.H.S.=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$ (من فرض الاستنتاج)

$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{k+1}\right)=k+2=R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

<u>مثال 7.2</u>

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينة الآتية

$$1 + 2n \leq 3^n$$

<u>الحل:</u>

لاثبات صحة المتباينة سوف نتبع ونطبق خطوات الاستنتاج الرياضي كما في الأمثلة السابقة

1- نختبر صحة المتباينة عندما $n = 1$:

$L.H.S. = 1 + 2(1) = 3,$ $R.H.S. = 3^1 = 3$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$L.H.S. = 1 + 2(2) = 5,$ $R.H.S. = 3^2 = 9$

الطرف الأيمن أكبر من الطرف الأيسر وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 2$.

2- نفرض صحة المتباينة عند $n = k$ أي أن

$$1 + 2k \leq 3^k$$

3- نثبت صحة المتباينة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$1 + 2(k + 1) \leq 3^{k+1} \tag{2.2}$$

لاحظ أنه تم الحصول علي المتباينة (2.2) بالتعويض عن كل n بالقيمة $n = k + 1$ في المتباينة المعطاة.

$$R.H.S. = 3^{k+1} = 3^k \cdot 3$$

$$\geq (1 + 2k) \cdot 3 \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$= 3 + 6k > 1 + 2 + 2k \qquad \text{حيث } 6k > 2k$$

$$= 1 + 2(k + 1) = L.H.S.$$

المتباينة صحيحة عندما $n = k + 1$ بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً المتباينة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

مثال 8.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينة الآتية

$$1 + nx \leq (1 + x)^n, \qquad x > -1$$

الحل:

1- نختبر صحة المتباينة عندما $n = 1$:

$$L.H.S. = 1 + (1)x = 1 + x, \qquad R.H.S. = (1 + x)^1 = 1 + x$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S. = 1 + (2)x = 1 + 2x,$$

$$R.H.S. = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \qquad \text{(حيث } x^2 \text{ دائما موجب)}$$

الطرف الأيمن أكبر من الطرف الأيسر وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 2$.

2- نفرض صحة المتباينة عند $n = k$ أي أن

$$1 + kx \leq (1 + x)^k, \qquad x > -1$$

3- نثبت صحة المتباينة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$1 + (k + 1)x \leq (1 + x)^{k+1}, \qquad x > -1$$

$$R.H.S. = (1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x)$$

$$\geq (1 + kx)(1 + x) \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$= 1 + x + kx + kx^2$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2$$

$$\geq 1 + (k+1)x = L.H.S.$$ (حيث أن k عدد صحيح موجب, x^2 دائما موجب)

المتباينة صحيحة عندما $n = k + 1$ بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن المتباينة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً المتباينة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

مثال 9.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت $(x^n - y^n)$ يقبل القسمة علي $(x - y)$ لجميع قيم $n \in N$، $x \neq y$.

الحل:

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n = 1$. نلاحظ في هذه الحالة أن العلاقة صحيحة مباشرة حيث أن المقدار $(x - y)$ يقبل القسمة علي $(x - y)$.
نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$. نحن نعلم أن $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$. وبالتالي فإن $(x^2 - y^2)$ يقبل القسمة علي $(x - y)$. وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

2- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن $(x^k - y^k)$ يقبل القسمة علي $(x - y)$.

3- نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن $(x^{k+1} - y^{k+1})$ يقبل القسمة علي $(x - y)$.
لكي نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ نضيف ونطرح الكمية xy^k إلي $(x^{k+1} - y^{k+1})$ فنحصل علي:

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1} \\ &= x(x^k - y^k) + y^k(x - y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

لاحظ أن الطرف الأيمن في المعادلة (2.3) يحتوي علي مجموع مقدارين هما $x(x^k - y^k)$ و $y^k(x - y)$. بالنسبة للمقدار $y^k(x - y)$ فهو يحتوي علي المقدار $(x - y)$ وبالتالي فإنة يقبل القسمة عليه. أما المقدار $x(x^k - y^k)$ فهو يحتوي علي المقدار $(x^k - y^k)$ وبالتالي فإنة يقبل القسمة علي $(x - y)$ من فرض الاستنتاج.

نستنتج من ذلك أن $(x^{k+1} - y^{k+1})$ يقبل القسمة علي $(x - y)$ بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

تمرين باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت $(7^n - 2^n)$ يقبل القسمة علي 5

مثال 10.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت n^2+n+2 يقبل القسمة علي 2

الحل:

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n=1$. بالتعويض عن $n=1$ في المقدار n^2+n+2 نحصل علي $(1)^2+(1)+2=4$ وكما نعلم فإن 2 قاسم للعدد 4 وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عند $n=1$.
نختبر صحة العلاقة عندما $n=2$. بالتعويض عن $n=2$ في المقدار n^2+n+2 نحصل علي $(2)^2+(2)+2=8$ وكما نعلم فإن 2 قاسم للعدد 8 وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عند $n=2$.

2- نفرض صحة العلاقة عند $n=k$ أي أن k^2+k+2 يقبل القسمة علي 2. يمكنا صياغة هذا الفرض علي الصورة $k^2+k+2=2m$ حيث m عدد صحيح.

3- نثبت صحة العلاقة عند $n=k+1$ أي نريد أثبات أن $(k+1)^2+(k+1)+2$ يقبل القسمة علي 2 أي أن $(k+1)^2+(k+1)+2=2L$ حيث L عدد صحيح.

$$L.H.S.=(k+1)^2+(k+1)+2$$
$$=k^2+2k+1+k+1+2$$
$$=(k^2+k+2)+2k+2$$
$$=2m+2(k+1) \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$
$$=2(m+k+1)=2L=R.H.S.$$

حيث $L=m+k+1$ ، $m,k,1$ أعداد صحيحة وبالتالي فإن L عدد صحيح.
الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$. بفرض صحتها عندما $n=k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n=1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n\geq 1$ حيث $n\in N$.

مثال 11.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

الحل:

1- نختبر صحة العلاقة عندما $n=1$:

$$L.H.S.=\frac{d}{dx}(x)=1, \qquad R.H.S.=(1)x^{1-1}=x^0=1$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 2$:

$$L.H.S. = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \qquad R.H.S. = (2)x^{2-1} = 2x$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = 2$.

2- نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي أن

$$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$$

3- نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$ أي نريد أثبات أن

$$\frac{d}{dx}(x^{k+1}) = (k+1)x^k$$

$$L.H.S. = \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}(x^k \cdot x)$$

$$= x^k \cdot \frac{d}{dx}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(x^k)$$

$$= x^k + x(kx^{k-1}) \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$= x^k + kx^k = (k+1)x^k = R.H.S.$$

الطرفان متساويان وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$. بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن العلاقة صحيحة عندما $n = 1$، إذاً العلاقة صحيحة لجميع قيم $n \geq 1$ حيث $n \in N$.

ملحوظة 5.2

يوجد بعض الحالات التي يكون فيها التعبير المعُطي غير صحيح عندما $n = 1$ ولكن هذا التعبير صحيح عند نقطة بداية آخرى والأعداد التي تليها. لذلك لكي نثبت صحة هذا التعبير سوف نبدأ بنقطة البداية المعطاة. وهذه الحالات يطلق عليها بأمتداد مبدأ الاستنتاج الرياضي Extended principle of mathematics induction.

نظرية 2.2: (امتداد مبدأ الاستنتاج الرياضي)

لتكن P_n علاقة رياضية تتعلق بالعدد الصحيح الموجب n. فإذا كان:

(أ) P_m صحيحة عند عدد صحيح موجب m .

(ب) صحة العلاقة P_k، $k \geq m$ يؤدي إلي صحة العلاقة P_{k+1}.

فإن P_n تكون صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة $n \geq m$.

مثال 12.2

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينة الآتية

$$n^2 > 2n+1, \qquad n \geq 3$$

الحل:

نلاحظ أن نقطة البداية في هذا المثال هو عندما $n = 3$ حيث $n \geq 3$ ولذلك سوف يكون استخدامنا لخطوات الاستنتاج الرياضي كما يلي:

1- نختبر صحة المتباينة عندما $n = 3$:

$$L.H.S. = (3)^2 = 9, \qquad R.H.S. = 2(3)+1 = 7$$

الطرف الأيمن أكبر من الطرف الأيسر وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 3$.

نختبر صحة العلاقة عندما $n = 4$:

$$L.H.S. = (4)^2 = 16, \qquad R.H.S. = 2(4)+1 = 9$$

الطرف الأيمن أكبر من الطرف الأيسر وبالتالي فإن المتباينة صحيحة عندما $n = 4$.

2- نفرض صحة المتباينة عند $n = k$ أي أن

$$k^2 > 2k+1, \qquad k \geq 3$$

3- نثبت صحة المتباينة عند $n = k+1$ أي نريد أثبات أن

$$(k+1)^2 > 2(k+1)+1 = 2k+3$$

$$R.H.S. = (k+1)^2 = k^2+2k+1$$

$$> (2k+1)+2k+1 \qquad \text{(من فرض الاستنتاج)}$$

$$> (2k+1)+1+1 \qquad (\text{حيث } 2k > 1 \text{ لأن } k \geq 3)$$

$$= 2k+3 = L.H.S.$$

المتباينة صحيحة عندما $n = k+1$ بفرض صحتها عندما $n = k$ وحيث أن المتباينة صحيحة عندما $n = 3$، إذاً المتباينة صحيحة لجميع قيم $n \geq 3$ حيث $n \in N$.

تمارين

1- أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي صحة العلاقات الآتية:

1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

2) $3+7+11+\cdots+(4n-1)=n(2n+1)$

3) $3+9+27+\cdots+3^n=\dfrac{3(3^n-1)}{2}$

4) $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

5) $4+8+12+\cdots+4n=2n(n+1)$

6) $2+4+8+\cdots+2^n=2(2^n-1)$

7) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

8) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}=\dfrac{n}{4(n+1)}$

9) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

10) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$

2- مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة العلاقات الآتية:

1) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(r^2+1)r!=n(n+1)!$

2) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(2r-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

3) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4r^2+1}=\frac{n}{2n+1}$

4) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4r^2-1}=\frac{1}{n(2n+1)}$

5) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}2^r=2(2^n-1)$

6) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}ab^{r-1}=\frac{a(1-b^n)}{1-b}, b\neq 1$

7) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}r(r+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

8) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(2r+1) = \frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$

3- باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

1) $1 + 4 + 7 + \cdots$ إلي n حداً $= \frac{n}{2}(3n-1)$

2) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots$ إلي n حداً $= \frac{n}{2}(6n^2 - 3n - 1)$

3) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots$ إلي n حداً $= \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$

4) $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{3}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$ إلي n حداً $= \frac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}$

5) $1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots$ إلي n حداً $= (n+1)! - 1$

4- باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت صحة القوانين الآتية:

1) $\frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ 2) $\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax+b}) = a^n\, e^{ax+b}$

5- مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينات الآتية:

الفصل الخامس

الـعـلاقــا ت

Relations

نعلم من دراستنا للهندسة التحليلية أن أى نقطة P من مستوى منسوب لمحورين موجهين ومتقاطعين، YOX، مثلا يكون لها احداثيين هما x,y ويمكن التعبير عن ذلك بالرمز $P(x,y)$. يمكن تسمية (x,y) زوجا مرتبا، مركبته الأولى x ،ومركبته الثانية y ، وبالتالى يمكننا تعريف الزوج المرتب كما يلى.

1- العلاقات Relations:

1/1- الزوج المرتب :

تعريف (1):

الزوج المرتب هو مجموعة مجموعة من عنصرين الترتيب بينهما أساسى ويرمز للزوج المرتب الذى مركبته الأولى(مسقطه الأول) x ، ومركبته الثانية (مسقطه الثانى) y ، بالرمز (x,y).

واستنادا الى هذا التعريف يمكننا القول بأنه اذا كان (x,y) ، (z,w)زوجين مرتبين فان

$$(x,y)=(z,w) \Leftrightarrow x=z \wedge y=w$$

مثال(1)

أوجد x,y إذاعلمت أن $(x+3y,4)=(5,x+2y)$.

1/2- الضرب الديكارتي:

نفرض أن لدينا المجموعتين $X=\{1,2,3\},Y=\{x,y,\}$ بالتالى يمكننا تكوين حاصل الضرب الديكارتى من المجموعة A الى المجموعة B كما يلى:

$$X\times Y=\{(1,x),\ (1,y),\ (2,x),\ (2,y),\ (3,x),\ (3,y)\}$$

فى حين أن حاصل الضرب الديكارتى من المجموعة B الى المجموعة A يعرف كما يلى:

$$Y\times X=\{(x,1),\ (x,2),(x,3),(y,1),\ (y,2),(y,3)\}$$

ملاحظات

1- عناصر كل من المجموعتين $X\times Y$ ، $Y\times X$ أزواج مرتبة .

2- واضح أن $X\times Y\neq Y\times X$ وبالتالى نستنتج أن عملية الضرب الديكارتى بين مجموعتين مختلفتين ليست ابدالية

3- لاحظ أن المجموعة $\{x,y\}$تساوى المجموعة $\{y,x\}$ بينما الزوج المرتب (x,y) لا يساوى الزوج المرتب (y,x).

4- اذا كانت X مجموعة عدد عناصرها n، Y مجموعة عدد عناصرها m، فان حاصل الضرب الديكارتى يكون مجموعة عدد عناصرها nm.

يمكننا الأن تعريف حاصل الضرب الديكارتى كما يلى

تعريف (2):

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين X, Y هو مجموعة كل الأزواج المرتبة الممكنة بحيث يكون المسقط الأول من المجموعة الأولي X والمسقط الثاني من المجموعة الثانية Y. أى أن

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X \text{ and } y \in Y\}$$

ملاحظة

فى الحالة التى تكون فيها المجموعتان X، Y متساويتين يرمز لحاصل ضربهما الديكارتى اختصارا بالرمز X^2 أو Y^2

مثال(1)

اذا كانت $Y = \{x, y, z\}$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ أحسب حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$، $Y \times X$، X^2، Y^2

الحل

حاصل الضرب الديكارتي

$$X \times Y = \{(1,x), (1,y), (1,z), (2,x), (2,y), (2,z), (3,x), (3,y), (3,z), (4,x), (4,y), (4,z)\}$$

$$Y \times X = \{(x,1), (x,2), (x,3), (x,4), (y,1), (y,2), (y,3), (y,4), (z,1), (z,2), (z,3), (z,4)\}$$

$X^2 =$

$$\left\{\begin{matrix}(1,1),\ (1,2),\ (1,3), (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4), \\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4), (4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4)\end{matrix}\right\}$$

$Y^2 = \{(x,x),\ (x,y),\ (x,z), (y,x),\ (y,y),\ (y,z),\ (z,x),\ (z,y),\ (z,z)\}$.

بعض خصائص حاصل الضرب الديكارتى

لأى مجموعات اختيارية X,Y,Z,W يتحقق الأتى:

(1) اذا كانت احدى المجموعتين X,Y خالية فان $X\times Y = Y\times X = \varnothing$

(2) $X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z)$

(3) $X\times(Y\cup Z) = (X\times Y)\cup(X\times Z)$

(4) $(X\times Y)\cap(Z\times W) = (X\cap Z)\times(Y\cap W)$

البرهان:

(1) نفرض أن احدى المجموعتين خالية ولتكن نفرض أن $Y=\varnothing$ ونفرض أن $X\times Y = Y\times X \neq \varnothing$ سوف نحاول أن نصل الى تناقض . حيث أن $X\times Y = Y\times X \neq \varnothing$ اذا يوجد عنصر واحد على الأقل $(x,y)\in X\times Y$ وهذا يؤدى الى أن $x\in X \wedge y\in Y$ وحيث أن $Y=\varnothing$ اذا $y\in\varnothing$ ولكن هذا تناقض اذا نستنتج أن $X\times Y = Y\times X = \varnothing$ ز

(2)

$$\begin{aligned}(x,y)\in X\times(Y\cap Z) &\Leftrightarrow x\in X \wedge y\in Y\cap Z \\ &\Leftrightarrow x\in X \wedge y\in Y \wedge y\in Z \\ &\Leftrightarrow (x,y)\in X\times Y \wedge (x,y)\in X\times Z \\ &\Leftrightarrow (x,y)\in (X\times Y)\cap(X\times Z)\end{aligned}$$

اذا $X\times(Y\cap Z) = (X\times Y)\cap(X\times Z)$

(3)

$$\begin{aligned}(x,y)\in X\times(Y\bigcup Z) &\Leftrightarrow x\in X\wedge y\in Y\bigcup Z\\ &\Leftrightarrow x\in X\wedge y\in Y\vee y\in Z\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in X\times Y\vee(x,y)\in X\times Z\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(X\times Y)\bigcup(X\times Z)\end{aligned}$$

اذا $X\times(Y\bigcup Z)=(X\times Y)\bigcup(X\times Z)$

(4)

$$\begin{aligned}(x,y)\in(X\times Y)\bigcap(Z\times W) &\Leftrightarrow (x,y)\in X\times Y\wedge(x,y)\in Z\times W\\ &\Leftrightarrow x\in X\wedge y\in Y\wedge x\in Z\wedge y\in W\\ &\Leftrightarrow x\in X\bigcap Z\wedge y\in Y\bigcap W\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in(X\bigcap Z)\times(Y\bigcap W)\end{aligned}$$

اذا $(X\times Y)\bigcap(Z\times W)=(X\bigcap Z)\times(Y\bigcap W)$

$1/3-$ العلاقة:

اذا كانت $X=\{1,\ 2,\ 3\}\ ,Y=\{2,\ 3,5\}$ فان حاصل الضرب الديكارتى $X\times Y=\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5)\}$

فاذا كان المطلوب منا هو ايجاد مجموعة جزئية R من المجموعة $X\times Y$ بحيث تكون عناصر المجموعة R مكونة من جميع الازواج المرتبة التى تكون مركبتا كل منها متساويتين أى أن $R=\{(x,y):(x,y)\in X\times Y\wedge x=y\}\subseteq X\times Y$

فاننا سوف نجد أن $R=\{(2,2),(3,3)\}$ نقول فى هذه الحالة اننا عرفنا علاقة ثنائية R (أو اختصارا علاقة R اذا لم يكن هناك التباس) من المجموعة X الى المجموعة Y وبالتالى يمكننا تعريف العلاقة الثنائية كما يلى :

تعريف (3):

اذا كانت X,Y مجموعتين وكانت $R\subseteq X\times Y$ يقال أن R علاقة ثنائية من X الى Y . أيضا يمكن تعريفها على أنها ارتباط بين مجموعتين X,Y $(R:X\to Y)$ مكونة من

مجموعة الأزواج المرتبة بحيث يكون المسقط الأول من المجموعة X ويسمي أصل والمسقط الثاني من المجموعة Y ويسمي صورة.

ملاحظات:

1- اذا كانت $X=Y$ يقال أن R علاقة ثنائية على X أو على Y

2- اذا كانت $(x,y)\in R$ فاننا نعبر عن ذلك بالشكل xRy ونعنى بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R

3- اذا كانت R علاقة من X الى Y فان المجموعة X تسمى نطاق (مجال) العلاقة R والمجموعة Y تسمى النطاق المصاحب للعلاقة R

4- المجموعة الجزئية $\{x\in X : xRy, y\in Y\}$ من X تسمى مجموعة تعريف العلاقة R

5- المجموعة الجزئية $\{y\in Y : xRy, x\in X\}$ من Y تسمى مدى العلاقة R أو مجموعة قيم العلاقة R

سوف نعطى بعض الامثلة على العلاقات

__مثال2:__

اذا كانت $Y=\{3, 5, 7\}$, $X=\{2, 4, 6\}$ وكانت R علاقة من X الى Y بحيث $R=\{(x,y): x<y\}$ فأوجد العلاقة R

الحل: $R=\{(2,3),(2,5),(2,7),(4,5),(4,7),(6,7)\}$

__مثال3:__

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحيث تحقق $xRy \Leftrightarrow x=2y$ فأوجد مجال تعريف العلاقة R وكذلك مدى تعريف العلاقة

الحل: مجال العلاقة R هو مجموعة الأعداد الزوجية $\{2,4,6,...\}$ ومدى العلاقة R هو $\{1,2,3,...\}=\mathbb{N}$

مثال4:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحيث تحقق $xRy \Leftrightarrow x+y=10$ فأوجد العلاقة R وكذلك مجال تعريف العلاقة R و مدى تعريف العلاقة.

الحل:واضح أن

$$R=\{(0,10),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)\}$$

مجال العلاقة R يساوى مدى العلاقة R يساوى $\{0,1,2,...,9,10\}$.

مثال5:

اذا كانت R علاقة مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بحيث $R=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ فبين ماذا تمثل مجموعة النقاط من المستوى $\mathbb{R}^2$ والتى تنتمى الى العلاقة R.

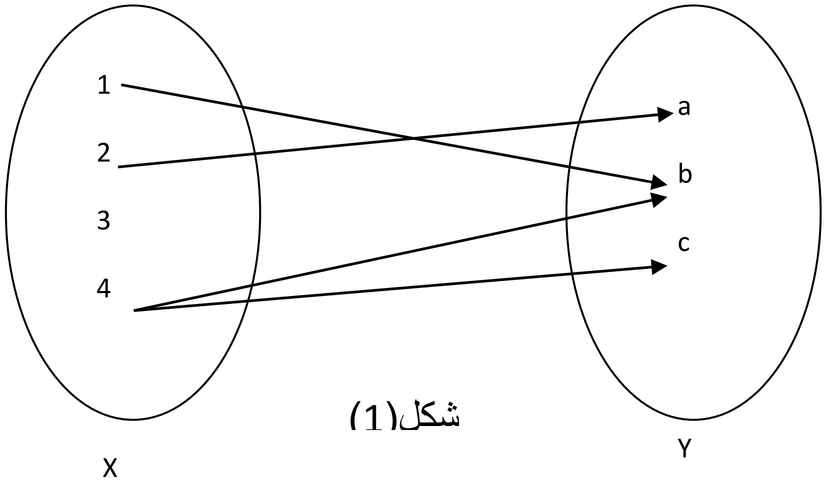
الحل:واضح أن R تمثل نقاط المستوى الواقعة على محيط الدائرة التى مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1.

ملحوظة:

فى بعض الأحيان يكون من المناسب أن تمثل العلاقة R من X الى Y عن طريق الاسهم كما يتضح فى المثال التالى

مثال6:

اذا كانت $Y=\{a,b,c\}$, $X=\{1,2,3,4\}$ $R=\{(1,b),(2,a),(4,b),(4,c)\}$ تمثل علاقة من المجموعة X الى المجموعة Y فانه يمكن تمثيل العلاقة R كما بالشكل (1).



شكل(1)

تعريف (4):

اذا كانت R علاقة من X الى Y فان العلاقة العكسية للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالتالى $R^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in R\}$.

ملحوظة:

من هذا التعريف يتضح أن R^{-1} *هى علاقة من* Y الى X وذلك لأن $R^{-1}\subseteq Y\times X$

مثال7:

اذا كانت $X=\{2,3,5\}$, $Y=\{2,4,6\}$ وكانت كانت R علاقة من X الى Y معرفة كالأتى $xRy \Leftrightarrow x/y$ فأوجد R^{-1} R ,

الحل : $R=\{(2,2),\ (2,4),\ (2,6),\ (3,6)\},$
$R^{-1}=\{(2,2),\ (4,2),\ (6,2),\ (6,3)\}$

1/4 – أنواع العلاقات

تعريف (5):

اذا كانت R علاقة على المجموعة X فان R تسمى علاقة عاكسة اذا كان
$xRx \quad \forall x\in X$
أى اذا كان كل عنصر x ينتمى الى المجموعة X يحقق $(x,x)\in R$.

مثال8:

اذا كانت R علاقة على المجموعة
$X=\{x,y,z,t\}$ حيث $R=\{(x,x),(y,t),(z,z),(t,x),(t,t)\}$
فان R ليست عاكسة لأن $y\in X$ بينما $(y,y)\notin R$.

مثال9:

اذا كانت R علاقة على المجموعة
$X=\{x,y,z\}$ حيث $R=\{(x,y),(x,x),(z,z),(y,x),(y,y)\}$
فان R عاكسة لأن $\forall a\in X \quad (a,b)\in R$.

مثال10:

اذا كانت R علاقة على المجموعة
$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ومعرفة كالتالى $\forall a,b,c,d\in\mathbb{N} \quad (a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$ فان R
عاكسة لأن $\forall (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a+b=b+a$.

مثال11:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ومعرفة كالتالى $xR\,y \Leftrightarrow x-2y=2n \;\; n\in\mathbb{Z}$ فان R ليست علاقة عاكسة وذلك لأنه لأى عنصر $x\in\mathbb{Z}$ فان $x-2x=-x$ وهذه القيمة $-x$ ليست دائما احدى مضاعفات العدد 2.

تعريف (6):

اذا كانت R علاقة على المجموعة X فان R تسمى علاقة متماثلة اذا كان
$\forall xRy; \quad xRy \Rightarrow yRx$
أى اذا كان العنصر x يرتبط بالعنصر y بواسطة R فلابد من أن يرتبط العنصر y بالعنصر x بواسطة R.

نتيجة:

العلاقة R على المجموعة X تكون متماثلة اذا وفقط اذا كان $R=R^{-1}$.

البرهان:

نفرض أن العلاقة R متماثلة اذا لجميع الازواج المرتبة $(x,y)\in R$ يؤدى الى أن $(y,x)\in R$ وبالتالى نجد أن $(x,y)\in R^{-1}$ اذا $R\subseteq R^{-1}$ بالمثل اذا لجميع الازواج المرتبة $(x,y)\in R^{-1}$ فأن $(y,x)\in R$ تؤدى الى أن $(x,y)\in R$ اذا $R^{-1}\subseteq R$ وبالتالى يكون $R=R^{-1}$.

لاثبات العكس نفرض أن $R=R^{-1}$ وبالتالى فانه ينتج مباشرة لاى زوج مرتب $(x,y)\in R$ فان $(y,x)\in R$ اذا R تكون علاقة متماثلة.

مثال12: اذا كانت $X=\{1, 5, 15, 20\}$ وكانت كانت R علاقة X ومعرفة كالتالى $R=\{(1,5),(20,5),(5,20),(5,15),(1,20)\}$ فاننا نجد على سبيل المثال أن العنصر $(5,15)\in R$ بينما العنصر $(15,5)\notin R$ لذلك فان العلاقة R ليست متماثلة.

مثال13:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومعرفة كالتالى $xRy \Leftrightarrow x+y=10$ فان R تكون علاقة متماثلة لأنه اذا كانت $x+y=10$ فان $y+x=10$ وبالتالى يكون yRx .

تعريف (7):
اذا كانت R علاقة على المجموعة X فان R تسمى علاقة تخالفية أو شبه متماثلة اذا كان $\forall xRy;\quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$

مثال14:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}^+$ ومعرفة كالتالى $xRy \Leftrightarrow x/y$
واضح أن R علاقة شبه متماثلة وذلك لانه اذا كان

$$\begin{aligned}
xRy \wedge yRx &\Leftrightarrow x/y \wedge y/x \\
&\Leftrightarrow x=y^n \wedge y=x^m, n,m\in\mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x=x^{nm} \\
&\Leftrightarrow nm=1 \Leftrightarrow n=m=1 \\
&\Leftrightarrow x=y
\end{aligned}$$

مثال15:

اذا كانت $X=\{x,\ y,\ z\}$ وكانت كانت R علاقة X ومعرفة كالتالى $R=\{(x,y),(z,y),(y,x),(x,z)\}$ فان R ليست علاقة ناقلة لأن $(y,x)\in R\, and\ (z,y)\in R$ لا يؤدى الى أن $(z,x)\in R$.

مثال16:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومعرفة كالتالى $xR\,y\ \Leftrightarrow x+2y=5$ فان العلاقة R لا تكون ناقلة لانه بفرض أن $xRy\ and\ yRz$ فان $x+2y=5\ and\ \ y+2z=5\Rightarrow x+2z=10-3b$ وهذه القيمة $10-3b$ ليست فى جميع حالتها تساوى العدد 5.

تعريف (9):

اذا كانت R علاقة على المجموعة X وكانت R علاقة عاكسة وشبه متماثلة وناقلة فانها تسمى علاقة ترتيب جزئى.

مثال17 :

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{N}$ ومعرفة كالتالى $xR\,y\ \Leftrightarrow y=x^n,n\in\mathbb{N}$ واضح أن هذه العلاقة هى علاقة ترتيب جزئى وذلك لأنها تحقق الاتى:

R علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall x\in\mathbb{N}\Rightarrow(x,x)\in R\Leftrightarrow x=x^1$

R علاقة شبه متماثلة وذلك لأنه

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R &\Leftrightarrow y=x^n\wedge x=y^m,n,m\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow x=x^{nm}\\
&\Leftrightarrow nm=1\\
&\Leftrightarrow n=m=1
\end{aligned}
$$

وهذا يؤدى الى أن $x = y$

R علاقة ناقلة وذلك لأنه

$$\forall (u,v) \in R \wedge (v,w) \in R \Rightarrow v = u^n, w = v^m, n, m \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow w = u^{nm} = u^r, r = nm \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow (u,w) \in R$$

اذا R علاقة ترتيب جزئى على المجموعة $\mathbb{N}$.

<u>تعريف (10):</u>

اذا كانت R علاقة على المجموعة X وكانت R علاقة عاكسة ومتماثلة وناقلة فانها تسمى علاقة تكافؤ.

ملحوظة:

نقول عن عنصرين $x, y \in X$ مرتبطين بعلاقة التكافؤ أنهما متكافئان ونكتب هذا احيانا بالرمز $x \equiv y$.

<u>مثال18:</u>

اذا كانت R علاقة على المجموعة X حيث X هى مجموعة المستقيمات فى المستوى الأقليدى معرفة كالتالى : $R = \{(x,y) : x, y \in X \,; x \| y\}$ فنجد أن R علاقة تكافؤ وذلك لان $(x,x) \in R$ لأى $x \in X$ وذلك لأن أى مستقيم يوازى نفسه اذا R علاقة عاكسة كذلك اذا كان $(x,y) \in R$ فان $(y,x) \in R$ أى انه اذا كان المستقيم x يوازى المستقيم y فان المستقيم y يوازى المستقيم x أى أن R علاقة متماثلة كذلك اذا كان $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R$ فان $(x,z) \in R$ وذلك لانه اذا كان المستقيم x يوازى المستقيم

y وكان المستقيم y يوازى المستقيم z فان المستقيم x يوازى المستقيم z اذا R علاقة ناقلة وبالتالى نجد أن R علاقة تكافؤ على X .

مثال19:

اذا كانت R علاقة على المجموعة X حيث X هى مجموعة المستقيمات فى المستوى الأقليدى معرفة كالتالى : $R=\{(x,y):x,y\in X\,;x\perp y\}$ فنجد أن R ليست علاقة تكافؤ وذلك لانه من المستحيل أن يكون المستقيم عموديا على نفسه وبالتالى العلاقة ليست عاكسة.

مثال20:

لأى عدد قياسى $\frac{x}{y}, y\neq 0$ ينتمى الى مجموعة الأعداد القياسية $\mathbb{Q}$ سوف نستخدم الرمز $(x,y)=\frac{x}{y}$ اذا كانت R علاقة على $\mathbb{Q}$ ومعرفة كالتالى : $(x,y)R(z,w)\Leftrightarrow xw=yz$

أى أن $R=\{((x,y),(z,w)):(x,y),(z,w)\in\mathbb{Q}\wedge xw=yz\}$ نجد أن العلاقة R علاقة تكافؤ وذلك لانها تحقق الأتى :

R علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}\Rightarrow xy=yx\Rightarrow(x,y)R(x,y)$

R علاقة متماثلة وذلك لأنه اذا كان $(x,y)R(z,w)\Rightarrow xw=yz\Rightarrow(z,w)R(x,y)$

R علاقة ناقلة وذلك لأنه اذا كان

$$(u,v)R(w,x)\wedge(w,x)R(y,z)\Rightarrow ux=vw\wedge wz=xy$$
$$\Rightarrow vwy=uxy=uwz\Rightarrow uz=vy\,(w\neq 0)$$

اذا R علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Q}$.

مثال21:

علاقة التساوى على أى مجموعة هى علاقة تكافؤ.

مثال22:

اذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ومعرفة كالتالى

$x R y \Leftrightarrow \dfrac{x-y}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ فان R تكون علاقة تكافؤ وذلك لأنها تحقق الأتى

R علاقة عاكسة وذلك لأن $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{(a-a)}{n} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,x) \in R$

R علاقة متماثلة وذلك لأنه

$$\forall (x,y) \in R \Leftrightarrow \frac{(a-b)}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{(b-a)}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y,x) \in R$$

R علاقة ناقلة وذلك لأنه

$$\forall (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Leftrightarrow \frac{(x-y)}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{(y-z)}{n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)}{n} + \frac{(y-z)}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{(x-z)}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,z) \in R$$

اذا العلاقة R علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Z}$ وتسمى هذه العلاقة بعلاقة التكافؤ بمقياس العدد الصحيح n ويمكن كتابتها على الصورة

$$x \equiv y (\bmod n) \Leftrightarrow (x,y) \in R \Leftrightarrow \frac{(x-y)}{n} \in \mathbb{Z}$$

تلعب علاقة التكافؤ دورا أساسيا ومهما فى الرياضيات ولا سيما فى الجبر لذلك سوف نتكلم عنها بشىء من التفصيل وسوف نرى أن علاقة التكافؤ ينشأ عنها أصناف التكافؤ والتى بدورها ينتج عنها تجزئة للمجموعة محل الدراسة

تعريف (11):

اذا كانت X مجموعة غير خالية وكانت $X_1, X_2, ..., X_n$ مجموعات جزئية مختلفة منها فاننا نقول أن المجموعة $P = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ تجزئة للمجموعة X اذا حققت الشروط التالية

(1) $X_i \neq \varnothing \ \forall X_i \in P$

(2) $X_i \cap X_j = \varnothing \ \ \forall i \neq j$

(3) $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

مثال23:

اذا كانت $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ فان

المجموعة $P=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$ هى تجزئة للمجموعة X بينما المجموعة

$P=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ ليست تجزئة للمجموعة X

تعريف (12):

يعرف فصل التكافؤ للعنصر x فى علاقة التكافؤ R بأنه المجموعة $[x]=\{y:(x,y)\in R\}$.

مثال24:

فصول التكافؤ للعلاقة R المعرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلى

$\frac{(x-y)}{n}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x,y)\in R \Leftrightarrow x\equiv y(\text{mod}\,5)$ يمكن الحصول عليها كالتالى

$$[0]=\{y:y=5k,k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-20,-15,-10,-5,0,5,10,15,20,...\}$$

$$[1]=\{y:y=5k+1,k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-19,-14,-9,-4,1,6,11,16,21,...\}$$

$$[2]=\{y:y=5k+2,k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-18,-13,-8,-3,2,7,12,17,22,...\}$$

$$[3]=\{y:y=5k+3,k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-17,-12,-7,-2,3,8,13,18,23,...\}$$

$$[4]=\{y:y=5k+4,k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-16,-11,-6,-1,4,9,14,19,24,...\}$$

اذا مجموعة فصول التكافؤ $P=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ تكون تجزئة للمجموعة $\mathbb{Z}$ وذلك لأنها تحقق الشروط الثلاثة للتجزئة كالتالى

بالنظر الى الشرط الأول نجد أن كل فصل من الفصول الخمسة لا يساوى الفئة الخالية وبالنظر الى الشرط الثانى نجد أن تقاطع أى فصلين تكافؤ من الفصول الخمسة المختلفة

يساوى الفئة الخالية وبالنظر الى الشرط الثالث نجد أن اتحاد فصول التكافؤ الخمسة يساوى المجموعة $\mathbb{Z}$ أى أن المجموعة $\mathbb{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$.

نظرية(1): اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة X فان $b\in[a]\Leftrightarrow a\in[b]$

البرهان:

$$\begin{aligned} b\in[a] &\Leftrightarrow b\in\{y:(a,y)\in R\} \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in R \\ &\Leftrightarrow (b,a)\in R \\ &\Leftrightarrow a\in\{y:(b,y)\in R\} \\ &\Leftrightarrow a\in[b] \end{aligned}$$

نظرية(2): اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة X فان $a\in[a]$

البرهان: حيث أن R علاقة تكافؤ اذا هى علاقة عاكسة ومن ثم يكون

$$\begin{aligned} a\in[a] &\Leftrightarrow a\in\{y:(a,y)\in R\} \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in R \end{aligned}$$

نظرية(3): اذا كان $[a]\cap[b]\neq\varnothing$ فان $[a]=[b]$

البرهان: نفرض أن $c\in[a]\cap[b]$ اذا

$$\begin{aligned} c\in[a]\cap[b] &\Leftrightarrow c\in[a]\wedge c\in[b] \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in R\wedge(b,c)\in R \\ &\Leftrightarrow (a,c)\in R\wedge(c,b)\in R \\ &\Leftrightarrow (a,b)\in R \end{aligned}$$

وبفرض أن $d\in[a]$ اذا

$$\begin{aligned}&(a,d)\in R\wedge(a,b)\in R\\&\Leftrightarrow(b,a)\in R\wedge(a,d)\in R\\&\Leftrightarrow(b,d)\in R\\&\Leftrightarrow d\in[b]\\&\Leftrightarrow[a]=[b]\end{aligned}$$

وبالتالى فان أى فصلين تكافؤ اما متساويين أو غير متقاطعين.

ملاحظة

نستنتج من النظرية السابقة أنه اذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة X فانه يمكن كتابة المجموعة X على صورة اتحاد مجموعة غير متقاطعة من فصول التكافؤ للعلاقة R أى أن $X=\bigcup_{x\in X}[x]$ ولذلك يقال أن فصول التكافؤ تجزىء المجموعة الى أجزاء غير متقاطعة.

5/1 تركيب (تحصيل) العلاقات

لتكن R علاقة من المجموعة X الى المجموعة Y ولتكن S علاقة أخرى من المجموعة Y الى المجموعة Z. هناك علاقة جديدة يمكن تعريفها من المجموعة X الى المجموعة Z وتسمى العلاقة المركبة من العلاقتين X,Y ويرمز لها بالرمز $S\circ R$ (ونقرأها $S\ composition\ R$) وبالتالى يمكننا تعريف هذه العلاقة كما يلى

تعريف (13):

اذا كانت R علاقة من المجموعة X الى المجموعة Y وكانت S علاقة من المجموعة Y الى المجموعة Z فان العلاقة المركبة من العلاقتين X,Y يمكن تعريفها كالتالى

$S\circ R=\{(x,z):x\in X\wedge z\in Z\wedge\exists y\in Y:(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S\}\subseteq X\times Z$.

ملاحظة

لتركيب العلاقة R مع العلاقة S لابد وأن يكون النطاق المصاحب للعلاقة R **هو نفسه** نطاق العلاقة S.

مثال25:

اذاكانت $Z=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$, $Y=\{w,x,y,z\}$, $X=\{1,2,3\}$ وكانت $R\subseteq X\times Y$ حيث

$$R=\{(1,w),\ (2,w),\ (2,x),(3,y)\}$$

وكانت $S\subseteq Y\times Z$ حيث $S=\left\{\left(w,\frac{1}{2}\right),\left(y,\frac{1}{4}\right),\left(z,\frac{1}{3}\right)\right\}$

فان $S\circ R=\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{4}\right)\right\}$

نلاحظ أن العلاقة المركبة $S\circ R$ غير معرفة لأن النطاق المصاحب للعلاقة R لا يساوى نطاق العلاقة S

مثال26:

اذاكانت $X=\{1,2,3,4\}$ وكانت $R\subseteq X\times X$ بحيث أن

$$R=\{(2,2),\ (2,1),\ (4,3),(1,2),(3,1)\}$$

وكانت $S\subseteq X\times X$ بحيث أن $S=\{(3,2),\ (1,4),\ (2,2),(2,3)\}$ فان

$$S\circ R=\{(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(1,2),(1,3),(3,4)\},$$

$$R\circ S=\{(3,2),(3,1),(1,3),(2,2),(2,1)\}$$

ملاحظة

اذا كانت R,S علاقتين وامكن ايجاد تعريف العلاقتين $S\circ R, R\circ S$ فانه على وجه العموم يكون $S\circ R\neq R\circ S$ ويتضح ذلك من المثال السابق.

تمارين

تمرين(1):

اذا كانت $Y=\{2,\ 4,\ 6,8\}$, $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ فأوجد العلاقة فى الحالات التالية

1) $x=y \Leftrightarrow xRy$ 2) $x+y=5 \Leftrightarrow xRy$

3) $x<y \Leftrightarrow xRy$ 4) $x \geq y \Leftrightarrow xRy$

تمرين(2):

وضح المخطط السهمى لكل علاقة فى التمرين السابق

تمرين(3):

اذا كانت $Y=\{0,\ 1,\ 2,3\}$, $X=\{1,\ 2,\ 3\}$

وكانت العلاقتان $R_1=\{(x,y): x,y\in X, \frac{x}{y}=1\}, R_2=\{(x,y): x,y\in Y, \frac{x}{y}=1\}$

وضح أيهما علاقة عاكسة وأيهما غير ذلك ولماذا؟

تمرين(4):

أثبت أن العلاقة $R=\{(x,y): x,y\in\mathbb{Z}, \text{x+ y}=\text{even number}\}$ علاقة

تمرين(5):

اذا كانت R علاقة معرفة $\mathbb{R}-\{0\}$ كالتالى $xRy \Leftrightarrow xy>0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$ فاثبت أن R علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}-\{0\}$ ومن ثم أوجد فصول التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

تمرين(6):

اذا كانت R علاقة معرفة المجموعة $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ كالتالى

$xRy \Leftrightarrow 3/x-y$ فاثبت أن R علاقة تكافؤ على X ومن ثم أوجد فصول التكافؤ بالنسبة للعلاقة R .

تمرين(7):

اذا كانت العلاقتان R_1, R_2 معرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كالاتى :

$$R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\}, R_2 = \{(y, z) : 2y + 3z = 4, y, z \in \mathbb{R}\}$$

فعين العلاقة التركيبية $R_2 \circ R_1$.

الفصل السادس

الـدوال

Functions

تعتبر التطبيقات (الدوال) أو الرواسم من أهم المفاهيم الرياضية واوسعها انتشارا واكثرها فائدة فلا تجد فرعا من فروع الرياضيات ولا للتطبيقات فيه نصيب كبير اذ هى تستخدم فى التحليل الرياضى والجبر والهندسة والتوبولوجى ونظرية المقياس والتحليل الحقيقى وغير ذلك كما ان لها استخدامات فى فروع أخرى مثل الفيزياء والكيمياء وغيرهما . الان سوف نقوم بتقديم مفهوم المعنى الرياضى للتطبيقات (الدوال)

<u>تعريف (1):</u>

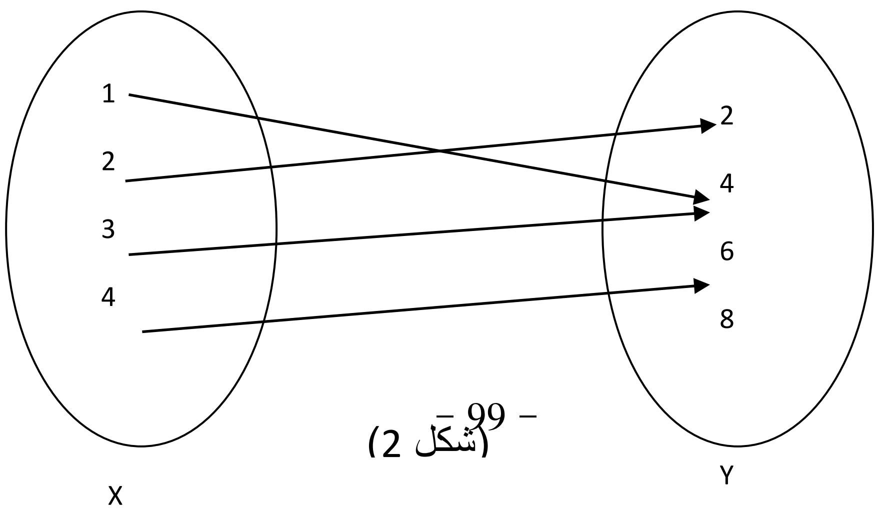
الدالة $f:X\to Y$ هي علاقة بين مجموعتين X,Y بشرط أن يكون لكل عنصر من المجموعة X "أصل" مرتبط بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة Y "صورة".
تكتب الدالة $y=f(x)$.

<u>تعريف (2):</u>

الدالة هي مجموعة من الأزواج المرتبة بحيث لا يوجد زوجان مرتبان لهما نفس المسقط الأول بينما يختلفان في المسقط الثاني.

<u>فمثلا:</u>

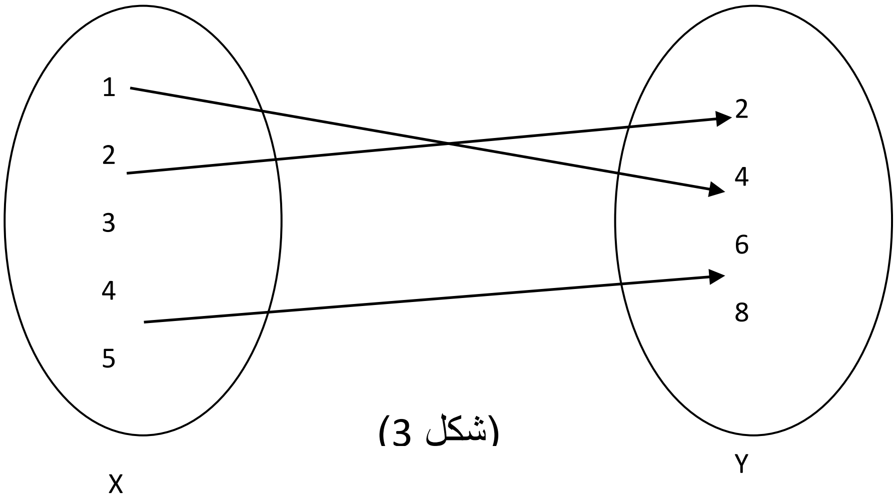
العلاقة بالشكل (2) تمثل دالة لأن كل عنصر من عناصر المجموعة X مرتبط بعنصر واحد من عناصر المجموعة Y.



(شكل 2)

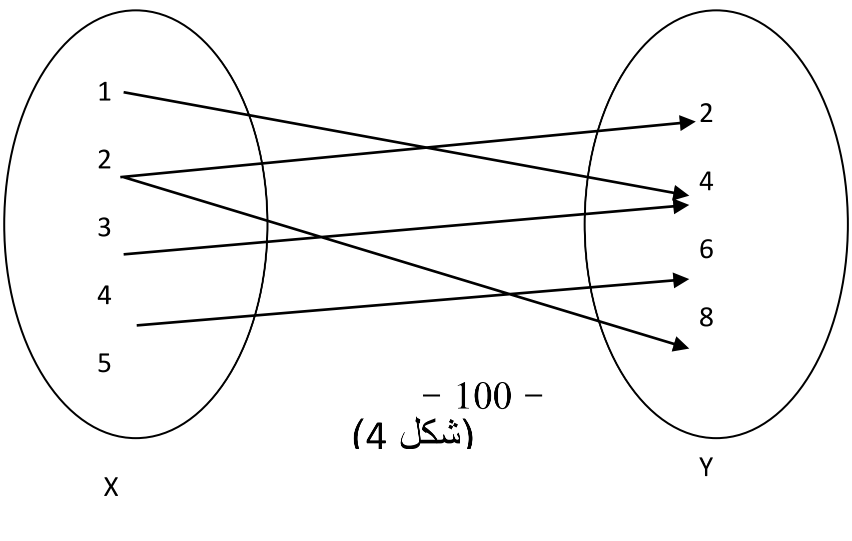
ملاحظة:

العلاقة في الشكل (3) لا تمثل دالة لأنه يوجد عنصر "3" من المجموعة X غير مرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة Y.



(شكل 3)

وكذلك العلاقة في الشكل (4) لا تمثل دالة لأن العنصر "2" من المجموعة X مرتبط بعنصرين "2" و "8" من عناصر المجموعة Y. أي أن العنصر له صورتان وليس صورة واحدة.



(شكل 4)

مثال(1)

إذا كان لدينا مجموعتان $B=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$ فإي من العلاقات التالية (مجموعة الأزواج المرتبة) تمثل دالة من المجموعة A إلي المجموعة B .

1) $\{(1, b), (2, c), (3, c), (4, a)\}$

2) $\{(1, b), (2, c), (2, f), (3, a), (4, d)\}$

3) $\{(1, a), (2, b), (4, d)\}$

الحل

1) العلاقة الأولي تمثل دالة وذلك لأن كل عنصر من عناصر المجموعة A ترتبط بعنصر واحد من عناصر المجموعة B .

2) العلاقة الثانية لا تمثل دالة لأنه يوجد عنصر "2" من عناصر المجموعة A مرتبط بعنصرين "c" و "f" من عناصر المجموعة B .

3) العلاقة الثالثة لا تمثل دالة لأنه يوجد عنصر "3" من عناصر المجموعة A غير مرتبط بأي عنصر من عناصر المجموعة B .

مثال(2)

هل العلاقات التالية تعرف y كدالة في x مع ذكر السبب، علماً بأن قيم x, y تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية:

1) $6x+2y=4$

2) $x^2+y^2=25$

3) $y^3=x^3$

الحل

1) العلاقة الأولي تمثل دالة وذلك لأنها يمكن كتابتها علي الصورة $y=2-3x$ وبالتعويض عن x بأي عدد حقيقي فإن قيمة y تكون عدد حقيقي وحيد.

2) العلاقة الثانية لا تمثل دالة لأنها تكتب علي صورة $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ وبالتالي عند التعويض عن x بأي عدد حقيقي داخل الفترة $[-5,5]$ فإن y يكون له قيمتين (عددين حقيقين).

3) العلاقة الثالثة تمثل دالة لانها تكتب علي الصورة $y=\sqrt[3]{x^3}=x$ وبالتعويض عن x بأي عدد حقيقي فإن قيمة y تكون عدد حقيقي وحيد.

مثال(3)

اذا كانت X مجموعة منتهية وكانت $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X وكانت f علاقة معرفة بالقاعدة $f:P(X)\to\mathbb{Z}^+$ حيث $f(S)=|S|\ \ \forall S\in P(X)$ حيث $|S|$ ترمز لعدد عناصر المجموعة S بين أن العلاقة f هى دالة.

الحل

حيث أن كل عنصر من عناصر المجموعة $P(X)$ يوجد بداخله عنصر وحيد من العناصر وهو $|S|$ ينتمى الى $\mathbb{Z}^+$ اذا العلاقة f هى دالة من $P(X)$ الى $\mathbb{Z}^+$.

1.2- المجال والمدي Domain and Range:

إذا كان لدينا دالة معرفة من المجموعة X إلي المجموعة Y، فإن المجموعة X تسمي مجال (نطاق) الدالة، بينما تسمي المجموعة Y بالمجال المصاحب (النطاق المصاحب)، أما المجموعة الجزئية من النطاق المصاحب Y والتى تتكون من جميع صور عناصر مجموعة تعريف الدالة f تسمي مدي الدالة f ويرمز لها بالرمز $f(X)$. ويمكن كتابتها على الصورة $R_f=f(X)=\{y\in Y: y=f(x),\ x\in X\}$

مجال الدالة $y=f(x)$ هو مجموعة قيم x من الأعداد الحقيقية والتي يناظرها أعداد حقيقية لقيم y. نرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f

مثال(4)

أوجد المجال والمجال المقابل والمدى للراسم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ حيث $f(x)=x^2$.

الحل

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والمجال المقابل هو أيضا مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والمدى $f(\mathbb{R})$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$.

ملاحظة:

1- مجال دالة كثيرات الحدود $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re=(-\infty,\infty)$.

2- مجال الدالة الجذرية $\sqrt{f(x)}$ هو مجموعة حل المتباينة (ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر) $D=\{x:\ f(x)\geq 0\}$.

3- مجال حاصل جمع $f(x)+g(x)$ أو طرح $f(x)-g(x)$ أو ضرب $f(x)\cdot g(x)$ دالتين يساوي مجال الدالة الأولي تقاطع مجال الدالة الثانية $D_f\bigcap D_g$.

4- مجال حاصل قسمة دالتين $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ يساوي مجال الدالة الأول تقاطع مجال الدالة الثانية فرق أصفار الدالة المقسوم عليها $(D_f\bigcap D_g)-\{x:g(x)=0\}$.

المدي لدالة $y=f(x)$ هو مجموعة قيم y المناظرة لكل قيمة من قيم x طبقا لمجال الدالة. $R_f=\{y:y=f(x)\ ,\ x\in D_f\}$

ملاحظة:

1- مدي دالة كثيرات الحدود $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $R=(-\infty,\infty)$.

2- مدي الدالة الكسرية $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $R=(-\infty,\infty)$. ويستبعد الصفر إذا كان $f(x)\neq 0$.

3- مدي الدالة الجذرية $\sqrt{f(x)}$ هو مجموعة جزئية من الفترة $R=[0,\ \infty)$.

مثال(3):

عين المجال لكل من الدوال التالية:

1) $f(x)=3x^2-2x+7$

2) $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x-21}$

3) $h(x)=\sqrt{x-3}$

4) $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

الحل

1) الدالة $f(x)=3x^2-2x+7$ دالة كثيرات حدود من الدرجة الثانية لذلك فإن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية $D_f=(-\infty,\infty)$.

2) الدالة $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x-21}$ دالة حاصل قسمة دالتين اذا لابد من ايجاد مجال البسط ومجال المقام وكذلك ايجاد اصفار المقام اولا: مجال البسط هو $\mathbb{R}$ ثانيا :مجال المقام هو أيضا $\mathbb{R}$ وبالتالى تقاطع مجال البسط ومجال المقام هو أيضا $\mathbb{R}$ ثالثا نوجد أصفار المقام وذلك بمساواة المقام بالصفر أى نضع

$$x^2-4x-21=0$$
$$(x-7)(x+3)=0$$
$$x=7 \quad or \quad x=-3$$

من التحليل المقدار الجبري نجد أن أصفار المقام هي العددين $7,\,-3$ لذلك فإن مجال الدالة هو $D_g=\mathbb{R}-\{-3,\,7\}$.

3) الدالة $h(x)=\sqrt{x-3}$ دالة جذرية لذلك لابد من حساب حل المتباينة (ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر).

$$x-3\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 3$$

من حل المتباينة نجد أن مجال الدالة هو $D_h=[3,\,\infty)$.

4) الدالة $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ دالة جذرية في المقام ولذلك يتم حساب حل المتباينة (ما تحت الجذر أكبر من الصفر).

$$x-2>0 \quad\Rightarrow\quad x>2$$

من حل المتباينة نجد أن مجال الدالة هو $D_k = (2, \infty)$.

ملحوظة

يمكن حل المثال السابق على اعتبار ان المثال السابق هو خارج قسمة دالتين وبالتالى يمكن ايجاد مجاله بنفس الطريقة التى تم اتباعها فى مثال 3

مثال(4):

أحسب المجال والمدي للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \sqrt{x^2-16}$

الحل

الدالة $f(x)$ هي حاصل جمع دالتين الأولي حاصل قسمة دالتين $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ والثانية دالة جذرية $f_2(x) = \sqrt{x^2-16}$ لذلك لابد من حساب مجال كل دالة منهما علي حدا، ثم حساب التقاطع بين المجالين.

أولا: لحساب مجال الدالة الأولي $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ لابد من حساب كل من مجال البسط ومجال المقام وكذلك أصفار المقام . مجال البسط هو $\mathbb{R}$ لحساب مجال المقام لابد من حل المتباينة

$$\begin{aligned} x^2 - 9 > 0 &\Rightarrow (x-3)(x+3) > 0 \\ &\Rightarrow ((x-3) > 0 \wedge (x+3) > 0) \vee ((x-3) < 0 \wedge (x+3) < 0) \\ &\Rightarrow x \in (3,\infty) \vee x \in (-\infty,-3) \end{aligned}$$

اذا مجال المقام هو $(3,\infty)\cup(-\infty,-3)$ الأن نقوم بتحديد أصفار المقام أى نضع $x^2-9=0$ اذا أصفار المقام هى $x=3,-3$ لذلك فإن مجال الدالة الأولي هو $D_{f_1} = (3,\infty)\cup(-\infty,-3) - \{3,-3\} = (3,\infty)\cup(-\infty,-3)$.

ثانيا: لحساب مجال الدالة الثانية $f_2(x) = \sqrt{x^2-16}$ لابد من حل المتباينة

$$\begin{aligned} x^2 - 16 \geq 0 &\Rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0 \\ &\Rightarrow ((x-4) \geq 0 \wedge (x+4) \geq 0) \vee ((x-4) \leq 0 \wedge (x+4) \leq 0) \\ &\Rightarrow x \in [4,\infty) \vee x \in (-\infty,-4] \\ &\Rightarrow D_{f_2} = [4,\infty)\cup(-\infty,-4] \end{aligned}$$

أخيراً: حيث أن $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$ اذا

مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \sqrt{x^2-16}$ هو

$$D_f = [4,\infty) \cup (-\infty,-4]$$

الأن سوف نقوم بحساب مدى الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \sqrt{x^2-16}$

اذا كان $x \geq 4$ فان

$$[4,\infty) \cup (-\infty,-4] \; f'(x) = -x\left(x^2-9\right)^{-\frac{3}{2}} + x\left(x^2-16\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\geq x\left(-\frac{1}{7}\left(x^2-9\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x^2-16\right)^{-\frac{1}{2}}\right) > 0$$

لذلك نستنتج أن الدالة تزايدية عندما $x \in [4,\infty)$ وحيث أن $f(4) = \frac{1}{\sqrt{7}}$ وكذلك $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ لذلك فان مدى الدالة f على الفترة $[4,\infty)$ هو $\left[\frac{1}{\sqrt{7}},\infty\right)$ وحيث أن $f(x) = f(-x)$ بالتالى فان مدى الدالة f على الفترة $[4,\infty) \cup (-\infty,-4]$ هو أيضا الفترة $\left[\frac{1}{\sqrt{7}},\infty\right)$ اذا مدى الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \sqrt{x^2-16}$ هو $\left[\frac{1}{\sqrt{7}},\infty\right)$

4-أنواع الدوال:

الدالة الأحادية : يقال للدالة $f: X \to Y$ انها دالة أحادية من X الى Y اذا كانت العناصر المختلفة من مجموعة المجال لها صور مختلفة فى مجموعة المجال المقابل أى أن: $\forall x, y \in X \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ بمعنى أن (اذا تساوت الصور تساوت الأصول)

ملحوظة

التعريف $\forall x, y \in X \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ يكافىء التعريف

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in X$$

<u>مثال(4):</u>

اذا كانت الدالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ معرفة كالتالى $f(x) = x + 2$ فاثبت أن الدالة f أحادية

الحل

مطلوب اثبات انه $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ لذلك نفرض أن

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x + 2 = y + 2 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

اذا الدالة $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ دالة أحادية .

<u>مثال(4):</u>

اذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ معرفة كالتالى $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ فاثبت أن الدالة f أحادية.

الحل

مطلوب اثبات انه $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ لذلك نفرض أن

$$
\begin{aligned}
f(x)=f(y) &\Rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2+1}\\
&\Rightarrow x-y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\\
&\Rightarrow x^2-2xy+y^2=y^2+1+x^2+1-2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\\
&\Rightarrow 1+xy=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}\\
&\Rightarrow 1+2xy+x^2y^2=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\\
&\Rightarrow x^2-2xy+y^2=0\\
&\Rightarrow \left(x-y\right)^2=0\\
&\Rightarrow x=y
\end{aligned}
$$

اذا الدالة $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}-\{0\}$ دالة أحادية.

الدالة الفوقية: يقال للدالة $f:X\rightarrow Y$ انها دالة فوقية (غامرة) من X الى Y اذا كان مدى الدالة f يساوى المجال المقابل Y أى أن كل عنصر من عناصر Y يكون له أصل فى X أى أن : $\forall y\in Y,\exists x\in X: f(x)=y$

ملحوظة

لاثبات أن الدالة $f:X\rightarrow Y$ دالة فوقية نحل المعادلة $f(x)=y$ بالنسبة الى x فان كان لها حل وكان ناتج الحل $x\in X$ تكون الدالة فوقية وان لم يكن لها حل او كان لها حل وقيمته $x\notin X$ فان الدالة f لا تكون فوقية.

<u>مثال(4):</u>

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}-\{2\}\rightarrow\mathbb{R}-\{1\}$ معرفة كالتالى $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ فاثبت أن الدالة f فوقية

الحل

مطلوب اثبات انه $\forall y \in \mathbb{R}-\{1\}, \exists x \in \mathbb{R}-\{2\}: f(x)=y$ اى نحل المعادلة $f(x)=y$ بالنسبة الى x.

$$y=\frac{x-1}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2)=x-1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{R}-\{1\}$$

اذا الدالة $f:\mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{1\}$ دالة فوقية .

<u>مثال(4):</u>

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{0\}$ معرفة كالتالى $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ فاثبت أن الدالة f فوقية

الحل

مطلوب اثبات انه $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}-\{0\}: f(x)=y$ اى نحل المعادلة $f(x)=y$ بالنسبة الى x.

$$y=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y-x=\sqrt{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow y^2-2yx+x^2=x^2+1$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{2y} \in \mathbb{R}-\{0\}$$

اذا الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}-\{0\}$ دالة فوقية .

<u>مثال(4):</u>

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ معرفة كالتالى $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ فاثبت أن الدالة f فوقية

الحل

مطلوب اثبات انه $\forall y\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}-\{0\}: f(x)=y$ اى نحل المعادلة $f(x)=y$ بالنسبة الى x.

$$\begin{aligned} y=\frac{x^2-1}{x} &\Leftrightarrow yx=x^2-1 \\ &\Leftrightarrow x^2-yx-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}\in\mathbb{R}-\{0\} \end{aligned}$$

اذا الدالة $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ دالة فوقية .

الدالة التناظر الأحادى: يقال للدالة $f:X\to Y$ انها دالة تناظر أحادى (تقابل) من X الى Y اذا كانت دالة أحادية وفوقية .

مثال(4):

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ معرفة كالتالى $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ فاثبت أن الدالة f تناظر أحادى .

الحل

حيث انه تم اثيات أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ دالة أحادية وفوقية اذا هى تناظر أحادى.

مثال(4):

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ معرفة كالتالى $f(x)=x+2$ بين ما اذا كانت الدالة f تناظر أحادى أم لا.

الحل

حيث انه تم اثيات أن الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ دالة أحادية بقى أن نتحقق ما اذا كانت فوقية أم لا .

أى مطلوب التحقق من صحة المعادلة $\forall y\in\mathbb{N},\exists x\in\mathbb{N}: f(x)=y$ اى نحل المعادلة $f(x)=y$ بالنسبة الى x .

$y=x+2 \Leftrightarrow x=y-2\notin\mathbb{N}$ لبعض قيم y على سبيل المثال اذا اخذنا $y=1$ فان $x=-1\notin\mathbb{N}$ اذا الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ليست فوقية وبالتالى ليست تناظر أحادى.

اذا هى تناظر أحادى

تساوى دالتين: يقال للدالة $f:X\to Y$ انها تساوى الدالة $g:A\to B$ وتكتب $f=g$ اذا كان $X=A,Y=B, f(x)=g(x)\quad \forall x\in X$

<u>مثال(6)</u>

إذا كان $f:A\to A$ حيث $A=\{1,2\}, B=\{1,2,3,4\}, f(1)=1, f(2)=4$ وكانت $g:\{1,2\}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2\quad \forall x\in\{1,2\}$ واضح أن

$$g(1)=1=f(1), g(2)=4=f(2)$$
$$\therefore f(t)=g(t)\quad \forall t\in\{1,2\}$$
$$\therefore f=g$$

بعض خصائص صور مجموعات جزئية من النطاق

نظرية: اذا كانت $f : X \to Y$ دالة وكانت $X_1, X_2 \subseteq X$ فان:

$$(i)\ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f\left(X_1\right) \subseteq f\left(X_2\right)$$
$$(ii)\ f\left(X_1 \cup X_2\right) = f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right)$$
$$(iii)\ f\left(X_1 \cap X_2\right) \subseteq f\left(X_1\right) \cap f\left(X_2\right)$$

البرهان: (i) نفرض أن $X_1 \subseteq X_2$ بما أن

$$f\left(X_1\right) = \left\{y \in Y : y = f\left(x\right), x \in X_1\right\}$$
$$\subseteq \left\{y \in Y : y = f\left(x\right), x \in X_2\right\} = f\left(X_2\right)$$

اذا $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f\left(X_1\right) \subseteq f\left(X_2\right)$

(ii) اولا نثبت أن $f\left(X_1 \cup X_2\right) \subseteq f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right)$

$$\forall y \in f\left(X_1 \cup X_2\right) \Rightarrow \exists x \in X_1 \cup X_2, y = f\left(x\right)$$
$$\Rightarrow x \in X_1, y = f\left(x\right) \vee x \in X_2, y = f\left(x\right)$$
$$\Rightarrow f\left(x\right) \in f\left(X_1\right) \vee f\left(x\right) \in f\left(X_2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(x\right) \in f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(X_1 \cup X_2\right) \subseteq f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right)$$

ثانيا :نثبت أن $f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right) \subseteq f\left(X_1 \cup X_2\right)$

$$\forall y \in f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right) \Rightarrow y \in f\left(X_1\right) \vee y \in f\left(X_2\right)$$
$$\Rightarrow \exists x_1 \in X_1, y = f\left(x_1\right) \vee \exists x_2 \in X_2, y = f\left(x_2\right)$$
$$\Rightarrow \exists x_1 \vee x_2 \in X_1 \cup X_2, y = f\left(x_1\right) \vee y = f\left(x_2\right)$$
$$\Rightarrow y \in f\left(X_1 \cup X_2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(X_1\right) \cup f\left(X_2\right) \subseteq f\left(X_1 \cup X_2\right)$$

اذا نستنتج أن $f\left(X_1 \cup X_2\right)=f\left(X_1\right)\cup f\left(X_2\right)$.

(iii)

$$\begin{aligned}
\forall y\in f\left(X_1\cap X_2\right) &\Rightarrow \exists x\in X_1\cap X_2, y=f\left(x\right)\\
&\Rightarrow x\in X_1, y=f\left(x\right)\wedge x\in X_2, y=f\left(x\right)\\
&\Rightarrow y=f\left(x\right)\in f\left(X_1\right)\wedge f\left(x\right)\in f\left(X_2\right)\\
&\Rightarrow y\in f\left(X_1\right)\cap f\left(X_2\right)\\
&\Rightarrow f\left(X_1\cap X_2\right)\subseteq f\left(X_1\right)\cap f\left(X_2\right)
\end{aligned}$$

ملحوظة:

التساوى فى الخاصية (iii)

لا يتحقق على وجه العموم وكمثال على ذلك اذا كانت

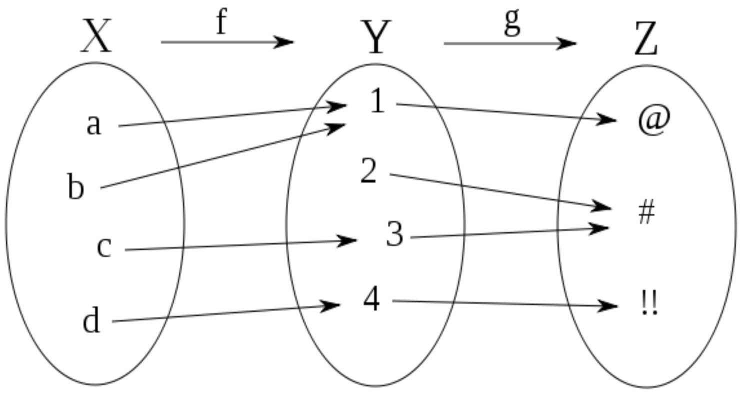
$$X=\{a,b,c,d,e,f\}, \mathrm{Y}=\{1,2,3,4,5,6\}, f:X\to Y,$$
$$f\left(a\right)=1, f\left(b\right)=2, f\left(c\right)=1, f\left(d\right)=4, f\left(e\right)=4, f\left(f\right)=6$$

بأخذ المجموعتين الجزئيتين $X_1=\{a,b,d\}, X_2=\{c,d,e\}$ من المجموعة X

$$f\left(X_1\cap X_2\right)=\{4\}, f\left(X_1\right)\cap f\left(X_2\right)=\{1,4\}$$
$$\therefore f\left(X_1\cap X_2\right)\neq f\left(X_1\right)\cap f\left(X_2\right)$$

تحصيل (تركيب) الدوال

إذا كان لدينا دالة $f:X\to Y$ معرفة من المجموعة X إلي المجموعة Y ودالة أخري $g:Y\to Z$ معرفة من المجموعة Y إلي المجموعة Z، فإنه يمكن تعريف دالة تركيبية من المجموعة X إلي المجموعة Z، علي النحو التالي $g\circ f:X\to Z$.



(شكل (7))

إذا كان لدينا دالتين $f:X\to Y, g:Z\to W$ وكانت $f\left(X\right)\subseteq Z$ فان تحصيل الدالتين f,g يكون دالة أيضا وتكتب $g\circ f$ وتعرف كما يلى:
$\left(f\circ g\right)(x)=f\left(g\left(x\right)\right)\ \ \forall x\in X$

ملحوظة:

فى حالة $Y=Z$ فان الشرط $f\left(X\right)\subseteq Z$ يتحقق دائما وبذلك فانه لأى ثلاث مجموعات X,Y,Z ولأى دالتين $f:X\to Y, g:Y\to Z$ يمكن دائما تعريف الراسم $g\circ f$ ونلاحظ أيضا أن الراسم $f\circ g$ لا يكون معرفا الا اذا كان $g\left(Z\right)\subseteq X$ وعندئذ فليس من الضرورى أن يكون $f\circ g=g\circ f$

مثال(6)

إذا كان $f(x)=2x+3, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ، $g(x)=x^2\ \forall x\in\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ أحسب
$(f\circ g)(x)\ ,\quad (g\circ f)(x)$

الحل

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)$$
$$=2(x^2+1)+3=2x^2+2+3=2x^2+5$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$$
$$=(2x+3)^2+1=4x^2+12x+9+1=4x^2+12x+10$$

مثال(7)

إذا كان $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=\dfrac{4}{x^2+2x+5}$ أحسب $(g\circ f)(x)$

الحل

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-3})=\frac{4}{(\sqrt{x-3})^2+2\sqrt{x-3}+5}=\frac{4}{x+2\sqrt{x-3}+2}$$

مثال(8)

إذا كانت $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

دالتين حيث $f(x)=x^2+3x+1, g(x)=2x-3,$

فأحسب $(g\circ f)(x),(f\circ g)(x),(f\circ f)(x),(g\circ g)(x)$

الحل

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)=(2x-3)^2+3(2x-3)+1=4x^2-6x+1,$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3x+1)=2(x^2+3x+1)-3=2x^2+6x-1,$$
$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(2x-3)=2(2x-3)-3=4x-9,$$
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+3x+1)=(x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1$$
$$=x^4+6x^3+14x^2+15x+5$$

نظرية(2): اذا كانت $f:A\to B, g:\mathrm{B}\to\mathrm{C}, \mathrm{h}:\mathrm{C}\to\mathrm{D}$ ثلاث دوال فان $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

البرهان: واضح أن $h\circ(g\circ f):A\to D,(h\circ g)\circ f:A\to D$ ومن تعريف تساوى دالتين يتبقى لاثبات التساوى أن نثبت أن :

$$(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)\quad \forall a\in A$$

$$\begin{aligned}\therefore (h\circ(g\circ f))(a)&=h((g\circ f)(a))\\ &=h(g(f(a)))\\ &=(h\circ g)(f(a))\\ &=((h\circ g)\circ f)(a)\end{aligned}$$

نظرية(2): اذا كانت الدالتان $f:A\to B,g:\mathrm{B}\to \mathrm{C}$ دالتين فوقيين فان المحصلة $(g\circ f):A\to C$ تكون دالة فوقية أيضا.

البرهان: حيث أن كلا من الدالتين فوقية فمن تعريف الدالة الفوقية يكون:

$$f(A)=B,g(B)=C$$

$$\therefore (g\circ f)(A)=g(f(A))=g(B)=C$$

أى أن صورة المجال A تكون هى المجال المقابل للدالة C اذا الدالة $(g\circ f)$ تكون فوقية.

نظرية(2): اذا كانت الدالتان $f:A\to B,g:\mathrm{B}\to \mathrm{C}$ دالتين أحاديتين فان المحصلة $(g\circ f):A\to C$ تكون دالة أحادية أيضا.

البرهان: حيث أن كلا من الدالتين أحادية فمن تعريف الدالة الأحادية يكون:

$$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b,g(c)=g(d)\Rightarrow c=d$$

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(a_1)=(g\circ f)(a_2)&\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))\\ &\Rightarrow f(a_1)=f(a_2)\\ &\Rightarrow a_1=a_2\end{aligned}$$

اذا $(g\circ f)$ دالة أحادية.

نظرية(2): اذا كانت الدالتان $f:A\to B,g:\mathrm{B}\to \mathrm{C}$ دالتين تناظر أحادى فان المحصلة $(g\circ f):A\to C$ تكون دالة تناظر أحادى أيضا.

البرهان: حيث أن الدالة $(g\circ f):A\to C$ أحادية وفوقية باستخدام النظريتين السابقتين اذا $(g\circ f):A\to C$ يكون تناظر أحادى .

تعريف: دالة الوحدة للمجموعة X يعرف كما يلى:

$i_X : X \to X; i_X(x) = x \quad \forall x \in X$

<u>ملحوظة:</u>

من السهل اثبات أنه لأى دالة

$f : X \to Y$ يكون $i_Y \circ f = f,\ f \circ i_X = f$

تعريف: الدالة $f : X \to Y$ يقال أنها قابلة للأنعكاس اذا وجدت دالة $g : Y \to X$ بحيث : $g\circ f = i_X,\ f \circ g = i_Y$ وفى هذه الحالة تسمى الدالة g الدالة العكسية للدالة f وتكتب $g = f^{-1}$

نظرية(2): الدالة $f : A\to B$ تكون قابلة للأنعكاس اذا واذا فقط كانت تناظر أحادى.

البرهان:

أولا : نفرض أن الدالة قابلة للأنعكاس وسنثبت أنها تناظر أحادى:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$$
$$\Rightarrow i_A(x_1) = i_A(x_2)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

اذا f دالة أحادية.

نريد أثبات أنها فوقية كالتالى

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

بحل المعادلة السابقة بالنسبة ل x نجد أن $x = f^{-1}(y)$

اذا f دالة فوقية.

أولا : نفرض أن الدالة تناظر أحادى وسنثبت أنها قابلة للأنعكاس:

$$\forall a \in A \exists b \in B; f(a) = b,$$
$$\forall b \in B \exists a \in A; g(b) = a.$$

وبالتالى تكون الدالة $g : B \to A$ معرفة بحيث يكون $g(b) = a$ ويكون:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \Rightarrow g \circ f = i_A,$$
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b \Rightarrow f \circ g = i_B$$

اذا الدالة f قابلة للأنعكاس .

نظرية(2): اذا كانت الدالتان $f : A \to B, g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ دالتين قابلتين للأنعكاس فان الدالة $(g \circ f) : A \to C$ تكون قابلة للأنعكاس أيضا ويكون : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$(g \circ f) : A \to C$$

البرهان:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g) = g \circ (i_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = i_C,$$
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (i_B \circ f) = f^{-1} \circ f = i_A.$$
$$\therefore (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

5- الدوال الزوجية والفردية Even and odd functions:

عند استبدال كل x بـ $-x$ في دالة ما $f(x)$ فإنه يمكن تحديد نوع الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية طبقا للتعريف التالي

• الدالة الزوجية هي التي تحقق الشرط	$f(-x)=f(x)$
• الدالة الفردية هي التي تحقق الشرط	$f(-x)=-f(x)$
• الدالة لا زوجية ولا فردية عندما	$f(-x)\neq f(x)\neq -f(x)$

ملاحظة:

1- منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور الصادات.

2- منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الأصل.

مثال(8)

أدرس نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية

$$f(x)=\sqrt{x^2-3}\ , \qquad g(x)=x^3+3x\ , \qquad h(x)=x^2+2x+4$$

الحل

نستبدل كل x بـ $-x$ نجد أن

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-3}=\sqrt{x^2-3}=f(x)$$

لذلك فإن الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ دالة زوجية.

$$g(-x)=(-x)^3+3(-x)=-x^3-3x=-(x^3+3x)=-g(x)$$

لذلك فإن الدالة $g(x)=x^3+3x$ دالة فردية.

$$h(-x)=(-x)^2+2(-x)+4=x^2-2x+4\neq h(x)\neq -h(x)$$

لذلك فإن الدالة $h(x)=x^2+2x+4$ دالة لا زوجية ولا فردية.

مثال(9)

أدرس نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\ , \qquad g(x)=\frac{2}{x^3+3x}\ , \qquad h(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$$

الحل

نستبدل كل x بـ $-x$ نجد أن

$$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+5}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+5}}=-f(x)$$

لذلك فإن الدالة $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$ دالة فردية.

$$g(-x)=\frac{2}{(-x)^3+3(-x)}=\frac{2}{-x^3-3x}=-\frac{2}{x^3+3x}=-g(x)$$

لذلك فإن الدالة $g(x)=\frac{2}{x^3+3x}$ دالة فردية.

$$h(-x)=(-x)^2\sqrt{4-(-x)^2}=x^2\sqrt{4-x^2}=h(x)$$

لذلك فإن الدالة $h(x)=x^2\sqrt{4-x^2}$ دالة زوجية.

5- الدالة العكسية Inverse function:

العلاقة العكسية لدالة لا تكون دالة الا عندما تكون الدالة تناظر أحادى وفى هذه الحالة فاننا نسمى العلاقة العكسية للدالة بالدالة العكسية وهو أيضا يكون تناظر أحادى .

تعريف(5)

اذا كانت الدالة $f:X\to Y$ دالة تناظر أحادى فان الدالة العكسية لها هى f^{-1} تكون دالة تناظر أحادى من X الى Y أى أن $f^{-1}:Y\to X$

ملاحظات

1- اذا كانت الدالة $f:X\to Y$ دالة تناظر أحادى فان $f(X)=B$ وبالتالى $f^{-1}:Y\to X$ يحقق $f^{-1}(Y)=X$.

2- اذا كانت الدالة $f:X\to Y$ دالة تناظر أحادى وكان $x\in X, y\in Y$ بحيث أن $y=f(x)$ فان هذا معناه ان $x=f^{-1}(y)$ والعكس أى أن $x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow y=f(x)$.

مثال(4):

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}-\{0\}$ معرفة كالتالى $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ فاثبت أن الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} .

الحل

حيث أن الدالة $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ تناظر أحادى (تم اثباتها) اذا من التعريف نستنتج أن الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} .

مثال(4):

اذا كانت الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ معرفة كالتالى $f(x)=x+2$ بين ما اذا كانت الدالة f لها دالة عكسية f^{-1} أم لا.

الحل

حيث أن هذه الدالة ليست فوقية(تم اثباتها) وبالتالى ليست تناظر أحادى اذا الدالة f ليس لها دالة عكسية f^{-1} .

خطوات تعين الدالة العكسية

لتعين الدالة العكسية لدالة $f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

أ- استبدال $f(x)$ بـ y

ب- استبدال كل x بـ y واستبدال كل y بـ x

ج- حل y كدالة في x

د- استبدال y بـ $f^{-1}(x)$

مثال(13)

عين الدالة العكسية لكلا من الدوال التالية أن وجدت

1) $f(x)=3x+8$ 2) $g(x)=-2x-8$

3) $h(x)=\dfrac{2x}{x-1},\ x\neq 1$ 4) $L(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}, x\neq -3$

الحل

1) لإيجاد الدالة العكسية للدالة $f(x)=3x+8$ نتبع الخطوات التالية

أ- استبدال $f(x)$ بـ y $y=3x+8$

ب-استبدال كل x بـ y واستبدال كل y بـ x $x=3y+8$

ج- حل y كدالة في x

$x-8=3y$

$\dfrac{1}{3}x-\dfrac{8}{3}=y$

د- استبدال y بـ $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{8}{3}$

2) لإيجاد الدالة العكسية للدالة $g(x)=-2x-8$ نتبع الخطوات التالية

أ- استبدال $g(x)$ بـ y $y=-2x-8$

ب- استبدال كل x بـ y واستبدال كل y بـ x $x=-2y-8$

ج- حل y كدالة في x

$2y=-x-8$

$y=-\dfrac{1}{2}x-4$

د- استبدال y بـ $g^{-1}(x)$ $g^{-1}(x)=-\dfrac{1}{2}x-4$

3) لإيجاد الدالة العكسية للدالة $h(x)=\frac{2x}{x-1},\quad x\neq 1$ نتبع الخطوات التالية

أ- استبدال $h(x)$ بـ y $\qquad y=\frac{2x}{x-1}$

ب- استبدال كل x بـ y واستبدال كل y بـ x $\qquad x=\frac{2y}{y-1}$

ج- حل y كدالة في x

$$2y=x(y-1)=xy-x$$
$$2y-xy=-x$$
$$y(2-x)=-x$$
$$y=\frac{-x}{2-x}=\frac{x}{x-2}$$

د- استبدال y بـ $h^{-1}(x)$ $\qquad h^{-1}(x)=\frac{x}{x-2},\quad x\neq 2$

4) لإيجاد الدالة العكسية للدالة $L(x)=\frac{2x-1}{x+3},\quad x\neq -3$ نتبع الخطوات التالية

أ- استبدال $L(x)$ بـ y $\qquad y=\frac{2x-1}{x+3}$

ب- استبدال كل x بـ y واستبدال كل y بـ x $\qquad x=\frac{2y-1}{y+3}$

ج- حل y كدالة في x

$$2y-1=x(y+3)=xy+3x$$
$$2y-xy=3x+1$$
$$y(2-x)=3x+1$$
$$y=\frac{3x+1}{2-x}$$

د- استبدال y بـ $L^{-1}(x)$ $\qquad L^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2-x},\quad x\neq 2$

مثال(4):

اذا كانت $f(\sin x+\cos x)=x$ فأوجد قيمة الدالة $f(x)$.

الحل

بأخذ $\frac{-3\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ اذا الدالة $g(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ تكون تناظر أحادى من $\left[\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ الى $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ وبالتالى تكون الدالة العكسية $g^{-1}(t) = \frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}$ وبالتالى $f(x) = \frac{\pi}{4} - \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$.

<u>بعض خصائص الدالة العكسية</u>

نظرية(1): اذا كانت $f : X \to Y$ دالة وكانت $X_1 \subseteq X$ فان $f^{-1}(f(X_1)) \supseteq X_1$.

البرهان: نفرض أن $x \in X_1$ اذا

$$x \in X_1 \Rightarrow f(x) \in f(X_1)$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(X_1))$$

اذا نستنتج أن $X_1 \subseteq f^{-1}(f(X_1))$.

نظرية(2): اذا كانت $f : X \to Y$ دالة وكانت $Y_1 \subseteq Y$ فان $f(f^{-1}(Y_1)) \subseteq Y_1$.

البرهان:

نفرض أن $y \in f(f^{-1}(Y_1))$ اذا يوجد $x \in f^{-1}(Y_1), y = f(x)$

هذا يؤدى الى $y = f(x) \in Y_1$ اذا نستنتج أن $f(f^{-1}(Y_1)) \subseteq Y_1$

نظرية(3): اذا كانت $f : X \to Y$ دالة وكانت $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ فان

$$(i)\ f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$$
$$(ii)\ f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$
$$(iii)\ f^{-1}(Y_i^c) = \left(f^{-1}(Y_i)\right)^c,\ i = 1, 2$$

البرهان:

(i) سوف نثبت اولا **أن** $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ نفرض أن اذا

$$\forall x\in f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)\Rightarrow \exists y\in Y_1\bigcap Y_2,\, y=f\left(x\right)$$
$$\Rightarrow f\left(x\right)\in Y_1\wedge f\left(x\right)\in Y_2$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(Y_1\right)\wedge x\in f^{-1}\left(Y_2\right)$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)$$
$$\Rightarrow f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)\subseteq f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)$$

ثانيا نثبت أن $f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)\subseteq f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)$ اذا

$$\forall x\in f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)\Rightarrow x\in f^{-1}\left(Y_1\right)\wedge x\in f^{-1}\left(Y_2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(x\right)\in Y_1\wedge f\left(x\right)\in Y_2$$
$$\Rightarrow f\left(x\right)\in Y_1\bigcap Y_2$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)$$
$$\Rightarrow f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)\subseteq f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)$$

اذا نستنتج أن $f^{-1}\left(Y_1\right)\bigcap f^{-1}\left(Y_2\right)=f^{-1}\left(Y_1\bigcap Y_2\right)$.

(ii) بطريقة مشابهه لبرهان الفقرة (i) يمكن برهان الفقرة (ii)

(iii)سوف نثبت أولا أن $f^{-1}\left(Y_i^c\right)\subseteq\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c$

$$x\in f^{-1}\left(Y_i^c\right)\Rightarrow f\left(x\right)\in Y_i^c$$
$$\Rightarrow f\left(x\right)\notin Y_i\Rightarrow x\notin f^{-1}\left(Y_i\right)$$
$$\Rightarrow x\in\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c\Rightarrow f^{-1}\left(Y_i^c\right)\subseteq\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c,\ i=1,2$$

ثانيا نثبت أن $\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c\subseteq f^{-1}\left(Y_i^c\right)$

$$x\in\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c\Rightarrow x\notin f^{-1}\left(Y_i\right)\Rightarrow f\left(x\right)\notin Y_i$$
$$\Rightarrow f^{-1}\left(Y_i^c\right)\Rightarrow f\left(x\right)\in Y_i^c$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}\left(Y_i^c\right)\Rightarrow\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c\subseteq f^{-1}\left(Y_i^c\right),\ i=1,2$$

اذا نستنتج أن $f^{-1}\left(Y_i^c\right)=\left(f^{-1}\left(Y_i\right)\right)^c,\ i=1,2$

تمارين

تمرين(1):

هل العلاقات التالية تمثل دالة مع ذكر السبب

1) $\{(2, 3), (5, 1), (-4, 3), (7, 11)\}$ 2) $\{(5, 10), (3, -2), (4, 7), (5, 8)\}$

3) $\{(4, 4), (6, 1), (5, -3), (4, 5)\}$ 4) $\{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

5) $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$ 6) $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$

7) $\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)\right\}$ 8) $y = 3$

9) $y = 4 \pm \sqrt{x}$ 10) $x^2 - 2y = 5$

تمرين(2):

عين المجال والمدي لكل من الدوال التالية

1) $f(x) = 3x - 4$ 2) $f(x) = -2x + 1$

3) $f(x) = x^2 + 3$ 4) $f(x) = \dfrac{4}{2 - 3x}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 6}$ 6) $f(x) = \sqrt{x + 5}$

7) $f(x) = \sqrt{7 - 2x} + \sqrt{x + 5}$ 8) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 25}}$

9) $f(x) = x + \dfrac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$ 10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x^2 - 25}}$

تمرين(3):

أحسب $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ في كل من الحالات التالية

1) $f(x) = x - 4$, $g(x) = 4 - x^2$

2) $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 3}$, $g(x) = \sqrt{x - 9}$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x + 1}}$, $g(x) = x^3$

5) $f(x) = 3 - x^3$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

تمرين(4):

أدرس نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية

1) $f(x) = 3x^2 + 5$ 2) $f(x) = 3x^5 - 7x$

3) $f(x) = x + 5$ 4) $f(x) = 3$

5) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{\sqrt{x^2 + 8}}$ 6) $f(x) = \dfrac{3x}{2x^3 + 5x}$

7) $f(x) = x\sqrt{x^3 + 4x}$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$

9) $f(x) = |x|$ 10) $f(x) = (3x^3 + 5x)^2$

تمرين(5):

عين الدالة العكسية لكلا من الدوال التالية أن وجدت

1) $\{(1, 0), (10, 1), (100, 2), (1000, 3)\}$

2) $f(x) = -2x + 5$

3) $g(x) = \dfrac{4x}{x + 4}, \quad x \neq -4$

4) $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}, \quad x \neq 2$

5) $L(x) = x^2 + 2$

الدوال الأسية
واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Functions

أن شاء الله تعالي سوف نقوم بدراسة نوعين من الدوال الهامة والتي لها تطبيقات عديدة في جميع مجالات العلوم المختلفة الي وهما الدوال الأسية واللوغاريتمية. وسوف ندرس أيضا خواص كل منهما والعلاقة بينهما.وسوف نناقش العديد من المشاكل الرياضية التي يمكن حلها باستخدام تللك الدالتين:

1− الدوال الأسية (Exponential Functions):

في البداية سوف نقوم بتعريف الدوال الأسية كالاتي

تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية ذات **الأساس** a (**base** a) تعرف بواسطة

$$\boldsymbol{f(x) = a^{x}}$$

حيث $a \neq 1$ ،$a > 0,$ x عدد حقيقي.

ملاحظات:

1− من تعريف الدالة الاسية نجد أن الاساس a للدالة $f(x) = a^{x}$ لابد أن يكون موجب $(a > 0)$.

2− الأساس لأي دالة أسية لايساوي الواحد $(a \neq 1)$.

3− من تعريف الدالة الأسية نلاحظ أن **الأس** x معرف لجميع القيم الحقيقية الموجبة والسالبة ولذلك مجال الدالة الاسية هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. وهذا يعني أن x إما عدد نسبي (rational number) وهذا سهل التعامل معه. فمثلا

$$2^{3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$64^{2/3} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^{2} = 4^{2} = 16$$

$$(-125)^{1/3} = \left(\sqrt[3]{-125}\right) = -5$$

مثال(1)

عين قيمة الدالة $f(x) = 4^{x}$ عندما $x = 2, -4, \pi$

الحل

عندما $x = 2$ نجد أن $f(2) = 4^{2} = 16$

عندما $x = -4$ نجد أن $f(-4) = (4)^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{64}$

عندما $x = \pi$ نجد أن $f(\pi) = 4^{\pi} =$

1/1– رسم الدوال الأسية (Graphs of Exponential Functions)

لرسم الدالة الأسية نتبع الخطوات التالية:

نقوم بإيجاد قيمة الدالة الاسية عند بعض القيم الخاصة للمتغير المستقل x ونكون جدول بين المتغير x المستقل والمتغير التابع y. ونتاكد من وجود بعض القيم المميزة لمنحني الدالة كنقطة التقاطع مع محور x أو y

وسوف نوضح من خلال المثالين الآتيين كيفية الرسم عندما يكون الأساس a أكبر من 1 كما في المثال (2)، وعندما يأخذ الأساس a قيم تقع بين العددين 0 ، 1 كما في المثال (3).

مثال(2):

أرسم الدالة $f(x) = 3^x$

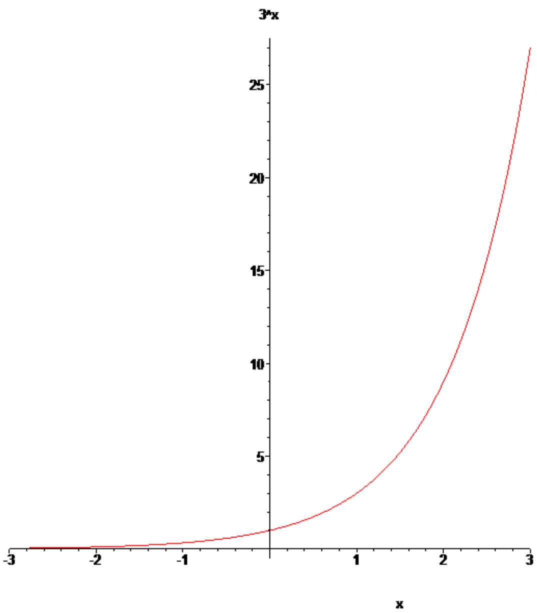
الحل

بأخذ بعض القيم لـ x وتعيين قيم y المناظرة لكل قيمة من هذه القيم لـ x ، كما في الجدول (1).

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)= 2^x$	1/9	1/3	1	3	9	27

جدول (1)

وبتحديد هذه النقاط علي الرسم ثم نصل بينهم بواسطة منحنى يمر بهم، كما في الشكل (1)



شكل (1)

من الشكل الدالة الأسية $f(x) = 3^x$.

- المنحني يقطع محور y عند النقطة $(0,1)$.
- عندما تقترب x من سالب ما لانهاية (هذا يعني أن $x \to -\infty$) فإن الدالة تقترب من الصفر $f(x) \to 0$.
- المنحنى يكون أملس، متزايد، متصل.

<u>مثال(3):</u>

أرسم الدالة $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

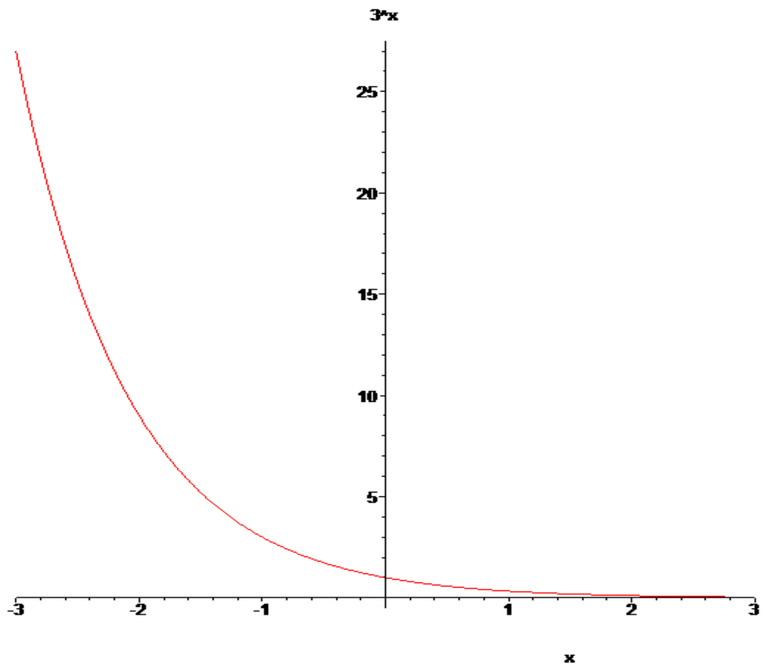
الحل

بأخذ بعض القيم لـ x وتعيين قيم y المناظرة لكل قيمة من هذه القيم لـ x ، كما في الجدول (2).

x	-3	-2	-1	0	1	2
$y = f(x) = (1/2)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9

جدول (2)

وبتحديد هذه النقاط علي الرسم ثم نصل بينهم بواسطة منحنى يمر بهم، كما في الشكل (2)



شكل (2)

من الشكل (2) نلاحظ الخواص الآتية لشكل الدالة الأسية $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- المنحني يقطع محور y عند النقطة $(0,1)$.
- عندما تقترب x من ما لانهاية (هذا يعني أن $x \to \infty$) فإن الدالة تقترب من الصفر $f(x) \to 0$.
- المنحنى يكون أملس، متناقص، متصل.

من المثالين السابقين سوف نستنتج بعض الخواص الأساسية للدوال الأسية.

2/1- بعض الخواص الأساسية للدوال الأسية:

الدالة الأسية المعرفة علي الصورة $f(x) = a^x$، حيث $a > 0,\ a \neq 1$ لها الخواص الآتية:

1- من رسم الدالة الاسية نجد انها معرفة لجميع قيم x **ولذلك مجال الدالة** الأسية f هو مجموعة الأعداد الحقيقية the set of real numbers (أي أن مجال تعريفها R).

2- من خلال رسم الدالة الاسية وجدنا ان جميع قيم y هي قيم موجبة ولذلك و**المدى** للدالة الأسية f هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة the set of positive real numbers،

3- الدالة الأسية f دالة أحادية one-to-one.

4- منحنى الدالة الأسية f يكون أملس ومتصل، ويقطع محور y عند النقطة $(0,1)$ ويمر بالنقطة $(1,a)$.

5- إذا كانت $a > 1$، فإن f تكون دالة تزايدية ويتقارب شكل الدالة f لمحور x السالب. (وهذا يعنى أن إذا كانت $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$، بينما إذا كانت $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$).

6- إذا كانت $0 < a < 1$، فإن f تكون دالة تناقصية ويتقارب شكل الدالة f لمحور x الموجب. (وهذا يعنى أن إذا كانت $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$، بينما إذا كانت $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$).

<u>مثال(4):</u>

أرسم الدالة $g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

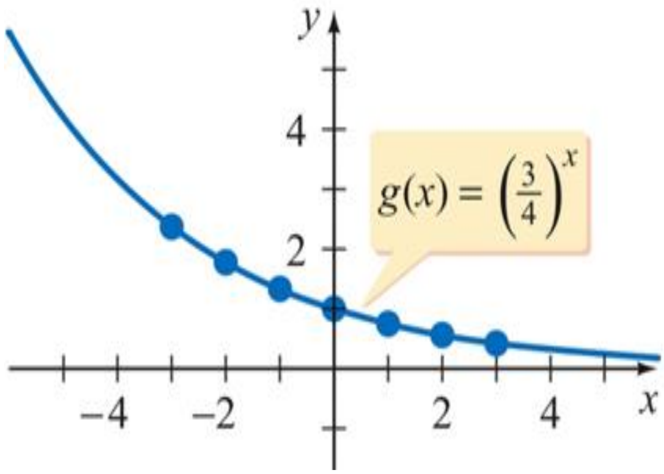
الحل

نلاحظ أن الأساس $a = \frac{3}{4}$ أي أن $a < 1$، ومن الخواص السابقة نستنتج أن الدالة الأسية g تكون دالة تناقصية ويتقارب شكل الدالة g لمحور x الموجب، ويقطع المنحنى محور y عند النقطة $(0,1)$ ويمر بالنقطة $\left(1,\frac{3}{4}\right)$. وبأخذ بعض القيم الإضافية لـ x وتعيين قيم y المناظرة لكل قيمة من هذه القيم لـ x نحصل علي (أنظر جدول (3)).

x	-3	-2	-1	2	3	4
$y = g(x) = (3/4)^x$	$64/27$	$16/9$	$4/3$	$9/16$	$27/64$	$81/256$

جدول (3)

وبتحديد هذه النقاط علي الرسم ثم نصل بينهم بواسطة منحنى يمر بهم، كما في الشكل (4).



شكل (3)

3/1− الدالة الأسية الطبيعية (Natural Exponential Function):

إذا كان الأساس $a = e \approx 2.71828183$ حيث الحرف $\boldsymbol{e}$ عدد غير نسبى يستخدم كثيراً في التطبيقات التي تحتوى علي حالات نمو (تزايد) growth أو اضمحلال (نقصان) decay. ويرجع الفضل لاختيار الحرف e إلي عالم الرياضيات السويسري **أويلر** Euler.

ويعرف e علي الصورة

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

عندما تزداد n إلي ما لانهاية (أي عندما $n \to \infty$).

أساس الدالة الأسية كما نعلم هو أي عدد حقيقي موجب خلاف 1. فمثلا العدد 10 هو أساس مناسب يستخدم في بعض الحالات، ولكن العدد e يكون غالبا هو الأساس الأفضل استخداماً في تطبيقات الحياة الحقيقية. والدالة الأسية ذات الأساس e تسمي بالدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي e أو **بالدالة الأسية الطبيعية** Natural exponential function.

تعريف الدالة الأسية الطبيعية (Definition of the Natural Exponential Function)
لكل عدد حقيقي x، تسمي الدالة المعرفة علي الصورة الآتية
$\boldsymbol{f(x) = e^x}$
بالدالة الأسية الطبيعية The natural exponential function.

ويمكنا استخدام الآلة الحاسبة لتعيين e^x لقيم معينة لـ x. فعلي سبيل المثال،

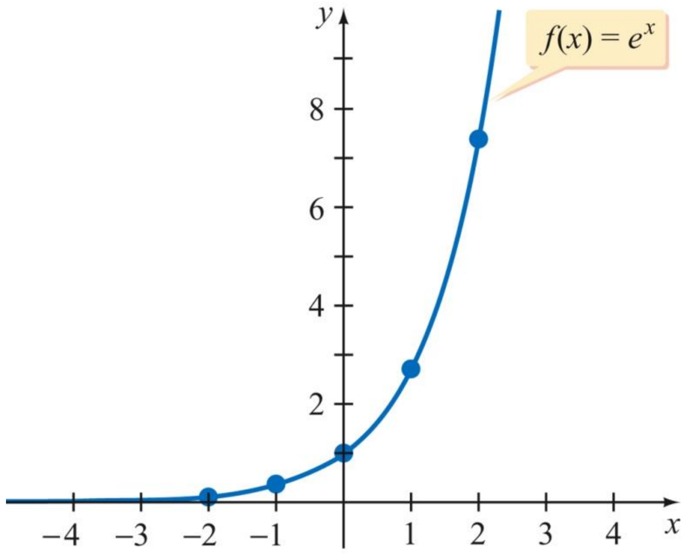
$$e^2 \approx 7.389056, \quad e^{3.5} \approx 33.115452, \quad e^{-1.4} \approx o.246597$$

ولرسم الدالة $f(x) = e^x$، نتبع الخطوات السابقة وذلك بأخذ بعض القيم للمتغير المستقل x وتعيين قيم $f(x)$ المناظرة كما في الجدول (4)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = e^x$	0.1	0.4	1	2.7	7.4

جدول (4)

وبتحديد هذه النقاط علي الرسم ثم نصل بينهم بواسطة منحنى أملس يمر بهم. ولأن $e > 1$، فإن شكل الدالة سوف يكون تزايدي، ويتقارب شكل الدالة إلي محور x في الجانب الأيسر. ويقطع محور y عند النقطة $(0,1)$، كما في الشكل (5).



شكل (5)

من الخواص الهامة للدالة الاسية

1) $a^n = a.a.a \dots a.\ (n\ times)$
2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
3) $a^0 = 1$
4) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$
5) $a^x . a^y = a^{(x+y)}$
6) $\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$

7) $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
(8) $a^x b^x = (a.b)^x$
(9) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

مثال(5):

عين مجال ومدي الدالة $g(x) = 2^x + 5$

الحل

مجال الدالة الاسية $g(x)$ هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. حيت أن جميع صور الدالة $g(x)$ موجبة واقل قيمة لهذة الدالة عندما $\mathrm{x} = 0$ وقيمتها يساوي 6 ولذلك مدي الدالة هو الفترة $[6, \infty)$.

مثال(6):

عين مجال ومدي الدالة $g(x) = 2 + e^x$

الحل

مجال الدالة الاسية $g(x)$ هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. حيت أن جميع صور الدالة $g(x)$ موجبة واقل قيمة لهذة الدالة عندما $\mathrm{x} = 0$ وقيمتها يساوي 3 ولذلك مدي الدالة هو الفترة $[3, \infty)$.

مثال(7)

أوجد حل المعادلة $2^{x-1} = 32$

الحل

سوف نستخدم القاعدة الآتية: إذا كان $a^x = a^y$ فإن $x = y$ حيث $a > 0,\ a \neq 1$ لحل المعادلة

$$2^{x-1} = 32$$
$$2^{x-1} = 2^5$$
$$x - 1 = 5$$
$$x = 6$$

مثال(8)

أوجد حل المعادلة $25^x = \frac{1}{125}$

الحل

$$25^x = \frac{1}{125}$$
$$(5^2)^x = \frac{1}{5^3}$$
$$5^{2x} = 5^{-3}$$
$$2x = -3$$
$$x = \frac{-5}{2}$$

2− الدوال اللوغاريتمية (Logarithmic Functions):

نحن نعلم أن من خواص الدالة الأسية التي علي الصورة $g(x) = a^x$ أنها دالة أحادية وبالتالي يكون لها دالة عكسية. وكما نعلم من الفصل السابق أنه لإيجاد المعكوس لدالة ممثلة بمعادلة فإننا نستبدل المتغيرات لهذه المعادلة ثم نحلها بالنسبة للمتغير التابع. وبإجراء هذه العملية بالنسبة للدالة الأسية $g(x) = a^x$، نحصل علي

$$g(x) = a^x$$
$$y = a^x$$
$$x = a^y$$

وهذه الطريقة السابقة لا يمكن استخدامها لحل المعادلة $x = a^y$ بالنسبه للأس y. لذلك نحتاج إلي تطوير عملية جديدة. أحد هذه الطرق هو كتابة y علي أنها تساوي الأس لـ b بحيث تنتج x. وهذه الطريقة غير مختصرة لذلك نحن بحاجة إلي تعبير مضغوط لتمثيل y علي أنها تساوي الأس لـ b بحيث تنتج x. هذا التعبير المضغوط سوف يعطي من خلال التعريف التالي.

تعريف اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية

(Definition of a Logarithm and a Logarithmic Function)

إذا كانت $x > 0$ ، a ثابت موجب بحيث $(a \neq 1)$، فإن

$$\mathrm{y} = \log_a x \qquad \textbf{إذا وفقط إذا} \qquad a^y = x$$

التعبير $\log_a x$ يقرأ لوغاريتم الأساس a لـ x

the logarithm (or log) base a of $\boldsymbol{x}$

الدالة المعرفة علي الصورة $f(x) = \log_a x$ تسمى **الدالة اللوغاريتمية** ذات الأساس

a. وهذه الدالة هي الدالة العكسية للدالة الأسية $g(x) = a^x$.

سوف نتعرف علي العلاقة الهامة الآتية والتي يطلق عليها تحصيل الدوال الأسية واللوغاريتمية.

<u>تحصيل الدوال الأسية واللوغاريتمية</u>

(Composition of Logarithmic and Exponential Functions)

بفرض أن $g(x) = a^x$ ، $f(x) = \log_a x$ بحيث $a \neq 1, a > 0, x > 0$، فإن

$$g(f(x)) = a^{\log_a x} = x \qquad \text{and} \qquad f(g(x)) = \log_a a^x = x$$

ومثال علي هذه العلاقة، بفرض أن $g(x) = 5^x$ والدالة $f(x) = \log_5 x$. فإن

$$g(f(x)) = 2^{\log_2 x} = x, \qquad \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \log_2 2^x = x$$

وسنوضح من خلال التعريف والأمثلة التالية كيفية تحويل المعادلة من الشكل الأسي إلي الشكل اللوغاريتمي والعكس.

<u>تعريف الشكل الأسي والشكل اللوغاريتمي</u>

1− الشكل الأسي (Exponential Form) للمعادلة اللوغارتمية $y = \log_a x$ يكون $a^y = x$.

الشكل اللوغاريتمي (Logarithmic Form) للمعادلة الاسية $a^y = x$ يكون $y = \log_a x$.

<u>مثال(9)</u>

أكتب كل معادلة مما يأتي علي الشكل الأسي

(أ) $5 = \log_2 32$ (ب) $2 = \log_5(x + 4)$

(ج) $\log_e x = 8$ (د) $\log_a a^6 = 6$

الحل

سوف نستخدم التعريف $\mathrm{y} = \log_b x$ إذا وفقط إذا $b^y = x$.

(أ) $5 = \log_2 32$ إذا وفقط إذا كان $2^5 = 32$

(ب) $1 = \log_5(x + 4)$ إذا وفقط إذا كان $5^2 = x + 4$

(ج) $\log_e x = 8$ إذا وفقط إذا كان $e^8 = x$.

(د) $\log_a a^6 = 6$ إذا وفقط إذا كان $a^6 = a^6$.

مثال(10)

أكتب كل معادلة مما يأتي علي الشكل اللوغاريتمي

(أ) $5^2 = 25$ (ب) $4^3 = x$

(ج) $a^b = c$ (د) $a^{\log_a 5} = 5$

الحل

الشكل اللوغاريتمي للمعادلة $a^y = x$ يكون $y = \log_a x$.

(أ) $5^2 = 25$ إذا وفقط إذا كان $2 = \log_5 25$

(ب) $4^3 = x$ إذا وفقط إذا كان $3 = \log_4 x$

(ج) $a^b = c$ إذا وفقط إذا كان $b = \log_a c$

(د) $b^{\log_b 5} = 5$ إذا وفقط إذا كان $\log_b 5 = \log_b 5$

من تعريف اللوغاريتم وتعريف الدالة العكسية يمكنا أن نستنتج العديد من خواص اللوغاريتم والتي نوجزها كما يلي

الخواص الأساسية للوغاريتم (Basic Logarithmic Properties)

1- $\log_b b = 1$

2- $\log_b 1 = 0$

4- $\log_b b^x = x$

5- $b^{\log_b x} = x$

مثال(11)

باستخدام الخواص الأساسية للوغاريتم عين كل من اللوغاريتمات الآتية

(أ) $\log_7 1$ (ب) $\log_a a$

(ج) $\log_5(5^4)$ (د) $3^{\log_3 9}$

(هـ) $\log_{10} \frac{1}{1000}$ (و) $\log_3 81$

الحل

(أ) من الخاصية 2، نستنتج أن $\log_7 1 = 0$.

(ب) من الخاصية 1، نستنتج أن $\log_a a = 1$.

(ج) من الخاصية 3، نستنتج أن $\log_5(5^4) = 4$.

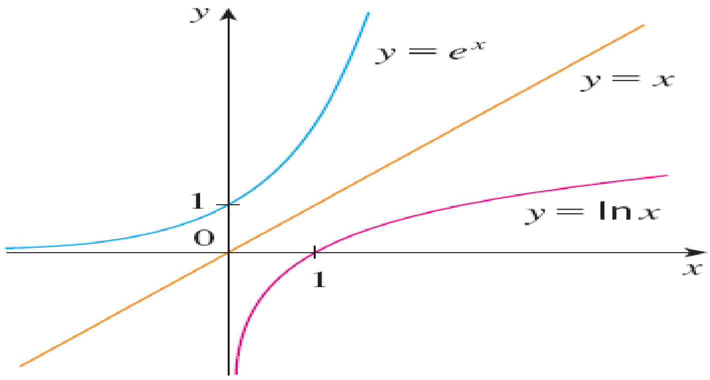
(د) من الخاصية 4، نستنتج أن $3^{\log_3 9} = 9$.

(هـ) من الخاصية 3، نستنتج أن $\log_{10}\frac{1}{1000} = \log_{10}(10^{-3}) = -3$.

(و) من الخاصية 3، نستنتج أن $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

1/2− رسم الدوال اللوغاريتمية Graphs of Logarithmic Functions

نحن نعلم أن الدالة $f(x) = \log_e x$ هي الدالة العكسية للدالة $g(x) = e^x$، وبالتالي فإن شكل الدالة f يكون عبارة عن الأنعكاس لشكل الدالة g عبر الخط $y = x$. كما يتضح من الشكل (6) التالي



شكل (6)

مثال(12)

أرسم الدالة $f(x) = \log_2 x$

الحل

لرسم الدالة $f(x) = \log_2 x$ فإننا سوف نتبع الخطوات التالية

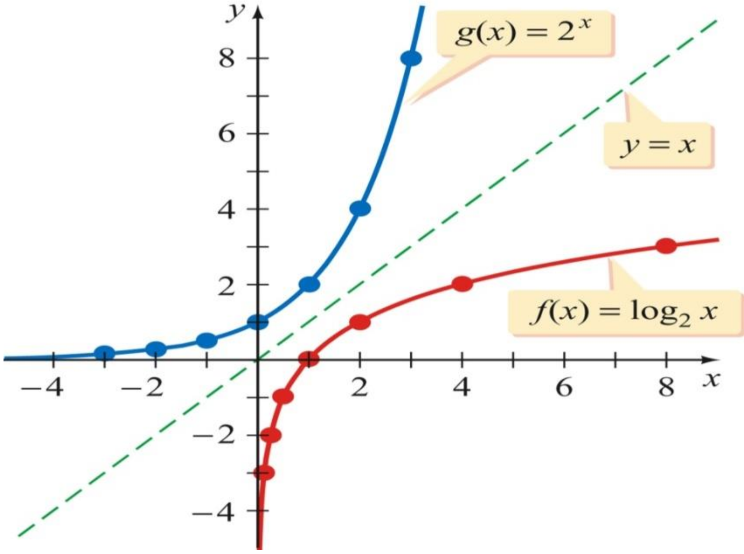
أولا نرسم منحنى الدالة $g(x) = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = 2^x$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8

جدول (5)

وبتحديد هذه النقاط علي الرسم ثم نصل بينهم بواسطة منحنى يمر بهم، كما في الشكل(7).

ثانياً نرسم الدالة $f(x) = \log_2 x$ وحيث أنها تمثل الدالة العكسية للدالة g فإن شكل الدالة f يكون عبارة عن الأنعكاس لشكل الدالة g عبر الخط $y = x$. (أنظر الشكل (7) أيضا).



شكل (7)

لاحظ أن إذا كانت (x, y) أي نقطة علي منحني الدالة g فإن (y, x) تكون نقطة علي منحني الدالة f، وبالتالي يمكنا تكوين الجدول الآتي بكل سهولة من الجدول(5)، أنظر جدول (6).

x	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

جدول (6)

2/2− بعض الخواص الأساسية للدوال اللوغاريتمية:

الدالة اللوغاريتمية المعرفة علي الصورة $f(x) = \log_a x$، حيث $a > 0,\ a \neq 1$ لها الخواص الآتية:

1− مجال الدالة اللوغاريتمية f هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. والمدى للدالة اللوغاريتمية f هو مجموعة الأعداد الحقيقية (أي أن مدي الدالة هو R).

2- منحنى الدالة اللوغاريتمية f يقطع محور y عند النقطة $(1,0)$ ويمر بالنقطة $(a, 1)$.

3- إذا كانت $a > 1$، فإن f تكون دالة تزايدية ويتقارب شكل الدالة f لمحور y السالب. (وهذا يعنى أن إذا كانت $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$، بينما إذا كانت $x \to 0$ من اليمين فإن $f(x) \to -\infty$).

4- إذا كانت $0 < a < 1$، فإن f تكون دالة تناقصية ويتقارب شكل الدالة f لمحور y الموجب. (وهذا يعنى أن إذا كانت $x \to \infty$ فإن $f(x) \to -\infty$، بينما إذا كانت $x \to 0$ من اليمين فإن $f(x) \to \infty$).

3/2- مجال الدالة اللوغاريتمية (Domain of Logarithmic Function)

نحن نعلم من خواص الدالة اللوغاريتمية أن مجال الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

مثال(*13*)

أوجد المجال لكل من الدوال اللوغاريتمية الآتية:

(أ) $f(x) = \log_3(x+2)$ (ب) $f(x) = \log_5(x-4)$

(ج) $f(x) = \log_2(x) + 7$ (د) $f(x) = \log_4|x-4|$

(هـ) $f(x) = \log_5|x+2|$

الحل

(أ) لإيجاد المجال للدالة $f(x) = \log_3(x+2)$ لابد أن ما لداخل اللوغارتم كمية موجبة ولذلك $(x+3) > 0$ وبحل هذه المتباينة بالنسبة لـ x نحصل علي $x > -2$. وبالتالي يكون مجال الدالة f هو جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من -2. وبمفهوم الفترات يكون المجال علي الصورة $(-2, \infty)$.

(ب) بوضع $(x-4) > 0$ وبحل هذه المتباينة بالنسبة لـ x نحصل علي $x > 4$. وبالتالي يكون مجال الدالة f هو جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من 4. وبمفهوم الفترات يكون المجال علي الصورة $(4, \infty)$.

(ج) مجال الدالة $f(x) = \log_2(x) + 7$ هو جميع الأعداد الحقيقية التي تحقق $x > 0$ وبمفهوم الفترات يكون المجال علي الصورة $(0, \infty)$.

(د) مجال الدالة $f(x) = \log_4|x - 4|$ هو مجموعة حل المتباينة

$$|x - 4| > 0$$

والتي يتكون من جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 3$. وبالتالي يكون مجال الدالة f هو جميع الأعداد الحقيقية بحيث $x \neq 3$. وبمفهوم الفترات يكون المجال علي الصورة $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

(هـ) مجال الدالة $f(x) = \log_5|x + 2|$ هو مجموعة حل المتباينة

$$|x + 2| > 0$$

والتي يتكون من جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = -2$ بالتالي يكون مجال f هو كل الأعداد الحقيقية حيث $x \neq -2$. وبمفهوم الفترات يكون المجال علي الصورة $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

4/2– الدوال اللوغاريتمات المشتركة والطبيعية

Common and Natural Logarithms

الدوال اللوغاريتمات المشتركة ذات الأساس 10 و الدوال اللوغاريتمات الطبيعية ذات الأساس e الأشهر والأكثر استخداماً.

تعريف اللوغاريتمات المشتركة والطبيعية

(Definition of Common and Natural Logarithms)

الدالة المعرفة علي الصورة $f(x) = \log_{10} x$ يطلق عليها **دالة اللوغاريتم المشتركة** Common logarithms function، وعادة تكتب علي الصورة $f(x) = \log x$. أي أن اللوغاريتم يكتب بدون كتابة الأساس.

الدالة المعرفة علي الصورة $f(x) = \log_e x$ يطلق عليها **دالة اللوغاريتم الطبيعية** Natural logarithms function، وعادة تكتب علي الصورة $f(x) = \ln x$.

5/2− خواص اللوغاريتمات (Properties of Logarithms)

من الخواص الهامة للدوال اللوغارتمية

إذا كانت a, x, y جميعها أعداد حقيقية موجبة بحيث $(a \neq 1)$ فإن

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^p) = p\log_a x$
- $x = y \quad \Leftrightarrow \; \log_a x = \log_a y$

مثال(*14*)

أستخدم خواص اللوغاريتمات لكتابة التعبيرات الآتية بشكل موسع، مع فرض أن جميع المتغيرات تكون أعداد حقيقية موجبة ثم عين التعبيرات الآتية إن أمكن

(أ) $\log_6\left(\frac{xy}{z}\right)$ (ب) $\log_5(xy^2)$

(ج) $\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$ (د) $\ln\left(\frac{e\sqrt{y}}{z^3}\right)$

الحل

(أ)
$$\log_6\left(\frac{xy}{z}\right) = \log_6 x + \log_6 y - \log_6 z$$

(ب)
$$\log_5(x^{-5}y^3) = \log_5 x^{-5} + \log_5 y^3$$
$$= -5\log_5 x + 3\log_5 y$$

(ج)
$$\log_2\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)\right) = \log_2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{3}\left(\log_2 x - \log_2 y\right)$$

(د)
$$\ln\left(\frac{e\sqrt{y}}{z^5}\right) = \ln\left(e\sqrt{y}\right) - \ln z^5$$
$$= \ln e + \ln\sqrt{y} - 5\ln z$$
$$= \ln e + \ln y^{1/2} - 5\ln z$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\ln y - 5\ln z$$

لاحظ أننا يمكنا أن نستخدم خواص اللوغاريتمات لعمل تكثيف للتعبيرات التي تحتوي علي جمع وطرح اللوغاريتمات لنحصل علي لوغاريتم واحد، فمثلا $\log_5 X + \log_5 Y$ يمكنا أعادة كتابتها علي الصورة $\log_5[XY]$. الآن سوف نعرف طريقة كيفية تغيير الأساس حيث تمكنا هذه الطريقة من استخدام اللوغاريتمات لأي أساس والحصول علي نفس النتائج.

<u>صيغة تغير الأساس</u> (Change- of-Base Formula)

إذا كانت x, a, b جميعها أعداد حقيقية موجبة بحيث $a \neq 1, b \neq 1$ فإن

$$\log_b x = \frac{\log_{\mathrm{a}} x}{\log_{\mathrm{a}} b}$$

ولأن معظم الآلات الحاسبة تستخدم فقط اللوغاريتم المشتركة (أي إذا كان الأساس $b = 10$) أو اللوغاريتم الطبيعي (أي إذا كان الأساس $b = e$) لذلك غالبا ما نستخدم صيغة التغيير الآتية:

إذا كانت x, b أعداد حقيقية موجبة بحيث $b \neq 1$ فإن

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

<u>مثال(*15*)</u>

أوجد قيمة اللوغاريتمات الآتية

(أ) $\log_3 100$ (ب) $\log_{12} 500$

الحل

(أ) $\log_3 100 = \frac{\ln 100}{\ln 3} \approx 4.18180$

(ب) $\log_4 500 = \frac{\ln 500}{\ln 4} \approx 4.4828$

<u>3− المعادلات الأسية واللوغاريتمية:</u>

<u>(Exponential and Logarithmic Equations)</u>

سوف نقدم في هذا الجزء كيفية حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية من خلال بعض الأمثلة.

<u>مثال(16)</u>

أوجد حل المعادلة $3^x = 112$

الحل

حيث أن العدد 112 لا يمكن كتابته علي صورة قوى للعدد 3 لذلك سوف نأخذ لوغاريتم الطرفين للاساس 10 للمعادلة

$$3^x = 112$$
$$\log(3^x) = \log 112$$
$$x \log 3 = \log 112$$
$$x = \frac{\log 112}{\log 3} \approx 4.295$$

ويمكن أيضا حل المثال بأخذ اللوغارتم للاساس الطبيعي كما يلي:

$$\ln(3^x) = \ln 112$$
$$x \ln 3 = \ln 112$$
$$x = \frac{\ln 112}{\ln 3} \approx 4.295$$

مثال(17)

أوجد حل المعادلة $\log(3x + 2) = 1$

الحل

$$\log(3x + 2) = 1$$
$$3x + 2 = 10$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

مثال(*18*)

أوجد حل المعادلة $\log(3x - 5)^2 = 4$

الحل

$$\log(3x - 5)^2 = 4$$
$$2\log(3x - 5) = 4$$
$$\log(3x - 5) = 2$$
$$3x - 5 = 100$$
$$3x = 105$$
$$x = \frac{105}{3} = 35$$

مثال(*19*)

أوجد حل المعادلة $\log(2+x)-\log(x+3)=1$

الحل

$$\log(2+x)-\log(x+3)=1$$
$$\log\frac{2+x}{(x+3)}=1$$
$$\frac{2+x}{\mathrm{x+3}}=10$$
$$2+x=10x+30$$
$$9x=-28$$
$$x=-\frac{28}{9}$$

مثال(*20*)

أوجد حل المعادلة $\log_2(3x+2)=3$

الحل

$$\log_2(3x+2)=3$$
$$3x+2=2^3$$
$$3x+2=8$$
$$x=\frac{6}{3}=2$$

مثال(*21*)

أوجد حل المعادلة $\log_3(3x-5)^2=6$

الحل

$$\log_3(3x-5)^2=6$$
$$2\log_3(3x-5)=6$$
$$\log_3(3x-5)=3$$
$$3x-5=3^3$$
$$3x=27+5$$
$$x=\frac{32}{3}$$

تمارين

في مجموعة التمارين من 1 إلي 6 عين الدوال الأسية الآتية عند قيم x.

1. $f(x) = 3^x; \quad x = 0, 1$
2. $f(x) = 7^x; \quad x = 3, -2$
3. $f(x) = 5^x; \quad x = -2, 3$
4. $f(x) = 10^x; \quad x = -1, 0$
5. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad x = -1, 2$
6. $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x; \quad x = 4, -2$

في مجموعة التمارين من 7 إلي 10 أرسم الدوال الأسية الآتية وعين مجال ومدي الدالة

7. $f(x) = 3^x$
8. $f(x) = 2^x$
9. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
10. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

في مجموعة التمارين من 11 إلي 18 أكتب كل معادلة مما يأتي علي الشكل الأسي:

11. $3 = \log_4 64$
12. $\log_2 64 = 6$
13. $3 = \log 1000$
14. $\log 10000 = 4$
15. $3 = \ln e^3$
16. $log\, 1 = 0$
17. $5 = \log_2(2x + 3)$
18. $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

في مجموعة التمارين من 19 إلي 26 أكتب كل معادلة مما يأتي علي الشكل للوغاريتمي:

19. $7^2 = 49$
20. $5^{-3} = \frac{1}{125}$
21. $a^x = \mathrm{y}$
22. $3^x = y$
23. $e^y = \mathrm{x}$
24. $10^2 = 100$
25. $10^{-3} = 1/1000$
26. $4^0 = 1$

في مجموعة التمارين من 27 إلي 30 أرسم الدوال اللوغاريتمية الآتية:

27. $f(x) = \log_2 x$
28. $f(x) = \log_3 x$
29. $f(x) = \log_{1/2} x$
30. $f(x) = \log_{1/3} x$

في مجموعة التمارين من 31 إلي 36 أوجد نطاق دوال اللوغاريتمية الآتية:

31. $f(x) = \log_2(x - 11)$
32. $f(x) = \log_3(x^2 + 6)$
33. $f(x) = \log_3|x - 2|$
34. $f(x) = \log_2|x + 5|$
35. $f(x) = \log_6(x) + 7$
36. $f(x) = \ln(x - 6)$

في مجموعة التمارين من 37 إلي 46 أوجد حل المعادلات الآتية:

37. $3^{x+1} = 81$
38. $5^{x-1} = 125$
39. $3^x = \frac{1}{243}$
40. $6^x = 70$
41. $\log(2x + 5) = 2$
42. $\log 10x - \log(x - 2) = 2$

43. $2^{2x+1} = 64$

44. $5^{x-1} = 1$

45. $\log_2(5x - 15) = 3$

46. $\log(8x - 44) = 2$