« الوحدة الرابعة: نهاية متتاليات »

حالات عدم التعيين و إزالتها في المتتاليات:

1) لإزالة حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$:

- نخرج حد أكبر أس من البسط و المقام عامل مشترك
- في الجذور التربيعية:
  - نخرج n^2 كعامل مشترك من مضمون الجذر
  - نجذر n^2 و بما أن n عدد موجب فجذر n^2 هو n
  - نخرج n كعامل مشترك من البسط و المقام و نختصرها.

2) لإزالة حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$:

نميز حالتين:

1- إذا كان لدينا حالة تساوي في الأمثال وفي الأس نقوم بما يلي:
- نضرب بمرافق المقدار الجذري ونقسم عليه
- نختصر ما أمكن فيزال عدم التعيين

2- في حال عدم تساوي الأمثال أو الأس نقوم بما يلي:
- نخرج n^2 من مضمون الجذر التربيعي
- نجذر n^2 و بما أن n عدد موجب فجذر n^2 هو n
- نخرج n من جميع الحدود

3) حالة عدم تعيين من الشكل $\infty.0$:

حالة نادرة وقليلة وهي تزال عن طريق الضرب بالمرافق

4) حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

لا نصادف هذه الحالة أبداً في نهاية المتتاليات وإنما فقط في التوابع وهي تزال عن طريق الضرب بالمرافق إذا كان لدينا جذوراً أو عن طريق التحليل إلى جداء أقواس والاختصار إذا كان لدينا كثيرات حدود.

نهاية متتالية هندسية:

ليكن q عدد حقيقي:
- إذا كان $-1<q<1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$
- إذا كان $q>1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- إذا كان $q\leqslant -1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ غير موجودة
- إذا كان $q=1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$

مبرهنة الإحاطة:

نستخدم الإحاطة في إيجاد نهاية متتاليات تحوي حدوداً زاوية غير موجودة مثل $\sin n$ أو $\cos n$ أو $(-1)^n$ عندما $n\longrightarrow+\infty$ عندئذ نستفيد من المتراجحات:

$-1\leqslant \sin n\leqslant 1$ $\quad$ $-1\leqslant \cos n\leqslant 1$ $\quad$ $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$

تقارب المتتاليات المطردة:

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant0}$ محدودة من الأعلى إذا:
- وجد عدد حقيقي M يحقق العلاقة $u_n\leqslant M$ أياً كان $n\in\mathbb{N}$
- نسمي M عنصراً راجحاً على المتتالية u_n

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\geqslant0}$ محدودة من الأدنى إذا:
- وجد عدد حقيقي m يحقق العلاقة $u_n\geqslant m$ أياً كان $n\in\mathbb{N}$
- نسمي m عنصراً قاصراً على المتتالية u_n

نقول أن المتتالية u_n محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى

- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى نهايتها $+\infty$.
- كل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى نهايتها $-\infty$.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة.
- كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة.

المتتاليات المتجاورة:

نقول عن متتاليتين s_n و t_n أنهما متجاورتان إذا تحقق الشرطين:
- إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$