الدرس 5

حل المعادلات المثلثية

SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATION


Welcome

لماذا ؟

عند ركوبك عجلة دوّارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$$

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع ٣١ mعن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية :

درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل المعادلات المثلثية التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

مثال 1

حل المعادلات علي فترة معطاة

حل المعادلة $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 < \theta < 180°$،

$$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$$ المعادلة الأصلية

$$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$$ بالتحليل

$$\cos\theta = 0$$ أو $$\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$$ خاصية الضرب الصفري

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

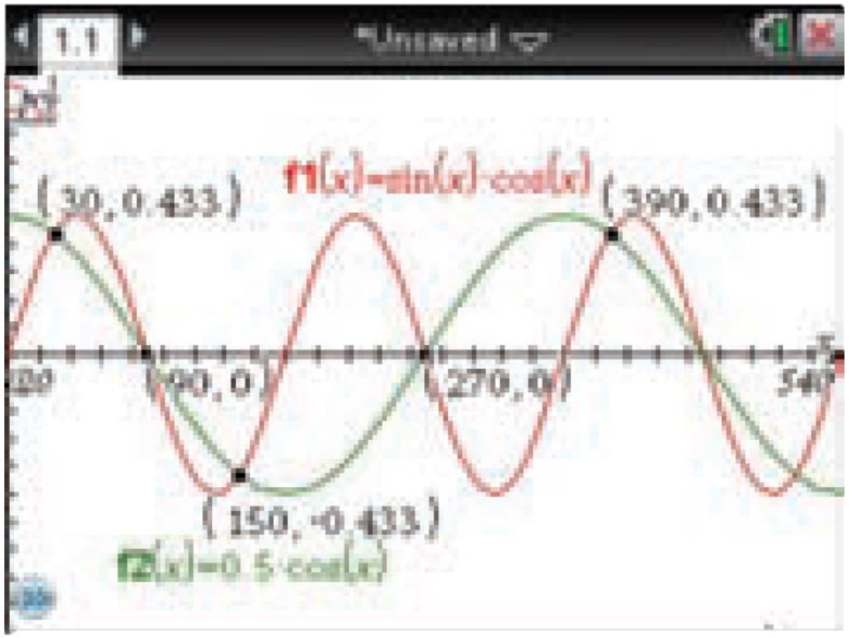
$0 = 90°$ أو $270°$

$0 = 30°$ أو $150°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$

التحقق :

يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكل من : $y = \sin\theta\cos\theta, y = \frac{1}{2}\cos\theta$



على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين 0o و 180o فقط.

تحقق من فهمك

1A) حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

1B) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ لا يوجد حل

تحل المعادلات المثلثية عادة لقيم المتغير بين 0 و 360 أو بين $2\pi, 0\,rad$ **، كما توجد حلول أخري تقع خارج الفترات المحددة ، و لذلك ، فالحلول تختلف باختلاف الفترات**

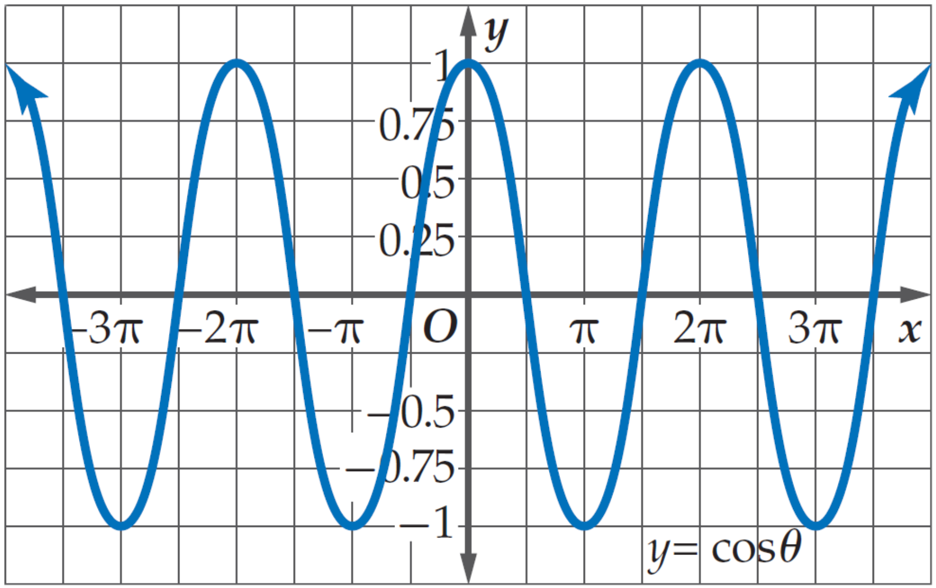
مثال 2

معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حل المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم $\boldsymbol{\theta}$ جميعها ، إذا كان قياس $\boldsymbol{\theta}$ بالراديان .

$$\cos\theta + 1 = 0$$

$$\cos\theta = 1$$



استعن بالتمثيل البياني لمنحني $y = \cos\theta$

؛ لايجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$

الحلول هي ... $\pi, 3\pi, 5\pi$

و كذلك ...... $-\pi, -3\pi, -5\pi$

والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π

لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\,\pi$

حيث k أيّ عدد صحيح.

تحقق من فهمك

2A) حُلّ المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

حيث k أي عدد صحيح

2B) حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

مثال 3 من واقع الحياة

مدينة ألعاب : ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى ؟

$$h = 21 - 20\cos 3\pi t$$ المعادلة الأصلية

$$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$$ بتعويض 31 بدلاً من h

$$10 = -20\cos 3\pi t$$ بطرح 21 من كلاً الطرفين

$$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$$ بقسمة كلا الطرفين على -20

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$$ بأخذ معكوس جيب التمام

بما إن $\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ إذن :

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$$

أو

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$$

K أي عدد صحيح

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$$

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$$

بقسمة كلا الطرفين 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون k = 0 في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$

لذلك ، $t = \frac{2}{9}$ ، وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة

تحقق من فهمك

1) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك **41** مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

20 ثانية تقريباً .

حلول داخيلة :

بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل ، لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة [1 , 1-]. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية ،

مثال 4

حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حل المعادلة $\sin\theta = 1+\cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta \le 360°$

$$\sin\theta = 1+\cos\theta$$ المعادلة الأصلية

$$\sin^2\theta = (1+\cos\theta)^2$$ بالتربيع

$$1-\cos\theta = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta$$ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$$ بطرح $(1-\cos^2\theta)$ من كلا الطرفين

$$0 = 2\cos\theta(1+\cos\theta)$$ بالتحليل

$1+\cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ $\theta = 90°, 270°$

التحقق :

$$\sin\theta = 1+\cos\theta$$

$$\sin 180^\circ \overset{?}{=} 1+\cos 180^\circ$$

$$0 \overset{?}{=} 1+(-1)$$

$$0 = 0 \quad ✓$$

$$\sin\theta = 1+\cos\theta$$

$$\sin 90^\circ \overset{?}{=} 1+\cos 90^\circ$$

$$01 \overset{?}{=} 1+$$

$$1 = 1 \quad ✓$$

$$\sin\theta = 1+\cos\theta$$

$$\sin 270^\circ \overset{?}{=} 1+\cos 270^\circ$$

$$-1 \overset{?}{=} 1+0$$

$$-1 \neq 1 \quad ✗$$

إذن 270° حلاً دخيلاً

إذن المعادلة حلان هما $90^\circ, 180^\circ$

تحقق من فهمك

(4 $\cos^2\theta + 3 = -\sin^2\theta$

متطابقة ؛ لها عدد لا نهائي من الحلول ؛ لأن جميع قيم θ تمثل حلولاً لها .

إذا لم تتمكن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية، وقد يقودنا استعمال المتطابقات، وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلاً إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 5

حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حل المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات .

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$1-\cos\theta = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta$ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$2\left(1+\tan^2\theta\right)-\tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ بجعل أحد الطرفين مساوياً للصفر

$\left(\tan^2\theta - 3\right)\left(\tan^2\theta + 1\right) = 0$ بالتحليل

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\tan^2\theta = -1$ $\tan^2\theta = 3$

لا يوجد لهذا الجزء حلول ؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن تكون سالباً . $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا تكون الحلول هي $60^\circ + 180^\circ, -60^\circ + 180^\circ k$

تحقق من نفسك

حل المعادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات .

(5A $\sin\theta\cot\theta-\cos^2\theta=0$

$$90^\circ+k\bullet 180^\circ$$

(5B $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}+2\sin^2\theta=0$

$$\frac{7\pi}{6}+2k\bullet\pi$$

$$\frac{11\pi}{6}+2k\bullet\pi$$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها :

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0\,;\, 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ $\quad 180^\circ$

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1\,;\, 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ $\quad 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

3) $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta\,;\, 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ $\quad 30^\circ, 150^\circ$

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\,;\, 0^\circ \le \theta \le 240^\circ$ $\quad 0^\circ, 90^\circ, 360^\circ$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان:

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$ $\quad \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

6) $2\cos^2\theta = 1$ $\quad \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$ $\quad 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$ $\quad \pi + 2k\pi$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0$

$90° + k \cdot 180°$

10) $\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$

$k \cdot 180°, 90° + k \cdot 360°$

11) $2 \sin^2 \theta - 1 = 0$

$45° + k \cdot 90°$

12) $\cos \theta - 2\cos \theta \sin \theta = 0$

$30° + k \cdot 360°$

$150° + k \cdot 360°$

$90° + k \cdot 180°$

13) الليل والنهار: إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365} t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: **(مثال 3)**

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات، ويكون ذلك بعد 213، أو 335 يومًا بعد يوم 21 مارس. وهذا يعني أنه في يوم 20 أكتوبر أو 19 فبراير. ستكون عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات.

b) باستعمال النتيجة في الفرع **a**، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسِّر إجابتك.

كل يوم منذ 19 فبراير إلى 20 أكتوبر.
تفسير ممكن: بما أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو، لذا فإن الأيام بين 19 فبراير إلى 20 أكتوبر يتزايد طول نهارها حتى يوم 22 يونيو، ثم تبدأ ساعات النهار بالنقصان حتى 20 أكتوبر.

حل كل معادلة مما يأتي:

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ

$\frac{\pi}{2} + \pi k$

15) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ لجميع قيم θ

$\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

16) $\tan \theta = 1$ لجميع قيم θ

$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

17) $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0° \leq \theta \leq 360°$

$60°, 120°, 240°, 300°$

18) $2\sin^2 \theta = 1; 90° < \theta < 270°$

$135°, 225°$

19) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

20) $4\sin^2 \theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

$210°, 330°$

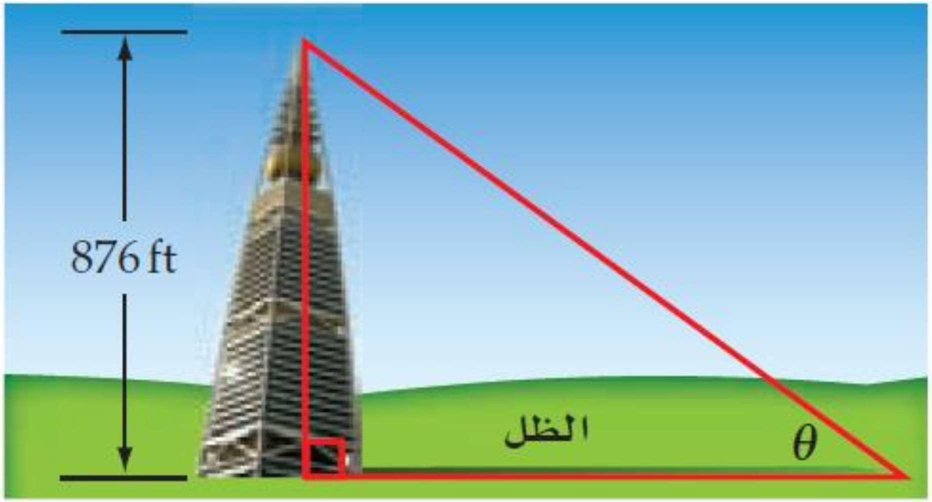
21) $\tan \theta - \sin \theta = 0$ لجميع قيم θ

$k \cdot 180°$

22) $4\sin^2 \theta = 4\sin \theta - 1$ لجميع قيم θ

$30° + k \cdot 360°, 150° + k \cdot 360°$

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft .
أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



21

24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$ ، عمق نهر
خلال أحد الأيام ، حيث $x = 0, 1, 2, \dots, 24$ ، 0 تدل على
الساعة الثانية عشر منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد
الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟ $11m$

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

$7:00\ am$

$7:00\ pm$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2 \sin \theta + 2 = 0$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

26) $2 \sin^2 \theta + \left(\sqrt{2} - 1\right) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$
$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$

27) $2 \sin \theta = \sin 2\theta$

πk

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

$30° + 360°k, 150° + 360°k,$
$330° + 360°k$

29) $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$

$120° + 360°k, 240° + 360°k$

30) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ،
حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء،
و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية
السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42 ، ومعامل الانكسار للهواء
1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو $35°$ ، فما
قياس زاوية الانكسار؟

$13.71°$

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛
لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أو لا.

بقياس زوايا سقوط الضوء
وانعكاساتها لتحديد معامل انكسار
الضوء، فإذا كان معامل الانكسار 2.42
يكون ماسًا نقيًّا.