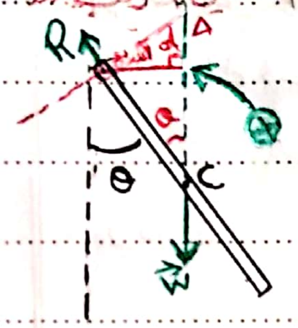
السؤال ١: أثبت أن حركة ... / /

النواس الثقلي المركب



• العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$\sum \Gamma_\Delta = I_\Delta \cdot \alpha$

مجموع العزوم — عزم العطالة — تسارع زاوي

$\Gamma_{\vec R/\Delta} + \Gamma_{\vec W/\Delta} = I_\Delta \cdot \alpha$

لأن حامل $\vec R$ يلاقي محور الدوران

$-d' \cdot W = I_\Delta \cdot \alpha$

لأن $\vec W$ تدور عكس جهة دوران عقارب الساعة

$\sin\theta = \frac{d'}{oc}$

$d' = oc \sin\theta$

$-(oc \sin\theta) \cdot W = I_\Delta \cdot \alpha$

$-(d \sin\theta) \, mg = I_\Delta \cdot \alpha$

$-mg \, d \sin\theta = I_\Delta \cdot \alpha$

$-m g \, d \sin\theta = I_\Delta (\theta)''_t \qquad \alpha = (\theta)''_t$

$(\theta)''_t = \frac{-m g d \sin\theta}{I_\Delta}$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا تقبل حلاً جيبياً لوجود $\sin\theta$ بدلاً من θ

ومن أجل السعات الصغيرة:

زاوية صغيرة $\left\{\begin{array}{l} \theta \le 0.24 \text{ rad} \\ \theta \le 14^\circ \end{array}\right\} \sin\theta = \theta$

$(\theta)''_t = \frac{-m g d}{I_\Delta} \cdot \theta \quad ...(1)$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن:

$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \quad ...(2)$

بالمساواة بين (1) و (2) نجد:

$-\omega_0^2 \cdot \theta = \frac{-m g d \theta}{I_\Delta}$

$\omega_0^2 = \frac{m g d}{I_\Delta}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g d}{I_\Delta}} > 0$

حركة النواس جيبية دورانية بشرط $m.g.d.I_\Delta$ موجبة

• استنتاج الدور الخاص:

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m g d}{I_\Delta}}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$

$T_0 \to s$ ، $I_\Delta \to kg.m^2$ ، $m \to kg$ ، $g \to m/s^2$ ، $d \to m$ (o.c.m)

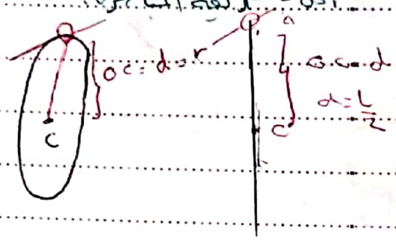
• الدور لحالة السعات الكبيرة $\theta > 0.24$ زاوية كبيرة $\theta > 14$

$T_0' = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

سعات كبيرة — سعات صغيرة

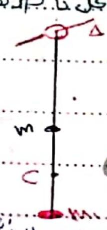
ملاحظة (d):

الحل بالطريقة المباشرة:



الحل بالطريقة الغير مباشرة:

(يوجد كتل نقطية)

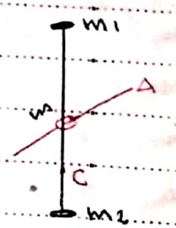


$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

فوق محور الدوران (+)
تحت محور الدوران (−)

r حملة
مجموع الكتل المكونة للنواس

$$d = \frac{m\,r + m_1 r'}{m_{ساق} + m_{1\,نقطية}}$$



$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{m_{ساق} r - m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_{ساق} + m_1 + m_2}$$

ملاحظة (IΔ):

كتلة نقطية

$I_{\Delta/m} = m\,r^2$ بعدها (r≠0)

IΔ

Δ يمر من c — Δ لا يمر من c

يوجد كل نقطية — هايجنز

$$I_{\Delta\,هايجنز} = I_{\Delta/c} + m d^2_{oc}$$

$$I_{\Delta} = I_{\Delta} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

حملة — نقطية — نقطية

$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$

$I_{\Delta/m} = m r^2$

$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$ قرص

(محور يمر من المادة)

مهملة

معطى $I_{\Delta/c}$

هايجنز (لا يمر من c ولكن يوجد كل نقطية)

ملاحظة:

الحسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس الثقلي المركب

$$T_{0\,بسيط} = T_{0\,مركب}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = رقم$$

مثال $T_0 = 2\,sec$

$T_{0\,بسيط} = T_{0\,مركب}$

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{L} = 1 \Rightarrow L = 1\,m$$

ملاحظات كل صانك النواس الثقلي المركب

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$$ السعات الصغيرة

$$T_0' = T_0\left[1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right]$$

السعات الكبيرة

سعات صغيرة $\theta \le 14°$ أو $\theta \le 0.24\,rad$

سعات كبيرة $\theta > 14°$ أو $\theta > 0.24\,rad$

زوايا الحجوم سعات كبيرة $\theta = 90° - 60° - 30°$

عندما يعطى بعض الأرقام $\theta_{max} = 4\,rad$

سعات كبيرة $\frac{40}{100} > \frac{24}{100}$

$$T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

أقمع

$g' < g \Rightarrow T_0' > T_0$

المبتدية تؤخر

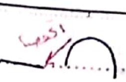
السؤال:

فسر علمياً باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة لساعة التي تؤخر عند نقل النواس الثقلي المركب من سطح البحر إلى قمة جبل

عند نقل النواس من سطح البحر إلى قمة جبل

$g' < g$ لأن الجاذبية ⇐

$T_0' > T_0$



سطح الجواب بحث

ملاحظة:

$\pi^2 = 10$

$g = 10 \quad \pi^2 = g = 10$

$\pi = \sqrt{10} = \sqrt{g} \qquad \frac{\pi^2}{g} \quad \frac{\pi}{\sqrt{g}}$

بعد تعويض قيمتها

ملاحظة:

إن حركة النواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة هي جيبية دورانية

تابعها:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

تزيح زاوية ... ترك له دون سرعة

$\Rightarrow \theta = \theta_{max}$ الابتدائية

تابع السرعة الزاوية:

$$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

السرعة العظمى طويلة

$$\omega_{max} = \omega_0 \theta_{max}$$

ملاحظة (m):

نقطة m1 m m3 حملة

$m_{كلية} = m_{ساق} + m_1 + m_2 + m_3$

$I_{\Delta/c} = 0$ لساق حملة الكتلة $m_{ساق} = 0$

$I_{\Delta/c} = 0$ قرص $m_{قرص} = 0$ مهمل الكتلة

$= \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{12} mL^2$

$I_\Delta = \frac{4}{12} mL^2 = \frac{1}{3} mL^2$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2}{m \cdot g \frac{L}{2}}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$T_0 = 2s$

$T_0 = 2s \quad L = ?$

$2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}$

$l = \frac{2}{3} L$

$L = \frac{3}{2} m$

ملاحظات في المثال

بالنسبة لمحور الدوران لمركز عطالة الجملة

$\tau_c = W \cdot r$

$\tau_c = W \cdot d$

للكتلة النقطية الاولى

$\tau_{m_1} = W \cdot r$

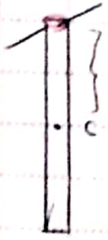
$\tau_{m_1} = W \frac{L}{2}$

للكتلة النقطية الثانية

$\tau_{m_2} = W \cdot r$

$\tau_{m_2} = W \cdot l$

تطبيقات على المثال



$OC = d = \frac{L}{2}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$I_\Delta = I_{\Delta/C} + m \cdot d^2$

$\frac{1}{12} m L^2 + m \frac{L^2}{4}$

الوضع الثاني - لحظة المرور بالشاقول

$\theta = 0$

$\Delta E_k = \Sigma W_F$

$E_k - \cancel{E_{k_0}} = W_P + W_R$

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m \cdot g \cdot h$

$\theta_{max} \leftarrow \omega ?$

$\omega^2 = \frac{m \cdot g h}{\frac{1}{2} I_\Delta}$

$\omega = \sqrt{\frac{2 m g d [1 - \cos\theta]}{I_\Delta}}$

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m \cdot g \cdot h$

m, d, I_Δ معلومات

الدور

ω ← $\theta_{max} ?$

نعوض

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m \cdot g \cdot d [1 - \cos\theta_{max}]$

$\frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{m \cdot g \cdot d} = [1 - \cos\theta_{max}]$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{m g d}$

I_Δ, m, d معلومات

ملاحظة

- في حالة الزاوية الصغيرة
- نستنتج الشاقول
- θ_{max} تؤكد أن...

A) استنتج السرعة الزاوية لحظة المرور بالشاقول لـ θ_{max}

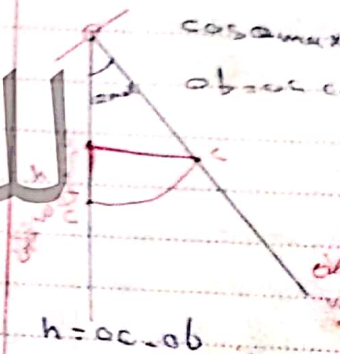
$\omega ?$

B) استنتج قيمة الزاوية θ_{max}

ω ← $\theta_{max} ?$

$\cos\theta_{max} = \frac{ob}{oc}$

$ob = oc \cos\theta_{max}$



$h = oc - ob$

$h = oc - oc \cos\theta_{max}$

$h = \cancel{oc}^{\,d} [1 - \cos\theta_{max}]$

$h = d [1 - \cos\theta_{max}]$

الحل

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

الوضع الأول: لحظة تركه دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

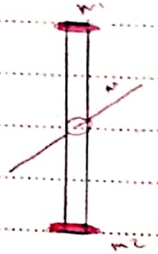
/ /

$I_\Delta = \frac{4}{12} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$ للجسم

$I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + m' L^2$ للجملة

I_{Δ} = رقم $kg\,m^2$

بحسب علاقة المحور



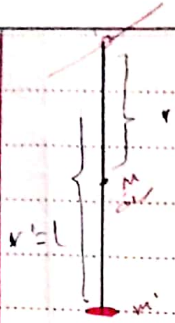
حساب T_0

كتلة الجملة

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$m_{جملة} = m + m_1 + m_2$

$m_{جملة}$ = رقم kg



حساب T_0:

$r = \frac{L}{2}$

$r' = L$

ساق M + كتلة نقطية m'

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$m_{جملة} = m'_{نقطية} + M_{ساق}$

m = رقم kg

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \rightarrow (m, 0)$

$= \frac{Mr + m'r'}{m' + M}$

$= \frac{M \frac{L}{2} + m' L}{m' + M}$

d = رقم m

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m}$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + Md^2$

$= \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{L^2}{4}$

/ /

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$m_{جملة} = m'_{نقطية} + M_{ساق}$

$m_{جملة} = 2M$

$I_\Delta = \frac{1}{12} ML^2 + m' \frac{L^2}{4}$

$= \frac{4}{12} ML^2$

$I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2$

بعد (m, o)

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$d = \frac{Mr + m'r'}{m' + M}$

$d = \frac{m' \frac{L}{2}}{2M}$

$d = \frac{L}{4}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ML^2}{2M \cdot g \cdot \frac{L}{4}}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{3} L}{g}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$m_{جملة} = m'_{نقطية} + M_{ساق}$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$

$= \frac{1}{12} ML^2 + m' r^2$

$I_\Delta = \frac{1}{12} ML^2 + m' \frac{L^2}{4}$

I_Δ = رقم $kg\,m^2$

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \rightarrow (m, o)$

$d = \frac{Mr + m'r'}{m' + M}$

$d = \frac{m' \frac{L}{2}}{m' + M}$

d = رقم m

ساق M + كتلة نقطية m' حالة خاصة

$m'_{نقطية} = M_{ساق}$ كيفية

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$ $(m_i \neq 0)$

$= \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

$d =$ رقم m

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$I_\Delta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 \frac{L^2}{4}$

$= (m_1 + m_2)\frac{L^2}{4}$

$I_\Delta =$ رقم $kg\,m^2$

كتلتين نقطيتين + ساق مهملة الكتلة

$I_{\Delta/c} = 0$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$

$\sum m = m_1 + m_2$

$\sum m =$ رقم kg

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$ $(m_i \neq 0)$

$d = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

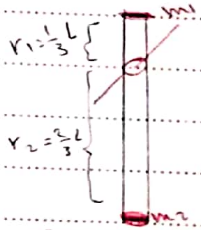
$d =$ رقم m

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 L^2$

$I_\Delta =$ رقم kg



$I_{\Delta/c} = 0$ $m = 0$

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$= \frac{-m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

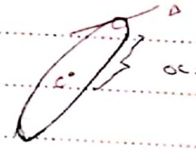
$d =$ رقم m

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{1}{9} L^2 + m_2 \frac{4}{9} L^2$

$I_\Delta =$ رقم $kg.m^2$



$oc = d = r$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$

$= \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$

$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{m\,g\,r}}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} r}{g}}$

مثال

$r = \frac{1}{6}\,m$ $T_0 = ?$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} \times 16}$

$T_0 = 2 \times \frac{1}{2}$

$T_0 = 1s$

$T_0 = 1s$ $r = ?$

$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} r}{g}}$

$1 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2} r . 16}$

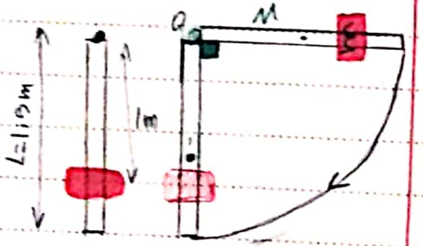
$1 = 4 \cdot \frac{3}{2} r$

$1 = 2 . 3r$

$r = \frac{1}{6}\,m$

المسألة الأولى

تتألف نواس ثقالي مركب من ساق شاقولية متجانسة، كتلتها $M = 0.5\,kg$ وطولها $L = 1.2\,m$ يمكنها أن تدور حول محور أفقي مار من طرفها العلوي، ونثبت على الساق نقطية $m' = 0.5\,kg$ على بعد $1\,m$ من هذا الطرف كما في الشكل المجاور.



المطلوب:

1. احسب دور هذا النواس في حال السعات الزاوية الصغيرة.

2. نزيح جملة النواس عن موضع توازنها الشاقولي زاوية $\frac{\pi}{2}\,rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، احسب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول، ثم احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m' عندئذ.

3. تم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $(I_{O/c} = \frac{1}{12} M L^2)$

حل المطلوب

نزيح النواس:

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الوضع الأول لحظة تركه دون سرعة ابتدائية

$\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني لحظة المرور بالشاقول

$\theta = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_F$$

$$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{R}} + W_{\vec{w}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m\,g\,h$$

ملاحظة الطاقة:

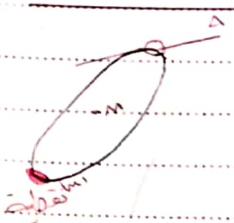
$$E = \underset{\text{حركية}}{E_k} + \underset{\text{كامنة ثقالية}}{E_p}$$

$$= \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 + m\,g\,h$$

$$h = d\,[1 - \cos\theta_0]$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} M r^2}{2M\,g\,\frac{r}{2}}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} r}{g}}$$



$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$$

$m = M + m'$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{M r + m' r'}{M + m'} \quad (r' = 2r)$$

$d =$ رقم m

$$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_\Delta/m'$$

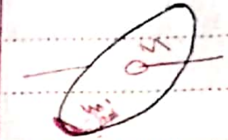
$$I_{\Delta/c} = I_{\Delta/c} + M d^2$$

$$= \frac{1}{2} M r^2 + M r^2$$

$$I_\Delta = \frac{3}{2} M r^2$$

$$I_\Delta = \frac{3}{2} M r^2 + m'(4r^2)$$

$$= \frac{3}{2} M r^2 + 4 m' r^2$$



$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m\,g\,d}}$$

$m_{جملة} = \underset{قرص}{M} + \underset{نقطية}{m'}$

$m_{جملة} = \dots\,kg$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{M r + m' r'}{M + m'}$$

$$= \frac{m' r}{M + m'} = \text{رقم } m$$

$$\underset{جملة}{I_\Delta} = \underset{قرص}{I_{\Delta/c}} + I_{\Delta/m'}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} M r^2 + m' r^2$$

حالة خاصة:

$\underset{قرص}{M} = \underset{نقطية}{m'}$

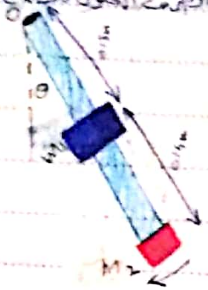
$m_{جملة} = 2M$

$d = \frac{r}{2}$

$$\underset{جملة}{I_\Delta} = \frac{3}{2} M r^2$$

المسألة الرابعة

ساق متجانسة مهملة الكتلة طولها $L = 1m$ تثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 0.4\,Kg$ وتثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 0.2\,Kg$ لتؤلف الجملة نواساً ثقيلاً مركباً يمكنه أن يهتز في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي للساق.



المطلوب:

1. احسب دور نواسها ضمن السعة.
2. نزيح الجملة عن موضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} > 0.24\,rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية، فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية لحظة مرورها بالشاقول $2e = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$، والمطلوب:
   a. احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2
   b. استنتج قيمة الزاوية θ_{max}

$4\pi \quad 12.5 \quad \pi^2 = 10$

$m = 0.5\,Kg = \frac{1}{2}\,Kg$

$L = 1.5m = \frac{3}{2}\,m$

$m = 0.5\,Kg = \frac{1}{2}\,Kg$

$r = 1m$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}} \quad .1$$

$M + M'$

$m = 1\,Kg$

$I_\Delta = I_{\Delta} + I_{\Delta}$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + M\,d^2$

$= \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{L^2}{4}$

$= \frac{1}{12} ML^2 + \frac{3}{12} ML^2$

$= \frac{4}{12} ML^2$

$I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2$

$I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + m' r'^2$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}$

$I_\Delta = \frac{7}{8}\,Kg.m^2$

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{M r + m' r'}{M + m'}$$

$= \frac{7}{8}\,m$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1 \cdot 10 \cdot \frac{7}{8}}}$$

$T_0 = 2\,s$

.2 $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad$

الوضع الأول: لحظة الترك دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$\Delta E_k = \sum W_{F_{1\to 2}}$

$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{B}} + W_{\vec{R}}$

$E_k = m g h$

$E_k = m g d (1 - \cos\theta_{max})$

$E_k = 1 \cdot 10 \cdot \frac{7}{8}\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)$

$E_k = \frac{70}{8}\,J$

$\upsilon = ?$

$\upsilon = \omega . r'$

$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{E_k}{\frac{1}{2} I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{70}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}}}$$

$\omega = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,rad.s^{-1}$

$\upsilon = 2\sqrt{5} \cdot 1$

$\upsilon = 2\sqrt{5}\,m.s^{-1}$

Farah Notebook

Farah Notebook

$L = 1\,m$ ..... $v_c = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$

كتلة الساق $M = 0$

$m_1 = \frac{4}{10}\,kg$

$m_2 = \frac{2}{10}\,kg$

1) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

$m = M + m_1 + m_2$

$= 0 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10}$

$m = \frac{6}{10}\,kg$

$d = \frac{\sum m_i . r_i}{\sum m_i}$

$= \frac{m_1 . r_1 + m_2 r_2}{m}$

$= \frac{m_1 . \frac{L}{2} + m_2 . L}{m}$

$= \frac{\frac{4}{10} . \frac{1}{2} + \frac{2}{10} . 1}{\frac{6}{10}}$

$= \frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} \Rightarrow d = \frac{2}{3}\,m$

$I_\Delta = I_{\Delta/M} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 L^2$

$= \frac{4}{10}\frac{L^2}{4} + \frac{2}{10} L^2$

$= \frac{1}{10} . 1 + \frac{2}{10} . 1$

$= \frac{3}{10}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10} . 10 . \frac{2}{3}}}$

$T_0 = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$T_0 = 2\frac{\sqrt{3}}{2}$

$T_0 = \sqrt{3}\,s$

2) v_{m_2}

سرعة خطية = سرعة زاوية . r

$v_{m_2} = \omega . L$

$v_c = \omega . d$

$\frac{v_{m_2}}{v_c} = \frac{\omega L}{\omega d}$

$v_{m_2} = \frac{L . v_c}{d}$

$v_{m_2} = \frac{1}{\frac{2}{3}} . \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

$v_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,m.s^{-1}$

6. نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الوضع الأول: لحظة تركها دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}\,1\to 2}$

$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{R}} + W_{\vec{w}}$

لا ينجز $\vec{R}$ عملاً لأنه يلاقي محور الدوران / لأنها تركت دون سرعة ابتدائية

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m.g.h$

$h = d[1 - \cos\theta_{max}]$

$v_c = \omega . d \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{d}$

$\frac{1}{2} I_\Delta \frac{v_c^2}{d^2} = m.g.d[1 - \cos\theta_{max}]$

$1 - \cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \frac{v_c^2}{d^2}}{m.g.d}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \frac{v_c^2}{d^2}}{m.g.d}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} . \frac{3}{10} . \frac{\frac{16\pi^2}{27}}{\frac{4}{9}}}{\frac{6}{10} . 10 . \frac{2}{3}}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} . 4}{4}$

$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$

$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad$

المسألة الخامسة:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها L، تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية m'، نعلق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلوي نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\frac{1}{2\pi}\,rad$، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بدور خاص $T_0 = 2.5\,s$

والمطلوب:

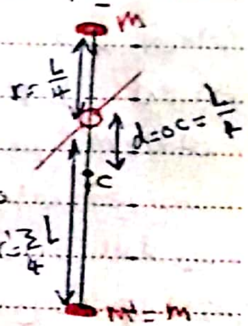
/ /

1- استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام.

2- استنتج بالرموز العلاقة المحددة لطول الساق، ثم احسب قيمته.

3- احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة (طويلة).

4- لنفرض أنه في إحدى النواسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق
- استنتج الدور الخاص الجديد للجملة في حالة السعات الزاوية الصغيرة.



ساق $m = 0$ } حملة الكتلة

$\theta = \frac{1}{2}\pi\, rad$

$t = 0$ لحظة مرور بحركة ابتدائية

$T_0 = 2.5\,s = 25 \cdot 10^{-1}\,s$ $\quad r = \frac{3}{4}L$

1- $\theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ترك الساق دون سرعة ابتدائية

$\theta = \theta_{max} = \frac{1}{2}\pi\, rad$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi \times 2}{2.5 \times 2} = \frac{4\pi}{5}\, rad \cdot s^{-1}$

تعيين φ من شروط البدء

$t = 0 \qquad \theta = \theta_{max}$

$\theta_{max} = \theta_{max} \cdot \cos\varphi$

$\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

بالتعويض

$\theta = \frac{1}{2}\pi \cdot \cos\frac{4\pi}{5}t \quad rad$

2- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$

$\Sigma m = m + m' = 2m$

$d = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$

$d = \frac{L}{4}$

$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$ حيث $I_{ساق} = 0$

$= m r^2 + m r'^2$

$= m\frac{L^2}{16} + m\frac{9L^2}{16}$

$= mL^2\left(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}\right)$

$I_\Delta = \frac{10}{16} m L^2$

/ /

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{10}{16}mL^2}{2m \cdot g\frac{L}{4}}}$

$T_0 = 2\sqrt{\frac{5}{2}L}$

$T_0^2 = 4\left(\frac{10}{8}\right)L$

$T_0^2 = \frac{10}{2}L = 5L$

$L = \frac{T_0^2}{5}$

$L = \frac{(25 \cdot 10^{-1})^2}{5}$

$= \frac{625 \cdot 10^{-2}}{5}$

$L = 125 \cdot 10^{-2}$

$L = 1.25\, m$

3- $\omega_{max} = \omega_0 \cdot \theta_{max}$

$= \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{1}{2}\pi$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{10}$ [illegible]

$\omega_{max} = 0.4\, rad \cdot s^{-1}$ [illegible]

4-

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$

$d = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$

$= \frac{m r}{m}$

$d = \frac{L}{4}$

$I_\Delta = I_{\Delta/m_1} = m r^2$

$= m\frac{L^2}{16}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\frac{L^2}{16}}{m g \frac{L}{4}}}$

$T_0 = 2\sqrt{\frac{125 \cdot 10^{-2}}{4}}$

$T_0 = 2\sqrt{5 \cdot 25 \cdot 10^{-2}}$

$T_0 = 5 \cdot 10^{-1}\sqrt{5}$

$T_0 = 0.5\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}\, s$

مسألة (4):

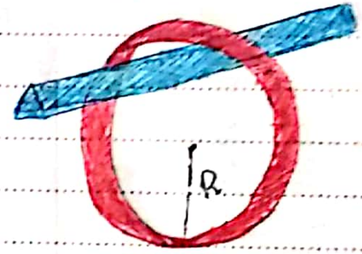
تعلق حلقة معدنية دقيقة قطرها $R = 12.5\ cm$، كتلتها $M = 0.05\ Kg$ من محور أفقي ثابت، كما هو موضح بالشكل.

المطلوب:

1. احسب الدور الخاص لاهتزازات هذا النواس من أجل السعات الزاوية الصغيرة، علماً أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها مار من مركز عطالتها:

$I_{\Delta/c} = MR^2$

2. احسب طول النواس البسيط المواقت.



$R = 12.5\ cm = 12.5 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^{-3}$

$M = 0.05\ Kg = 5 \cdot 10^{-2}\ Kg$

$I_{\Delta/c} = MR^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$ ——1

$d = 0.5 = R$

$I_{\Delta\ \text{قابل}} = I_{\Delta/c} + md^2$

$= MR^2 + MR^2$

$I_{\Delta} = 2MR^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{M g R}}$

$T_0 = 2\sqrt{2 \cdot 1.25 \cdot 10^{-3}}$

$T_0 = 10 \cdot 10^{-1} = 1s$

2. $T_0 = T_0$ بسيط ومركب

$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$2\sqrt{L} = 1$

$4L = 1$

$L = \frac{1}{4}\ m$

المسألة (5):

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها $1m$ تحمل في نهايتها العلوية كتلة نقطية $m_1 = 0.2\ Kg$ وتحمل في نهايتها السفلية كتلة نقطية $m_2 = 0.6\ Kg$ تهتز هذه الساق حول محور أفقي مار من منتصفها، المطلوب:

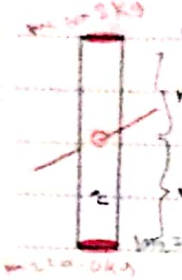
1. احسب دور النواس في حالة السعات الصغيرة.
2. احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس.
3. احسب دوراً للنواس لو ماس بسعة زاوية $\theta_{max} = 0.4\ rad$
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{6}$ ونتركها دون سرعة ابتدائية.

5. استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لهذا النواس لحظة مروره بوضع التوازن، ثم احسب قيمتها عندئذ.

6. احسب السرعة الخطية لمركز عطالة هذا النواس لحظة المرور بالشاقول.

5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2\ Kg$ ونعلق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي لتشكل بذلك نواساً للفتل، نزيح الساق الأفقية عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائية فتهتز بدور T_0، احسب ثابت فتل السلك.

6. احسب قيمة التسارع الزاوي لنواس الفتل عندما يصنع مطاله $\theta = 0.6\ rad$



$m_1 = \frac{2}{10}\ Kg$

$r_1 = \frac{L}{2}$

$r_2 = \frac{L}{2}$

$m_2 = \frac{6}{10}\ Kg$ $L = 1m$

1. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m g d}}$

$M = m_{ساق} + m_1 + m_2$

$M = \frac{8}{10}\ Kg$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 \frac{L^2}{4}$

$= (m_1 + m_2)\frac{L^2}{4}$

$I_\Delta = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{4}$

$I_\Delta = \frac{2}{10}\ Kg.m^2$

/ /

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$d = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1 + m_1 r_1}{m + m_1 + m_2}$

$= \frac{m_2 \frac{L}{2} - m_1 \frac{L}{2}}{m_1 + m_2}$

$= \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{10}}$

$= \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10}}$

$d = \frac{1}{4} m$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4}}}$

$T_0 = 2s$ في السعات الصغيرة

-2 $T_0 = T_0$ البسيط

$2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}} = 2$

$L' = 1m$

-3 $\theta_{max} = 0.4 rad$ > $0.24 rad$

سعة كبيرة

$T_0' = T_0 [1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}]$

$T_0' = 2 [1 + \frac{\frac{16}{100}}{16}]$

$T_0' = 2 [1 + \frac{1}{100}]$

$T_0' = 2 \frac{101}{100}$

$T_0' = \frac{202}{100} = 2.02 s$

-4 دراسة الطاقة الحركية

الوضع الأول: لحظة مرور النواس بوضع الاستقرار $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني: لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}_{1\to2}}$

$E_k - E_k = W_{\vec{R}} + W_{\vec{w}}$

[illegible]

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m g h$

$h = d [1 - \cos\theta_{max}]$

$\omega^2 = \frac{m g h}{\frac{1}{2} I_\Delta}$

$\omega = \sqrt{\frac{2 m g d [1 - \cos\theta_{max}]}{I_\Delta}}$

$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{8}{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} [1 - \frac{1}{2}]}{\frac{2}{10}}}$

$\omega = \sqrt{10} = \pi \, rad \, s^{-1}$

-b $v = \omega \cdot r$ نصف القطر $r = \frac{L}{2}$ / بُعد الخاصة $r = d$

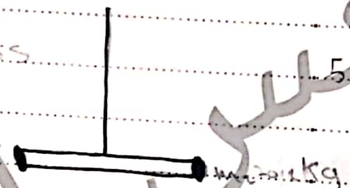
$v = \omega \cdot d = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} m s^{-1}$

5 $T_0 = 2\pi s$

$K = ?$

$m_1 = 0.1 kg$

$m_2 = 0.1 kg$



ننطلق من العلاقة المستنتجة للدور

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{I_{\Delta}}{K}$

$K = 4\pi^2 \frac{I_\Delta}{T_0^2}$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2 I_{\Delta/m_1}$

$= 2 m_1 r_1^2$

$= 2 m_1 \frac{L^2}{4} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{1}{4}$

$I_\Delta = 10^{-1} kg \, m^2$

$K = 4\pi^2 \frac{10^{-1}}{4\pi^2}$

$K = 10^{-1} m \, N \, rad^{-1}$

-6 $\alpha = ?$ $\theta = 0.5 rad$

$\alpha = -\omega_0^2 \theta$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 rad \, s^{-1}$

$\alpha = -1 (0.5)$

$\alpha = -0.5 rad \, s^{-2}$

المسألة الحادية عشرة

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r = \frac{2}{3} m$ مركزه O يهتز في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من نقطة على محيط القرص

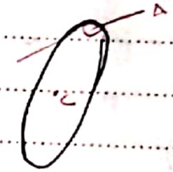
1. انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب، استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص في حالة السعات الصغيرة، ثم احسب قيمة الدور

2. احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس المركب

3. نثبت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطية m' تساوي كتلة القرص m ونجعله يهتز حول محور أفقي مار من مركز القرص، احسب دوره في هذه الحالة عند الزوايا الصغيرة.

4. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية m' لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}\, m.s^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max}.

($\theta_{max} > 0.24\ rad$ إذا علمت أن) $g = \pi^2$ ... نهمل عزم عطالة الجسم حول محور مار من مركزه وعمودي عليه ($I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$)



$r = \frac{2}{3}\, m$

$d = r$

1. $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m d^2$

$= \frac{1}{2} m r^2 + m r^2$

$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{m\, \pi^2\, r}}$

$T_0 = 2 \sqrt{\frac{3}{2} r}$

$T_0 = 2 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}$

$T_0 = 2\, s$

2. T_0 نواس بسيط = T_0 نواس مركب

$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = T_0$

$2\pi \sqrt{\frac{L}{\pi^2}} = 2$

$\sqrt{L} = 1 \Rightarrow L = 1\, m$

3. 

$m' = m$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{m \cdot g \cdot d}}$

الكلية $M = m' + m = 2m$

$I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m'}$

$= \frac{1}{2} m r^2 + m' r^2$

$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$

$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$

$d = \frac{m \cdot 0 + m' r}{m + m'}$

$= \frac{m' r}{2 m'}$

$d = \frac{r}{2}$

$T_0' = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2} m r^2}{2m\, \pi^2\, \frac{r}{2}}}$

$T_0' = 2 \sqrt{\frac{3}{2} r}$

$T_0' = 2 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}$

$T_0' = 2\, s$ الدور لم يتغير

4. $v = \frac{2\pi}{3}\, m.s^{-1}$

$\theta_{max} = ?$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين: الوضع الأول لحظة الإزاحة بسعة θ_{max}

$\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني لحظة المرور بالشاقول

$\theta = 0$

$\Delta E_k = \sum W_{F_{1 \to 2}}$

$E_{k_2} - E_{k_1} = W_{\vec{R}} + W_{\vec{w}}$ [illegible]

$E_k = W_{\vec{w}}$

$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m \cdot g \cdot h$

$h = d\,[1 - \cos\theta_{max}]$

$h = \frac{r}{2}\,[1 - \cos\theta_{max}]$, $m = 2m$

$v = \omega\, r$

$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$

$I_\Delta = \frac{3}{2} m r^2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m r^2 \frac{v^2}{r^2} = 2m\, g\, \frac{r}{2}\,[1 - \cos\theta_{max}]$

$\frac{3}{4} v^2 = g r\,[1 - \cos\theta_{max}]$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{3 v^2}{4 g r}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{3 \cdot \frac{4\pi^2}{9}}{4 \pi^2 \frac{2}{3}}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\, rad$