شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12

السؤال الأول:

ليكن العددان المركبان: $z_1 = 1 + i\ ,\ z_2 = \sqrt{3} + i$

١. اكتب كلا من z_1, z_2 بالشكل الأسي.

٢. اكتب بالشكل الجبري وبالشكل الأسي $z = \frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج قيمة كل من $\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12}$

ثم أوجد $(z)^{48}$

الحل:

الطلب الأول:

$$Z_1 = 1 + i$$

$$r\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_2 = \sqrt{3} + i \qquad Z_1 = re^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_2 = re^{i\theta} = 2\ e^{i\frac{\pi}{6}}$$

الطلب الثاني:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i-i^2}{\sqrt{3}^2-i^2} =$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{3+1} = \frac{\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$$

الكتابة بالشكل الأسي:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

استنتاج النسب المثلثية:

الشكل المثلثي

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

الشكل الجبري

$$Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

بالمقارنة بين الشكلين نجد أن:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

استنتاج $\sin\frac{\pi}{12}$ بنفس الطريقة

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

حساب Z^{48}:

$$Z^{48}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{48}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{48}\left[\cos\frac{48\pi}{12}+i\sin\frac{48\pi}{12}\right]$$

$$=\frac{2^{\frac{48}{2}}}{2^{48}}[\cos 4\pi+i\sin 4\pi]=2^{24}.2^{-48}[1]=2^{-24}=\frac{1}{2^{24}}$$

السؤال الثاني:

لتكن الأعداد: $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\,6$, $z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

١. اكتب بالشكل الأسي كل من Z_1 و Z_2 و Z_3 و $\frac{Z_1}{Z_2}$ و $Z_1.Z_2$

٢. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$ و $Z_1.Z_2$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ $\sin\frac{\pi}{12}$
ثم احسب $(Z_2)^6$ و $(Z_3)^{24}$

٣. أوجد الجذرين التربيعيين ل Z_2 بالشكل الجبري.

٤. حل المعادلة التالية بالمجهول Z في C : $Z^3+6Z^2=-29Z+2Z^2$

الحل:

الطلب الأول:

$$Z_3 = e^{i\frac{-\pi}{6}} \ , \ Z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}$$
$$Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$Z_1.Z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \ , \ \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

الطلب الثاني:

$$Z_1.Z_2 = (1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3})$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{i(1+\sqrt{3})}{2}$$

استنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{12}$:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \ , \ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

حساب $(Z_2)^6$ و $(Z_3)^{24}$:

$$(Z_2)^6 = 8i \ , \ (Z_3)^{24} = 1$$

الطلب الثالث:

$$Z_2 = 1 - i$$

بفرض $w = x + iy$ حل للمعادلة

$$a = 1 \ , \ b = -1$$

1. $x^2 - y^2 = 1$
2. $x^2 + y^2 = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$
   $= \sqrt{2}$
3. $x.y = \frac{-1}{2}$

بجمع المعادلتين 2 , 1 نجد أن:

$$2x^2 = 1 + \sqrt{2} \quad \rightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \rightarrow x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

نعوض x_1 في ٣:

$$+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}.y_1 = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow y_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

نعوض x_2 في ٣:

$$-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}.y_2 = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow y_2 = \frac{+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

الجذر الأول: $w_1 = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}}i$

الجذر الثاني: $w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}}i$

الطلب الرابع:

$$Z^3 + 6Z^2 = -29Z + 2Z^2$$
$$\rightarrow Z(Z^2 + 4Z + 29) = 0$$
$$Z^3 + 4Z^2 + 29Z = 0$$

إما $Z = 0$

أو $Z^2 + 4Z + 29 = 0$

$$a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ c = 29$$
$$\Delta = b^2 - 4a = 4^2 - 4(1)(29)$$
$$= 16 - 116 = -100 = 100i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 10i$$

$$Z_1 = \frac{-4+10i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2 + 5i$$
$$Z_2 = \frac{-4-10i}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2 - 5i$$

السؤال الثالث:

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب: $z = 4 - 2\sqrt{5}i$

الحل:

لإيجاد الجذرين التربيعين لعدد مركب لدينا ثلاث قوانين

١. نفرض ..... $w = x + iy$ جذر تربيعي للعدد Z

1. $x^2 - y^2 = a$
2. $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. $x \cdot y = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow a = 4 , b = -2\sqrt{5}$

سنوجد قيمة x, y ونعوض بـ w

1. $\boldsymbol{x^2 - y^2 = a}$

$x^2 - y^2 = 4$ ..... (1)

2. $\boldsymbol{x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{4^2 + \left(-2\sqrt{5}\right)^2}$$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{16 + 4(5)}$$
$$= \sqrt{16 + 20}$$

$x^2 + y^2 = \sqrt{36} = 6$ ..... (2)

3. $\boldsymbol{x \cdot y = \frac{b}{2}}$

$$x \cdot y = \frac{-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$$

$x \cdot y = -\sqrt{5}$ ..... (3)

بجمع المعادلتان ١ و٢ نجد:

$$2x^2 = 10$$
$$x^2 = 5$$
$$x = +\sqrt{5} \ / \ x = -\sqrt{5}$$

من أجل: ..... $x = +\sqrt{x}$

$$\sqrt{5} \cdot y = -\sqrt{5}$$
$$y = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -1$$
$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{5} - i$$

من أجل: ..... $x = -\sqrt{5}$

نعوض في المعادلة (٣):

$$-\sqrt{5}y = -\sqrt{5}$$
$$y = \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{s}} = 1$$
$$\Rightarrow z_2 = -\sqrt{5} + i$$

شغف رفيقك خطوة بخطوة

شغف التعليمي

Educational passion

القناة الرئيسية " فريق شغف التعليمي "

https://t.me/alsh276

مكتبة شغف " بوت الملفات "

@passion_study_bot

قناة الرياضيات

https://t.me/passion_maths12