المحاضرة الرابعة

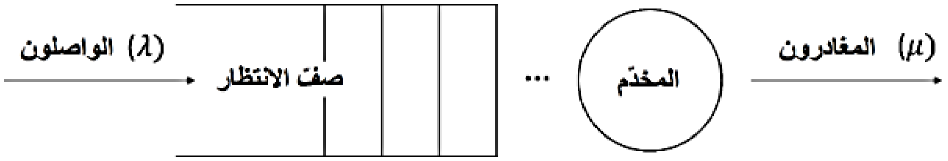
السنة الثالثة ـ إحصاء رياضي

نظرية الخدمات

نماذج أنظمة الخدمة:

1- النظام $M/M/1$:

ليكن لدينا نظام خدمة يحتوي على جهاز تخديم واحد يخدم وفقاً لتوزيع أسـي بالوسيط μ، وبفرض الطلبيات (أو الزبائن) التي تصل إلى هذا النظام لها شكل طابور بواسـوني بوسـيط λ : ونفترض أن حجم هذا الصف غير محدود، عندئذ يكون لدينا نظام الخدمة $M/M/1/\infty$ ، يمكننا أن نمثل هذا النظام بالشكل التالي:



يتصف هذا النظام بما يلي:

1- قاعدة الخدمة FIFO.

2- وصـول الزبائن إلى النظام بشـكل عشـوائي بمعدل ثابت مقداره $\lambda > 0$ خلال واحدة الزمن.

3- زمن خدمة الزبائن يتم بمعدل ثابت مقداره $\mu > 0$ خلال واحدة الزمن.

4- وصول أي زبون مستقل عن وصول الزبون الآخر.

5- زمن خدمة أي زبون مستقل عن زمن خدمة زبون آخر.

6- النظام يتصــف بالاســتقرار أي أن $\lambda < \mu$ ، أي أن عدد الزبائن الذين يصلون إلى النظام أصغر تبايناً من عدد الزبائن الذين تتم خدمتهم.

لنرمز لـــ $P_n(t)$ لاحتمال وجود n زبون في النظام خلال اللحظة t ولنحسب $P_n(t+\Delta t)$ وهو احتمال وجود n زبون في النظام خلال اللحظة $t+\Delta t$ وذلك بالاعتماد على الأحداث المتنافية التالية :

A_1 يمثـل حـدث وجود $n-1$ زبون عنـد اللحظـة t، وخلال الفترة الزمنيـة $(t, t+\Delta t]$ يدخل زبون واحد ولا يخرج أي زبون، وبالتالي:

$$p(A_1) = \lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)P_{n-1}(t) + O(\Delta t)$$

$$= \lambda P_{n-1}(t).\Delta t + O(\Delta t)$$

A_2 يمثـل حـدث وجود $n+1$ زبون عنـد اللحظـة t، وخلال الفترة الزمنيـة $(t, t+\Delta t]$ لا يدخل أي زبون ويخرج زبون واحد، وبالتالي:

$$p(A_2) = (1-\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)P_{n+1}(t) + O(\Delta t)$$

$$= \mu P_{n+1}(t).\Delta t + O(\Delta t)$$

A_3 يمثـل حـدث وجود n زبون عنـد اللحظـة t، وخلال الفترة الزمنيـة

$(t, t+\Delta t]$ لا يدخل أي زبون ولا يخرج أي زبون، وبالتالي:

$$p(A_3) = (1 - \lambda\Delta t\ )(1 - \mu\Delta t)P_n(t) + O(\Delta t)$$

$$= P_n(t) - (\mu + \lambda)P_n(t).\Delta t + O(\Delta t)$$

A_4 يمثـل حـدث وجود n زبون عنـد اللحظـة t، وخلال الفترة الزمنيـة

$(t, t+\Delta t]$ يدخل m زبون ويخرج m زبون، وبالتالي:

$$p(A_4) = (\lambda\Delta t\ )^m(\mu\Delta t)^m P_n(t) + O(\Delta t)$$

$$= O(\Delta t)$$

$$\Rightarrow P_n(t+\Delta t) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

$$= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) =$$

$$= \lambda P_{n-1}(t).\Delta t + \mu P_{n+1}(t).\Delta t + P_n(t)$$

$$- (\mu+\lambda)P_n(t).\Delta t + O(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}$$

$$= \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\mu+\lambda)P_n(t)$$

$$+ \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $\Delta t \to 0$ نجد أن:

$$\acute{P}_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\mu+\lambda)P_n(t)\,;n$$

$$\geq 1$$

أما من أجل n=0 فإن A_1 حدث مستحيل أي $\mathrm{P}(A_1) = 0$ وأما بالنسبة لـ

A_3 يكون $\mu = 0$ (لا توجد عملية مغادرة) وبالتالي:

$$\acute{P}_0(t) = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\acute{P}_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\mu + \lambda) P_n(t) \,; n \geq 1$$

حتى يكون النظام مستقر يجب أن يكون $P_n(t) = P_n$ أي أن $P_n(t)$ مستقلة عن الزمن وبالتالي $\acute{P}_n(t) = 0$ أي:

$$\acute{P}_0 = \mu P_1 - \lambda P_0 = 0$$

$$\acute{P}_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\mu + \lambda) P_n = 0 \,; n \geq 1$$

تدعى المعادلات الأخيرة بمعادلات التوازن ويمكن حل هذه المعادلات بطرق عديدة منها التراجع:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\mu P_1 - \lambda P_0 = 0 \Longrightarrow \mu P_1 = \lambda P_0 \Longrightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$= \rho P_0 \,;\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

ومن أجل $n = 1$ لدينا :

$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0 = \lambda P_1 + \lambda P_0 - \lambda P_0 = \lambda P_1$$

$$\Rightarrow P_2 = \rho P_1 = \rho^2 P_0$$

وهكذا من أجل n يكون :

$$\mu P_n = \lambda P_{n-1} \Rightarrow P_n = \rho P_{n-1} = \rho^n P_0$$

لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1$$

وحتى يكون النظام مستقر يجب أن يكون $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ وبالتالي السلسلة الهندسية

متقاربة ومجموعها $\frac{1}{1-\rho}$ وبالتالي :

$$P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = 1 - \rho$$

$$\boxed{\Rightarrow P_n = (1-\rho)\rho^n}$$

الآن نفترض أن Y متغير عشوائي يمثل عدد الزبائن في النظام فإن:

$$P_n = P(Y=n) = (1-\rho)\rho^n ; n = 0,1,2,\ldots$$

أي Y له التوزيع الهندسي بالوسيط ρ.