أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في التحليل التوافقي للثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :

اختزل المقادير التالية : ④ $\frac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}$, ③ $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$, ② $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$, ① $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$

الحل :

❶ $$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2n(n-1)!-(n-1)!}=\frac{(2n-1)(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)!}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

❷ $$\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

❸ $$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)(n!)}=\frac{n+1}{(n+1)(n!)}-\frac{1}{(n+1)(n!)}=\frac{n+1-1}{(n+1)(n!)}$$
$$=\frac{n}{(n+1)(n)(n-1)!}=\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

❹ $$\frac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}=\frac{2n\times(2n-1)(2n-2)\times\cdots\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}$$
$$=2n\times(2n-2)\times\ldots\ldots\times6\times4\times2=2^n\ (n\times(n-1)\times\ldots\ldots\times3\times2\times1)=2^n n!$$

التمرين 2 :

عيّن n في كل من الحالات الآتية :

① $P^4_{n+2}=14P^3_n$ ② $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$ ③ $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$ ④ $\frac{1}{6}P^2_{n+1}=\binom{n+2}{4}$

الحل :

❶ $P^4_{n+2}=14P^3_n$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق :

$n\ge3$ و $n+2\ge4\Longrightarrow n\ge2$ و $n\in\mathbb{N}$ و هذا يكافئ $n\ge3$ و $n\in\mathbb{N}$

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)=14(n)(n-1)(n-2)$$
$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)-14(n)(n-1)(n-2)=0$$
$$(n)(n-1)(n^2-11n+30)=0\Longrightarrow(n)(n-1)(n-5)(n-6)=0$$

مرفوض $n=0$ أو مرفوض $n=1$ أو مقبول $n=5$ أو مقبول $n=6$ إذن مجموعة الحلول هي : $\{5,6\}$

❷ $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$

شرط الحل $n\in\mathbb{N}$ و $3n\le10\Longrightarrow n\le\frac{10}{3}\Longrightarrow n\le3$ و $n+2\le10\Longrightarrow n\le8$

وهذا يكافئ $0\le n\le3$ لهذه المعادلة حلان :

إما $3n+n+2=10$ ومنه $n=2$ مقبول أو $3n=n+2$ ومنه $n=1$ مقبول

❸ $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

شرط الحل $n\in\mathbb{N}$ و $n\ge2$ و $n\ge4$ وهو يكافئ $n\ge4$

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2}=14\frac{n(n-1)}{2}\Longrightarrow(n-2)(n-3)=56\Longrightarrow n^2-5n-50=0\Longrightarrow$$

$(n-10)(n+5)=0$ إما $n=-5$ وهو مرفوض. أو $n=10$ مقبول

❹ $\frac{1}{6}P^2_{n+1}=\binom{n+2}{4}$

شرط الحل $n\in\mathbb{N}$ و $n+1\ge2\Longrightarrow n\ge1$ و $n+2\ge4\Longrightarrow n\ge1$ و هذا يكافئ $n\ge2$ و $n\in\mathbb{N}$

$$(n+1)(n)=6\times\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4\times3\times2\times1}(n+2)(n-1)=4\Rightarrow n^2+n-6=0\Rightarrow$$

$(n+3)(n-2)=0$ إما $n=-3$ وهو مرفوض أو $n=2$ مقبول

التمرين 3 :

❶ أثبت صحّة المساواة : $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$ في حالة $n \geq 2$ و $1 \leq r \leq n$

❷ أثبت صحة العلاقة التالية : $\dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \dfrac{n+1}{n+1-r}$

الحل :

❶ $$n\binom{n-1}{r-1} = \frac{n(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = r\frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!} = r\frac{n!}{r!(n-r)!} = r\binom{n}{r}$$

❷ $$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1-r)(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

التمرين 4 :

احسب قيمة كل من n و r إذا علمت : $2.\binom{n+1}{r+1} = 5.\binom{n+1}{r}$ و $3.\binom{n}{r} = 8.\binom{n}{r-1}$

الحل :

$$2.\binom{n+1}{r+1} = 5.\binom{n+1}{r} \Rightarrow 2\frac{(n+1)!}{(r+1)!(n+1-r-1)!} = 5\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \Rightarrow \frac{2}{(r+1)r!(n-r)!} = \frac{5}{r!(n+1-r)(n-r)!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n-r+1} \Rightarrow 2n-2r+2 = 5r+5 \Longrightarrow \quad 2n-7r = 3 \ldots\ldots ❶$$

$$3.\binom{n}{r} = 8.\binom{n}{r-1} \Rightarrow 3\frac{n!}{r!(n-r)!} = 8\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \Longrightarrow \frac{3}{r(r-1)!(n-r)!} = \frac{8}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1} \Rightarrow 3n-3r = 11r \Longrightarrow \qquad 3n+3 = 11r \ldots\ldots ❷$$

بحل المعادلتين ❶ و ❷ حلاً مشتركاً نجد : $n = 54$, $r = 15$

التمرين 5 :

في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال

كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز

الحل :

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 2 = 8$$

التمرين 6 :

نريد تأليف لجنة مكوّنة من ثلاثة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة طلاب وأربع طالبات

❶ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها ؟

❷ كم لجنة مختلفة مكوّنة من طالبين وطالبة يمكننا تأليفها؟

❸ كم لجنة مختلفة مكوّنة من أشخاص من نفس الجنس يمكننا تأليفها؟

❹ كم لجنة مختلفة مكوّنة من طالبين طالبتان على الأكثر

الحل :

❶ $$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

❷ اللجنة تضم (طالبين و طالبة) : $$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

❸ اللجنة تضم (3 طالبات) أو (3 طلاب) : $$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$$

❹ اللجنة تضم (طالبتان و طالب) أو (طالبة و طالبان) أو (ولا طالبة و 3 طلاب) :

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{5}{3} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 5 + 4 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + 1 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 30 + 40 + 10 = 80$$

التمرين 7 :

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة اشخاص
بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علما " ان في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها "

الحل :

الطريقة الاولى : جميع اللجان التي ممكن تشكيلها – اللجان المتشكلة التي تحوي المتخاصمين

عدد الطرق $= P_5^3 - (P_2^2 \times P_3^1 \times 3) = 60 - 18 = 42$

الطريقة الثانية : اما اللجنة لا تحوي المتخاصمان او اللجنة تحوي متخاصم واحد واخران غير متخاصمان

عدد الطرق $= P_3^3 + (P_2^1 \times P_3^2) \times 3 = 6 + 36 = 42$

التمرين 8 :

نريد تأليف لجنة مكونة من ثلاثة أشاص من مجموعة تضم خمسة اشخاص
بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علما ان في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

الحل :

الطريقة الاولى : جميع اللجان التي ممكن تشكيلها – اللجان المتشكلة التي تحوي المتخاصمين

عدد الطرق $= \binom{5}{3} - \binom{2}{2} \times \binom{3}{1} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} - (1 \times 3) = 10 - 3 = 7$

الطريقة الثانية : اما اللجنة لا تحوي المتخاصمان او اللجنة تحوي متخاصم واحد واخران غير متخاصمان

عدد الطرق $= \binom{3}{3} + \binom{2}{1} \times \binom{3}{2} = 1 + 6 = 7$

التمرين 9 :

يريد معلم توزيع $n + 1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً بحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل
❶ ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟ ❷ ما عدد النتائج اذا كان عدد الطلاب خمسة ؟

الحل :

❶ تتم هذه العملية على مرحلتين :
المرحلة الأولى : نضع جائزتين من الجوائز في مغلف وباقي الجوائز كل جائزة في مغلف
عدد طرائق اختيار هاتين الجائزتين هو : $\dfrac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$
المرحلة الثانية : سنوزع الجوائز التي أصبح عددها n على الطلاب الذين عددهم n أيضا
فتصبح عدد النتائج المختلفة للعملية : $\binom{n+1}{2}.n! = \dfrac{(n+1)n.n!}{2} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$

❷ $\binom{6}{2}.5! = \dfrac{6 \times 5 \times 5!}{2} = 1800$

التمرين 10 :

يريد معلم توزيع 5 هدايا مختلفة على 5 طلاب بحيث يحصل كل طالب على هدية
❶ بكم طريقة يمكن توزيعها ❷ اذا اصر طالب منهم على هدية معينة بكم طريقة يمكن توزيع الهدايا

الحل :

❶ $5! = 120$ ❷ $1 \times 4! = 24$

التمرين 11 :

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الاشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط
❶ كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة في حالة n صديقاً
❷ كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل اذا علمت أن في الحفل أربعة أشخاص متخاصمين فيما بينهم لا يصافح أي منهم الآخر

الحل :

❶ مصافحة $\binom{10}{2} = \dfrac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ وفي حال n شخصاً : مصافحة $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2 \times 1}$

❷ جميع المصافحات – مصافحات المتخاصمين : $\binom{10}{2} - \binom{4}{2} = 45 - 6 = 39$

التمرين 12 :

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة اسئلة من عشرة .

❶ بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

❷ بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الاسئلة الأربعة الأولى إجبارية

الحل :

❶ عدد الأسئلة $n = 10$ يختار الطالب منها $r = 7$ ولا يهم الترتيب $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

❷ أربعة أسئلة اجبارية بالتالي يبقى 6 أسئلة نختار منها 4 بالتالي عدد الطرق $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

التمرين 13 :

يملك أحمد 3 كتب رياضيات مختلفة ، و 4 كتب فيزياء مختلفة ، و كتاب عن العلوم الطبيعية ،

بكم طريقة يمكن ترتيب كتبه على الرف ، بحيث تكون الكتب المتماثلة بجانب بعضها البعض

الحل :

عدد طرق ترتيب كتب الرياضيات المختلفة $3!$ و عدد طرق ترتيب كتب الفيزياء المختلفة $4!$

و عدد طرق ترتيب كتاب العلوم 1 و عدد تباديل الكتب الثلاث المختلقة (الرياضيات ، الفيزياء ، العلوم) $3!$

وبالتالي عدد الطرق $= (3! \times 4! \times 1) \times 3! = 864$

التمرين 14 :

اشترى احمد 7 كتب وهي :4 كتب للمؤلف A ، و 3 كتب للمؤلف B ، والمطلوب :

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب كتبه على الرف ، بحيث تكون الكتب لنفس المؤلف بجانب بعضها البعض

❷ بكم طريقة يمكن ترتيب كتبه على الرف ، بحيث تكون الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف A

❸ بكم طريقة يمكن ترتيب كتبه على الرف ، بحيث يكون كتاب معين للمؤلف B في البداية

الحل :

❶ عدد طرق ترتيب كتب للمؤلف A هي $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

عدد طرق ترتيب كتب للمؤلف B هي $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

عدد تباديل الكتب للمؤلفين هي $2! = 2 \times 1 = 2$ وبالتالي :

حسب المبدأ الاساسي في العد يكون عدد الطرق الكلي : عدد الطرق $= (24 \times 6) \times 2 = 288$

❷ يتم ترتيب 3 الكتب الاولى للمؤلف A بعدد طرق يساوي $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

يبقى 4 كتب للمؤلفين ويتم ترتيبها بعدد طرق يساوي $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

حسب المبدأ الاساسي في العد يكون عدد الطرق الكلي : عدد الطرق $= 24 \times 24 = 576$

❸ يتم ترتيب كتاب معين للمؤلف B بعدد طرق يساوي 1

يبقى 7 كتب للمؤلفين الثلاثة ويتم ترتيبها بعدد طرق يساوي $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

حسب المبدأ الاساسي في العد يكون عدد الطرق الكلي : عدد الطرق $= 1 \times 720 = 720$

التمرين 15 :

لتكن $S = \{1,2,3,\cdots,14,15\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل :

المرحلة الأولى :

نقسم المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تِبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 فنحصل على ما يلي :

$$A_0 = \{3,6,9,12,15\}$$

$$A_1 = \{1,4,7,10,13\}$$

$$A_2 = \{2,5,8,11,14\}$$

إذاً باقي قسمة أي عنصر من عناصر المجموعات الثلاث على 3 يساوي k حيث $k = 0,1,2$

المرحلة الثانية :

نشكل مجموعة جزئيّة $H = \{a,b,c\}$ مكوّنة من ثلاثة عناصر من S وبحيث يكون $a+b+c$ مضاعفاً للعدد 3

وهذا يتحقق عندما :

- العناصر الثلاث $\{a,b,c\}$ من نفس المجموعة A أي إما جميعها من A_2 أو A_1 أو A_0 حيث يكون مجموع البواقي من مضاعفات الثلاثة

و عدد مثل هذه المجموعات يساوي : $\binom{5}{3} \times 3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2} \times 3 = 30$

- العناصر الثلاث $\{a,b,c\}$ كل عنصر من مجموعة $a \in A_0$ و $b \in A_1$ و $c \in A_2$ حيث يكون مجموع البواقي من مضاعفات الثلاثة

و عدد مثل هذا النوع من المجموعات $\{a,b,c\}$ يساوي $5 \times 5 \times 5 = 125$

وبالتالي عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي :

$30 + 125 = 155$ مجموعة

التمرين 16 :

لتكن $S = \{1,2,3,\cdots,19,20\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من عنصرين من S مجموعهما من مضاعفات العدد 2 ؟

الحل :

لتشكيل مجموعة جزئيّة مكوّنة من عنصرين من S بحيث يكون مجموعهما مضاعفاً للعدد 2

يجب أن يكون العددين زوجيين أو فرديين

عدد هذه المجموعات يساوي : $\binom{10}{2} + \binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2\times1} + \frac{10\times9}{2\times1} = 45 + 45 = 90$

التمرين 17 :

صندوق يحوي 10 كرات، 6 حمراء و 3 بيضاء و كرة واحدة سوداء
نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة
باعتبار الكرة الحمراء R والبيضاء W والسوداء B والحرف D يدل على الكرة المختلفة

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب؟
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل

الحل :

1. $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
2. النتائج التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هي: $(R,R,D)\,,(W,W,D)\,,(B,B,D)$
و يكون عدد النتائج المختلفة هو : $3(6^2 \times 4) + 3(3^2 \times 7) + 3(1^2 \times 9) = 648$
3. الكرات الثلاث مختلفة اللون هي : (R,W,B) و يكون عدد النتائج المختلفة هو : $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$
4. النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد
ومنه عدد النتائج هو : $1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$
5. النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل: $(R,D,D)\,,(R,R,D)\,,(R,R,R)$
و عدد النتائج المختلفة : $3(6 \times 4^2) + 3(6^2 \times 4) + (6^3) = 936$
6. النتائج المختلفة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأقل : $(B,D,D)\,,(B,B,D)\,,(B,B,B)$
و عدد النتائج : $3(1 \times 9^2) + 3(1^2 \times 9) + (1^3) = 271$

التمرين 18 :

صندوق يحوي 10 كرات، 6 حمراء و 3 بيضاء و كرة واحدة سوداء
نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة
باعتبار الكرة الحمراء R والبيضاء W والسوداء B والحرف D يدل على الكرة المختلفة

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل

الحل :

1. $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
2. النتائج التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هي $(R,R,D)\,,(W,W,D)$ و عدد النتائج المختلفة
هو : $(P_6^2 \times P_4^1) \times 3 + (P_3^2 \times P_7^1) \times 3 = (6 \times 5 \times 4) \times 3 + (3 \times 2 \times 7) \times 3 = 486$
3. الكرات الثلاث مختلفة اللون هي : (R,W,B) و يكون عدد النتائج المختلفة هو :
$(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 18 \times 3 \times 2 \times 1 = 108$
4. النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد :
$720 - (P_6^3 + P_3^3) = 720 - (120 + 6) = 594$
5. النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل هو متمم عدم الحصول على اي كرة حمراء
$720 - P_4^3 = 720 - (4 \times 3 \times 2) = 696$
6. المتمم : أن تكون الكرات ليست سوداء $720 - P_9^3 = 720 - (9 \times 8 \times 7) = 216$

التمرين 19 :

صندوق يحوي 10 كرات ، 6 حمراء و 3 بيضاء و كرة واحدة سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معا

باعتبار الكرة الحمراء R والبيضاء W والسوداء B والحرف D يدل على الكرة المختلفة

❶ كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب

❷ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه

❸ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون

❹ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد

❺ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل

❻ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأقل

الحل :

❶ $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

❷ النتائج التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هي $(R,R,D)\,,(W,W,D)$

و يكون عدد النتائج المختلفة : $\binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} = 15\times4 + 3\times7 = 81$

❸ الكرات الثلاث مختلفة اللون هي : (R,W,B) و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} = 6\times3\times1 = 18$$

❹ النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد :

$$120 - \left(\binom{6}{3} + \binom{3}{3}\right) = 120 - \left(\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} + 1\right) = 99$$

❺ النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل هو متمم عدم الحصول على اي كرة حمراء :

$$120 - \binom{4}{3} = 120 - \left(\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}\right) = 120 - 4 = 116$$

❻ بما أنه لا توجد الا كرة سوداء فإن النتائج المختلفة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأقل هي :

$$\binom{1}{1}\binom{9}{2} = 1\times\frac{9\times8}{2\times1} = 36$$

طريقة ثانية : المتمم : أن تكون الكرات ليست سوداء

$$120 - \binom{9}{3} = 120 - \left(\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\right) = 120 - 84 = 36$$

التمرين 20 :

يحوي صندوق على تسع كرات مرقمة من 1 الى 9

نسحب على التتالي أربع كرات دون اعادة ونسجل بالترتيب أرقام الكرات المسحوبة .

ما عدد الأعداد المكونة من أربع خانات التي يمكننا تشكيلها بهذه الطريقة

الحل :

عدد الأعداد : $P_9^4 = 9\times8\times7\times6 = 720$

التمرين 21 :

نتأمل مجموعة من البطاقات عدد عناصرها 32

فيها ثماني بطاقات حمراء اللون مرقمة من 1 الى 8 و ثماني بطاقات زرقاء اللون مرقمة من 1 الى 8

و ثماني بطاقات خضراء اللون مرقمة من 1 الى 8 و ثماني بطاقات صفراء اللون مرقمة من 1 الى 8

نسمي سحبا أي مجموعة جزئية مكونة من خمس بطاقات من المجموعة والمطلوب :

1. كم سحبا يضم تماما بطاقتين حمراوين
2. كم سحبا يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم 1 ؟

الحل :

❶ السحب (بطاقتين حمراوين من البطاقات الحمراء 8 و ثلاث بطاقات من الباقي 24)

$$\binom{8}{2}\binom{24}{3} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2 \times 1} = 56672$$

❷ كم سحبا يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم 1 ؟

نأخذ المتمم عدم وجود بطاقة تحمل الرقم 1 وبالتالي (العدد الكلي منقوصا منه عدم وجود بطاقة تحمل الرقم 1)

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 103096$$

التمرين 22 :

نتأمل صندوقا يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 , 7 , 8 , 9 نُجري التجربة الآتية :

نسحب ثلاث كرات معا والمطلوب :

1. كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟
2. كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟
3. كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9 ؟

الحل :

❶ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو : $4 = \binom{4}{3}$ (سحب 3 كرات من 4 معا)

❷ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو : $\binom{1}{1}\binom{3}{2} = 1 \times 3 = 3$ (كرة 7 و كرتين غير رقم)

❸ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو : $\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = 1 \times 1 \times 2 = 2$ (كرة 8 و كرة 9 و كرة غير رقم)

التمرين 23 :

نتأمل صندوقا يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 نُجري التجربة الآتية :
نسحب ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة والمطلوب :

❶ كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

❷ كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية:

a. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 ، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

الحل :

❶ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

❷ عدد النتائج الممكنة :

الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة	الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة
6	9	7	8	7	أي رقم
a. $1^1 \times 1^1 \times 1^1 = 1$			**b.** $1^1 \times 1^1 \times 4^1 = 4$		
الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة	الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة
أي رقم	9	8	أي رقم	7	أي رقم
c. $4^1 \times 1^1 \times 1^1 = 4$			**d.** $4^1 \times 1^1 \times 4^1 = 16$		

التمرين 24 :

نتأمل صندوقا يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 نُجري التجربة الآتية :
نسحب ثلاث كرات على التتالي دون إعادة والمطلوب :

❶ كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

❷ كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية:

a. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 ، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

الحل :

❶ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو: $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

❷ عدد النتائج الممكنة:

الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة	الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة
6	9	7	8	7	أي رقم
$a.\quad P_1^1 \times P_1^1 \times P_1^1 = 1$			$b.\quad P_1^1 \times P_1^1 \times P_2^1 = 2$		
الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة	الكرة الاولى	الكرة الثانية	الكرة الثالثة
أي رقم	9	8	أي رقم	7	أي رقم
$c.\quad P_2^1 \times P_1^1 \times P_1^1 = 2$			$d.\quad P_3^1 \times P_1^1 \times P_2^1 = 6$		

التمرين 25 :

لتكن المجموعة $S = \{1 , 2 , 5 , 8 , 9\}$

❶ كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❸ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

الحل :

❶ العشرات لها 5 طرق والآحاد لها 5 طرق وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 5 = 25$

❷ العشرات لها 5 طرق والآحاد لها 4 طرق وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 4 = 20$

❸ الآحاد لها 2 طريقة والعشرات لها 5 طرق وبالتالي عدد الأعداد $2 \times 5 = 10$

التمرين 26 :

لتكن المجموعة $S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$

❶ كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❸ كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة منازل يشمل مرة واحدة للعدد1

❹ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❺ كم عدداً زوجيّاً مختلف الأرقام مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❻ كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة منازل ليس من مضاعفات العدد 5 وأكبر من 400 يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❼ كم عدداً مختلف الأرقام مؤلفاً من ثلاثة منازل ليس من مضاعفات العدد 5 وأكبر من 400 يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

الحل :

❶ المئات لها 9 طرق والعشرات لها 9 طرق والآحاد لها 9 طرق وبالتالي عدد الأعداد $9 \times 9 \times 9 = 729$

❷ المئات لها 9 طرق والعشرات لها 8 طرق والآحاد لها 7 طرق وبالتالي عدد الأعداد $9 \times 8 \times 7 = 504$

❸ العدد 1 له 3 طرق (عدد المنازل) والباقي لها $8 \times 8 = 64$ وبالتالي عدد الأعداد $3 \times 64 = 192$

❹ الآحاد لها 4 طريقة والمئات لها 9 طرق والعشرات لها 9 وبالتالي عدد الأعداد $4 \times 9 \times 9 = 324$

❺ الآحاد لها 4 طريقة والمئات لها 8 طرق والعشرات لها 7 وبالتالي عدد الأعداد $4 \times 8 \times 7 = 224$

❻ المئات لها 6 طرق :$\{4,5,6,7,8,9\}$ والآحاد لها 8 طرق : $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ والعشرات 9 طرق
وبالتالي عدد الأعداد $9 \times 8 \times 6 = 432$

❼ المئات لها 6 طرق :$\{4,5,6,7,8,9\}$ والآحاد لها 8 طرق : $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$
عدد طرق المنزلتين (باستثناء حالات التشابه لأن الارقام مختلفة) هي : $(6 \times 8) - 5 = 43$
والعشرات 7 طرق وبالتالي عدد الأعداد $43 \times 7 = 301$

التمرين 27 :

لتكن المجموعة $S = \{1 , 2 , 5 , 8 , 9\}$

❶ كم عدداً مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❸ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❹ كم عدداً زوجيّاً مختلف الأرقام مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

الحل :

❶ آحاد الألوف لها 5 طرق والمئات لها 5 طرق والعشرات لها 5 طرق والآحاد لها 5 طرق
وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

❷ آحاد الألوف لها 5 طرق والمئات لها 4 طرق والعشرات لها 3 طرق والآحاد لها 2 طرق
وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

❸ الآحاد لها 2 طرق وآحاد الألوف لها 5 طرق والمئات لها 5 طرق والعشرات لها 5 طرق
وبالتالي عدد الأعداد $2 \times 5 \times 5 \times 5 = 250$

❹ الآحاد لها 2 طرق وآحاد الألوف لها 4 طرق والمئات لها 3 طرق والعشرات لها 2 طرق
وبالتالي عدد الأعداد $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

التمرين 28 :

لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

كم عدداً مختلف الأرقام ليس من مضاعفات العدد 5 وأكبر من 20000 يمكن تشكيله من عناصر S

الحل :

بما أن عدد عناصر S هي 5 والعدد أكبر من 20000 فالعدد مؤلف من خمسة منازل

عشرات الألوف لها 4 طرق: $\{2, 3, 4, 5\}$ والآحاد لها 4 طرق : $\{1, 2, 3, 4\}$

عدد طرق المنزلتين (باستثناء حالات التشابه لان الارقام مختلفة) هي : $(4 \times 4) - 3 = 13$

آحاد الألوف لها 3 طرق والمئات لها 2 طرق والعشرات 1 طرق وبالتالي عدد الأعداد $13 \times 3 \times 2 \times 1 = 78$

التمرين 29 :

لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

❶ كم عدداً مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❸ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

❹ كم عدداً زوجيّاً مختلف الأرقام مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

الحل :

❶ آحاد الألوف لها 9 طرق والمئات لها 10 طرق والعشرات لها 10 طرق والآحاد لها 10 طرق

وبالتالي عدد الأعداد $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

❷ آحاد الألوف لها 9 طرق والمئات لها 9 طرق والعشرات لها 8 طرق والآحاد لها 7 طرق

وبالتالي عدد الأعداد $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

❸ الآحاد لها 5 طرق آحاد الألوف لها 9 طرق والمئات لها 10 طرق والعشرات لها 10 طرق

وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 9 \times 10 \times 10 = 4500$

❹ الآحاد لها 5 طرق : $\{0,2,4,6,8\}$ وآحاد الألوف لها 9 طرق : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

عدد طرق المنزلتين (باستثناء حالات التشابه لان الارقام مختلفة) هي : $(5 \times 9) - 4 = 41$

والمئات لها 8 طرق والعشرات لها 7 طرق وبالتالي عدد الأعداد $41 \times 8 \times 7 = 2296$

التمرين 30 :

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0, 1, 2, 3, 4, 5$

❶ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل

❷ ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها. ما عدد الرمّازات التي تُسبب انطلاق الإنذار

❸ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

❹ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل اذا كان الرمّاز مكوّن من الأرقام 1 و 3 و 3

الحل :

❶ $6 \times 6 \times 6 = 216$

❷ واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية وعددها 215 فأي منها يُطلق الإنذار

❸ $6 \times 5 \times 4 = 120$

❹ هناك ثلاث خيارات لموقع الرقم 1 وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 3 إذاً عدد الرمازات $3 \times 1 = 3$

التمرين 31 :

لتكن لدينا 8 نقاط في مستوٍ واحد ولا يقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة

❶ ما عدد المستقيمات المعينة بها

❷ ما عدد المثلثات المعينة بها

❸ ما عدد الأشكال الرباعية المعينة بها

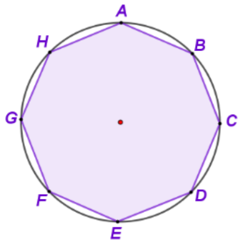
الحل :

❶ عدد المستقيمات المعينة بها : $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

❷ عدد المثلثات المعينة بها : $\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$

❸ عدد الأشكال الرباعية المعينة بها : $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2} = 70$

التمرين 32 :



لتكن لدينا 8 نقاط A, B, C, D, E, F, G, H مفروضة تشكل هذه النقاط رؤوس لمثمن منتظم

❶ ما عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المثمن ؟

❷ كم عدد الأقطار للمضلع السابق والمارة بمركز الدائرة المارة بروؤسه

❸ كم عدد المثلثات القائمة التي يمكن رسمها داخل المضلع

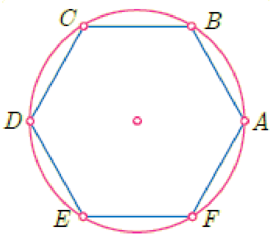
الحل :

❶ عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المثمن ؟ (عدد القطع المستقيمة ناقص عدد الاضلاع) $\binom{8}{2} - 8 = 20$

❷ عدد الأقطار للمضلع السابق و المارة بمركز الدائرة المارة بروؤسه عدد اقطار المثمن المارة بمركز الدائرة هي $\frac{8}{2} = 4$

❸ كل قطر مار بمركز الدائرة هو وتر ل 6 مثلثات قائمة وعدد هذه الأقطار 4 فإن $24 = 6 \times 4 =$ عدد المثلثات القائمة

التمرين 33 :



في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث

❶ ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❷ ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❸ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل :

❶ كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة إذاً عدد المثلثات يساوي $\binom{6}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = 20$

❷ كل قطر في المسدس هو وتر لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيّ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها هو $4 \times 3 = 12$

❸ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6

التمرين 34 :

نتأمل مضلعاً محدباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n \geq 4)$ نسمي قطراً في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع

❶ ما عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المضلع ؟

❷ نفترض أننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة احد رؤوس المضلع .

احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع بدلالة n .

الحل :

❶ عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المضلع (عدد القطع المستقيمة ناقص عدد الاضلاع)

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

❷ في الحالة العامة عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي عدد المجموعات المكونة من أربع نقاط اي : $\binom{n}{4}$

و كل رأس يرسم منه قطرين على الأقل إذاً كل رأس في المضلع في حالة $n \geq 5$ هو نقطة تقاطع القطرين وعددها n

و بالتالي يكون عدد نقاط تقاطع الأقطار هو : $D_n = \binom{n}{4} + n$

التمرين 35 :

لدينا مستقيمان متوازيان ، نحدد على أحدهما (6) نقاط مختلفة وعلى الثاني (4) نقاط مختلفة

❶ ما عدد المثلثات التي يمكن أن تشكل بين هذه النقاط

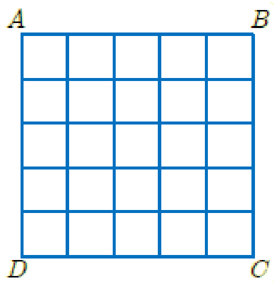
❷ ما عدد الرباعيات التي يمكن رسمها من هذه النقاط

الحل :

❶ $\binom{6}{2}.\binom{4}{1} + \binom{4}{2}.\binom{6}{1} = 15 \times 4 + 6 \times 6 = 96$

❷ $\binom{6}{2}.\binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$

التمرين 36 :



في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربّع $ABCD$.

احسب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل . علماً أنّ المربع مستطيل خاص .

الحل :

المستطيل ينتج من تقاطع خطين طول مع خطين عرض

أي نحتاج من الخطوط الطولية خطين و من خطوط العرض خطين

والترتيب غير مهم ومنه عدد المستطيلات هي : $\binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} \times \frac{6\times5}{2} = 15 \times 15 = 225$

التمرين 37 :

أنشر المقدار $(1+3x)^n$ واستنتج المجموع $S_n = 1 + \binom{n}{1}3 + \binom{n}{2}3^2 + \cdots + \binom{n}{r}3^r + \cdots \binom{n}{n}3^n$

الحل :

$$(1+3x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3x) + \binom{n}{2}(3x)^2 + \cdots . + \binom{n}{r}(3x)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3x)^n$$

ولاستنتاج قيمة المجموع S_n يكفي أن نعوض بدل كل x بواحد في عبارة المنشور فنجد

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3) + \binom{n}{2}(3)^2 + \cdots + \binom{n}{3}(3)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3)^n = (1+3)^n = 4^n$$

التمرين 38 :

عين في منشور كل مما يلي الحد المستقل عن x (في حال وجوده) : ❶ $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$, ❷ $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{8}$.

الحل :

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

❶ $T_r = \binom{12}{r} x^{12-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-4r}$

$12-4r = 0 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow T_3 = \binom{12}{3} x^{12-12} = \frac{12\times11\times10}{3\times2} = 2\times110 = 220$

❷ $T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{8-r}\left(\sqrt{x}\right)^r = \binom{8}{r}(x)^{r-8}(x)^{\frac{r}{2}} = \binom{8}{r} x^{\frac{3r}{2}-8}$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $\frac{3r}{2}-8 = 0 \Rightarrow r = \frac{16}{3}$

وبما أن r عدد طبيعي فهذا يعني بأنه لا يوجد حد مستقل عن x في منشور $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^8$

التمرين 39 :

ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت مستقل عن x

الحل :

الحد العام للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هو : $T_r = \binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r} x^{2n-3r}$

وجود حد ثابت يكافئ $2n-3r = 0$ ومنه $r = \frac{2n}{3}$ وكذلك يجب أن يكون العدد n من مضاعفات العدد 3

التمرين 40 :

عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

الحل :

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r} x^{10-2r}$

فالحد الذي يحوي x^2 هو الحد الذي يحقّق: $10-2r = 2$ وبالتالي $r = 4$ وهذا الحد يساوي

$T_4 = \binom{10}{4} x^{10-8} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} x^2 = 210x^2$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $10-2r = 0 \Rightarrow r = 5$

$T_5 = \binom{10}{5} x^{10-10} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2} = 36\times7 = 252$

التمرين 41 :

احسب أمثال x^3 في المنشور $(2+3x)^{15}$

الحل :

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{15}{r}(2)^{15-r}(3x)^r = \binom{15}{r}(2)^{15-r}(3)^r(x)^r$

بالتالي $r = 3$ وبالتالي أمثال x^3 هي :

$\binom{15}{3}(2)^{12}(3)^3 = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}\times(2)^{12}\times(3)^3 = 5\times7\times(2)^{12}\times(3)^3 = 50319360$

التمرين 42 :

اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$

الحل :

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$
$$(1-x)^6=1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$$
$$(1+x)^6+(1-x)^6=2+30x^2+30x^4+2x^6$$

التمرين 43 :

ما آحاد و عشرات العدد 11^{11}؟

الحل :

العدد يكتب بالشكل $11^{11}=(1+10)^{11}$

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ وبالتالي :

الحد ذو الدليل r في منشور $11^{11}=(1+10)^{11}$ هو $T_r=\binom{11}{r}(1)^{11-r}(10)^r$ وبالتالي :

جميع الحدود $T_2,T_3,\dots,T_{11}$ هي من مضاعفات المئة واضافتها لا تؤثر في الآحاد و العشرات وبالتالي

$$T_0=\binom{11}{0}(1)^{11-0}(10)^0=1\ ,\ \ T_1=\binom{11}{1}(10)^1=110\Longrightarrow T_0+T_1=110+1=111$$

وبالتالي كل من آحاد وعشرات العدد 11^{11} هو 1

التمرين 44 :

ليكن كثير الحدود $F(x)=(1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث $a\,,b$ عددان طبيعيان

فإذا علمت أنّ أمثال x تساوي 62 ، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$

الحل :

طريقة أولى :

أمثال x هي ناتج $F'(0)$ ومنه :

$$F'(x)=5(a)(1+ax)^4(1+bx)^4+4b(1+bx)^3(1+ax)^5$$

وبالتالي أمثال x هي : $F'(0)=5a+4b$ ومن الفرض أيضاً أمثال x هي 62 فيكون : $5a+4b=62$

ومنه نجد :

$$4a+4b\le 5a+4b\le 5a+5b\Leftrightarrow 4(a+b)\le 62\le 5(a+b)$$
$$\frac{62}{5}=12.4\le a+b\le\frac{62}{4}=15.5\Leftrightarrow a+b\in\{13,14,15\}$$

طريقة ثانية :

$$F(x)=(1+ax)^5(1+bx)^4$$
$$(1+ax)^5=1+5ax+\binom{5}{2}a^2x^2+\binom{5}{3}a^3x^3+\binom{5}{4}a^4x^4+a^5x^5$$
$$(1+bx)^4=1+4bx+\binom{4}{2}b^2x^2+\binom{4}{3}b^3x^3+b^4x^4$$

أن الحد الذي يحوي x في منشور $F(x)$ هو : $5ax+4bx=(5a+4b)x$ وبالتالي أمثال x هي : $5a+4b$

ومن الفرض أيضاً أمثال x هي 62 فيكون : $5a+4b=62$ ومنه نجد :

$$4a+4b\le 5a+4b\le 5a+5b\Leftrightarrow 4(a+b)\le 62\le 5(a+b)$$
$$\frac{62}{5}=12.4\le a+b\le\frac{62}{4}=15.5\Leftrightarrow a+b\in\{13,14,15\}$$

التمرين 45 :

ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة : $A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

❶ تحقق انّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.

❷ أثبت أنّ A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

الحل :

❶

$$(2+\sqrt{3})^3 = 8 + 3(4)(\sqrt{3}) + 3(2)(3) + 3\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}$$
$$(2-\sqrt{3})^3 = 8 - 3(4)(\sqrt{3}) + 3(2)(3) - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$
$$(2+\sqrt{3})^4 = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^3 = (2+\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})$$
$$= 52 + 30\sqrt{3} + 26\sqrt{3} + 45 = 97 + 56\sqrt{3}$$
$$(2-\sqrt{3})^4 = (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^3 = (2-\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})$$
$$= 52 - 30\sqrt{3} - 26\sqrt{3} + 45 = 97 - 56\sqrt{3}$$

ومنه يكون :

$$A_3 = (2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52$$
$$A_4 = (2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4 = 97 + 56\sqrt{3} + 97 - 56\sqrt{3} = 194$$

أي A_3 و A_4 عددين طبيعيين

❷ بفرض T_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $(2+\sqrt{3})^n$ فيكون : $T_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r$

بفرض T'_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $(2-\sqrt{3})^n$ فيكون :

$$T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (-\sqrt{3})^r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (-1)^r (\sqrt{3})^r$$

بالتالي :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r + \binom{n}{r} 2^{n-r} (-1)^r (\sqrt{3})^r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^r (1 + (-1)^r)$$

فإذا كان r عدداً زوجياً $r = 2m$ كان : $T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^{2m} (2) = \binom{n}{r} 2^{n-r+1} (3)^m$

وهو عدد طبيعي لأنه جداء لأعداد طبيعية .

فإذا كان r عدداً فردياً $r = 2m+1$ كان : $T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r} (\sqrt{3})^{2m+1} (1-1) = 0$

وهو عدد طبيعي أيضاً .

و بما أنّ A_n يساوي مجموع $T_r + T'_r$ فهو عدد طبيعي لأنه مجموع أعداد طبيعية .

التمرين 46 :

اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثم أجب عن التمرين الموافق .

❶ $\cos^3 x$ واستنتج قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$ ❷ $\sin^3 x$ واستنتج قيمة : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin3x-3\sin x}{\tan^3 x}$

❸ $\sin^4 x$ واستنتج قيمة : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ ❹ $\cos x\sin^4 x$ واستنتج قيمة : $F(x)=\int_0^x \cos t\,\sin^4 t\,dt$

الحل :

❶ بتطبيق دستور اويلر: $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ثم منشور ذي الحدين نجد :

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)$$

$$=\frac{2}{8}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\frac{3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\right)=\frac{1}{4}(\cos3x+3\cos x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(\cos3x+3\cos x)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos3x+3\cos x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin3x+3\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\left(\frac{1}{12}\sin3x+\frac{3}{4}\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{12}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{12}\sin(0)+\frac{3}{4}\sin(0)\right)=-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

❷ بتطبيق دستور اويلر: $\cos x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ ثم منشور ذي الحدين نجد :

$$\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{-1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3=\frac{-1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}-e^{-3ix}\right)$$

$$=\frac{-2}{8}\left(\frac{e^{3ix}-e^{3ix}}{2i}-\frac{3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{2i}\right)=-\frac{1}{4}(\sin3x-3\sin x)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3\sin x}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{-4\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}=\lim_{x\to0}(-4\cos^3 x)=-4$$

❸

$$\sin^4 x=\frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{2}{16}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}-4\frac{\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)}{2}+\frac{6}{2}\right)=\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin4x-\frac{4}{2}\sin2x+3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\left(\frac{1}{32}\sin4x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{3}{8}x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{32}\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-(0)=\frac{3\pi}{16}$$

❹ بتطبيق دستوري أويلر : $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$\cos x\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4=\frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$

$$=\frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$

$$=\frac{1}{32}\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)\left(e^{3ix}-3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}-e^{-3ix}\right)$$

$$=\frac{2}{32}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}-3\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)+2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\right)=\frac{1}{16}(\cos5x-3\cos3x+2\cos x)$$

$$F(x)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin5x-\frac{3}{3}\sin3x+2\sin x\right)=\frac{1}{80}\sin5x-\frac{1}{16}\sin3x+\frac{1}{8}\sin x$$

وبما أنّ $\sin^5 x=\frac{1}{16}\sin5x-\frac{5}{16}\sin3x+\frac{5}{8}\sin x$ يكون : $\int\cos x\sin^4 x\,dx=\frac{1}{5}\sin^5 x+c$

الاختبار 1

احسب قيمة r إذا علمت أنّ : $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$

الحل :

شرط الحل $0 \leq r \leq 4$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad : n \geq r$$

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}} \Rightarrow \frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(5-r)!\,r!}{5!} + \frac{(6-r)!\,r!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5 \times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6 \times 5 \times 4!}$$

$$30 = 6(5-r) + (6-r)(5-r) = 0 \Rightarrow 30 - 6r + 30 - 6r - 5r + r^2 - 30 = 0$$

$r^2 - 17r + 30 = 0(r-15)(r-2) = 0 \Rightarrow r = 15$ مرفوض , $r = 2$ مقبول

الاختبار 2

التمرين الرابع :

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة اشخاص
بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علما " ان في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها "

الحل :

الطريقة الاولى : جميع اللجان التي ممكن تشكيلها – اللجان المتشكلة التي تحوي المتخاصمين

عدد الطرق $= P_5^3 - (P_2^2 \times P_3^1 \times 3) = 60 - 18 = 42$

الطريقة الثانية : اما اللجنة لا تحوي المتخاصمان او اللجنة تحوي متخاصم واحد واخران غير متخاصمان

عدد الطرق $= P_3^3 + (P_2^1 \times P_3^2) \times 3 = 6 + 36 = 42$

الاختبار 4

السؤال الثاني :

لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

❶ ما عدد الأعداد المكوّنة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المؤلّفة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S
وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

الحل :

❶ المئات لها 6 طرق والعشرات لها 5 طرق والآحاد لها 4 طرق وبالتالي عدد الأعداد $6 \times 5 \times 4 = 120$

❷ المئات لها طريقتين :$\{2, 3\}$ والآحاد لها طريقة واحدة : $\{5\}$

عدد طرق المنزلتين (باستثناء حالات التشابه لان الارقام مختلفة) هي : $(2 \times 1) - 0 = 2$

والعشرات 4 طرق وبالتالي عدد الأعداد $2 \times 4 = 8$

النموذج الوزاري الثالث

السؤال الرابع :

ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

الحل :

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r=\binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r=\binom{8}{r}y^{16-2r}x^{-8+r}x^ry^{-r}=\binom{8}{r}x^{2r-8}y^{16-3r}$$

$$2r-8=2\quad\Rightarrow r=5\qquad\&\quad 16-3r=1\ \Rightarrow r=5$$

بالتالي أمثال الحد x^2y هي : $\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$

النموذج الوزاري الرابع

التمرين الرابع :

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$

الحل :

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r=\binom{8}{r}x^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{8}{r}x^{8-r}x^{-r}=\binom{8}{r}x^{8-2r}$$

$$8-2r=0\quad\Rightarrow\quad r=4\Rightarrow T_4=\binom{8}{4}x^0=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

النموذج الوزاري الخامس

السؤال الثالث :

رف يحوي 7 كتب لمؤلّفين، ثلاث كتب للمؤلّف A وأربعة كتب للمؤلّف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلّف B.

❷ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلّف B في البداية

الحل:

❶يمكن اختيار الكتب الثلاثة الأولى بـ P_4^3 طريقة وباقي الكتب بـ P_4^4 وعدد الطرق

$P_4^3.P_4^4=(4\times3\times2).(4\times3\times2)=576$ طريقة

❷ يمكن اختيار الكتاب المعيّن بطريقة واحدو والباقي بـ P_6^6 وعدد الطرق

$1.P_6^6=6!=6\times5\times4\times3\times2=720$ طريقة

النموذج الوزاري السادس

التمرين الثالث :

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدّين $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$

الحل :

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r=\binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\binom{6}{r}x^{12-2r}x^{-r}=\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

$$12-3r=0\quad\Rightarrow\quad r=4\Rightarrow T_4=\binom{6}{4}x^0=\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

النموذج الوزاري 2019

السؤال الرابع :

لتكن المجموعة $S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

❶ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

❷ كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من S ؟

الحل :

❶ المئات لها 6 طرق والعشرات لها 6 طرق والآحاد لها 6 طرق وبالتالي عدد الأعداد $6 \times 6 \times 6 = 216$

❷ $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$

النموذج الوزاري الأول 2020

السؤال الثالث :

لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,8,9\}$ والمطلوب:

❶ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S؟

❷ كم عدداً من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S؟

الحل :

❶ المئات لها 5 طرق والعشرات لها 4 طرق والآحاد لها 3 طرق وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 4 \times 3 = 60$

❷ الآحاد لها طريقة واحدة $\{5\}$ والمئات لها 5 طرق والعشرات لها 5 طرق وبالتالي عدد الأعداد $1 \times 5 \times 5 = 25$

النموذج الوزاري الثاني 2020

السؤال الثالث :

يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع

❶ بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدراستها

❷ بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء

الحل :

❶ عدد الطرق $= 7! = 5040$ ❷ عدد الطرق $= 1 \times 1 \times 5! = 120$

النموذج الوزاري الثالث 2020

السؤال الثالث :

عين قيمة n في المعادلة الآتية: $P^5{}_{n+2} = 45P^3{}_{n+1}$

الحل :

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق :

$n + 1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 2$ و $n + 2 \geq 5 \Rightarrow n \geq 3$ بالتالي $n \geq 3$ و $n \in \mathbb{N}$

$$(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)(n - 2) = 45(n + 1)(n)(n - 1)$$

بما أن $n \neq -1$, $n \neq 0$, $n \neq -1$ نختصر فنحصل على

$(n + 2)(n - 2) = 45 \Rightarrow n^2 - 4 = 45 \Rightarrow n^2 = 49 \Rightarrow n = -7$ مرفوض , $n = 7$ مقبول

طريقة ثانية :

$$(n + 2)(n + 1)(n)(n - 1)(n - 2) - 45(n + 1)(n)(n - 1) = 0$$
$$\big((n + 1)(n)(n - 1)\big)\big((n - 2)(n + 2) - 45\big) = 0$$
$$\big((n + 1)(n)(n - 1)\big)(n^2 - 49) = 0$$
$$(n + 1)(n)(n - 1)(n + 7)(n - 7) = 0$$

$n = -1$ مرفوض , $n = 0$ مرفوض , $n = 1$ مرفوض , $n = -7$ مرفوض , $n = 7$ مقبول

دورة 2017 الأولى

السؤال الرابع :

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة

❶ بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

❷ بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الاسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية

الحل :

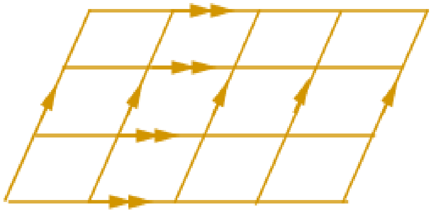
❶ عدد الأسئلة $n = 8$ يختار الطالب منها $r = 5$ ولا يهم الترتيب $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

❷ ثلاثة أسئلة اجبارية بالتالي يبقى 5 أسئلة نختار منها 2 بالتالي عدد الطرق $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$

دورة 2018 الأولى

السؤال الثالث :

في الشكل المجاور نتأمل شبكة منظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب :
احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة



الحل :

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{5\times4}{2} \times \frac{4\times3}{2} = 10 \times 6 = 60$$

دورة 2018 الثانية

السؤال الثالث :

في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمسة عمال
كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكن تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة

الحل :

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} = 3 \times \frac{5\times4}{2\times1} = 3 \times 10 = 30$$

دورة 2019 الأولى

السؤال الثاني :

عين الحد المستقل عن x في منشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{6}{r} x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{6}{r} x^{6-r} x^{-2r} = \binom{6}{r} x^{6-3r}$$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $6 - 3r = 0 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow T_2 = \binom{6}{2} x^0 = \frac{6\times5}{2\times12} = 15$

دورة 2019 الثانية

السؤال الثاني :

عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$

الحل :

شرط الحل $n \in \mathbb{N}$ و $2n \le 15 \Rightarrow n \le \frac{15}{2} \Rightarrow n \le 7$ و $n + 3 \le 15 \Rightarrow n \le 12$

وهذا يكافئ $0 \le n \le 7$ لهذه المعادلة حلان :

إما $2n + n + 3 = 15 \Rightarrow 3n = 12 \Rightarrow n = 4$ مقبول أو $2n = n + 3 \Rightarrow n = 3$ مقبول

دورة 2020 الأولى

السؤال الثالث :

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم: $0, 1, 2, 3, 4, 5$

❶ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل ❷ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

الحل :

❶ $6 \times 6 \times 6 = 216$ ❷ $6 \times 5 \times 4 = 120$

دورة 2020 الثانية

السؤال الثاني :

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة

❶ كم عدد النتائج المختلفة لهذا للسحب ❷ كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

الحل :

❶ $5^2 = 25$ ❷ المجموع فردي بالتالي الكرة الأولى فردية والثانية زوجية أو العكس $(3^1 \times 2^1) \times 2 = 12$

دورة 2021 الأولى

السؤال الثاني :

أوجد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في منشور ذي الحدّين $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$

$$T_r = \binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r = \binom{12}{r}(x)^{12-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{12}{r}(x)^{12-r}(x)^{-2r} = \binom{12}{r}x^{-3r+12}$$

$$-3r + 12 = 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow T_4 = \binom{12}{4}x^0 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

دورة 2021 الثانية

السؤال الثالث :

عين قيم n التي تحقق المعادلة $P^3_{n+3} = 16\binom{n+2}{2}$

شرط الحل $n \in \mathbb{N}$ و $n + 3 \geq 3 \Rightarrow n \geq 0$ و $n + 2 \geq 2 \Rightarrow n \geq 0$ و هذا يكافئ $n \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 16 \times \frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} \Rightarrow$$

بما أن $n \neq -3, n \neq -1$ نختصر فنحصل على $n + 3 = 8 \Rightarrow n = 5$

دورة 2022 الأولى

السؤال الخامس :

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الستة الآتية

العددين $+1$ أو -1 والمطلوب :

❶ بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة

❷ بفرض X متحول العشوائي يدل على مجموع الاعداد في الخانات الستة بعد ملئها عين مجموعة قيم X

❸ بكم طريقة يمكن أن ملء الخانات الستة ليكون مجموع الاعداد فيها يساوي الصفر

الحل :

❶ $2^6 = 64$ ❷ $X(\Omega) = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ ❸ $\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times 1 = 20$

دورة 2022 الثانية

السؤال السادس :

لتكن C دائرة مركزها O رسمنا فيها ستة اقطار مختلفة ولتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ مجموعة اطراف هذه الاقطار

❶ ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟ ❷ ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟

❸ كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

❶ $\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$ ❷ $\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$

❸ يتشكل المستطيل بقطرين من الاقطار الستة المرسومة في الدائرة بالتالي $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$