حل امتحان الرياضيات دورة 2023 .

السؤال الاول :

① ا ، ب ، ج   ② $f(2) = -1$

③ $]2,4]$

④ $f([-2,-1]) = [0,1]$

السؤال الثاني : $f(x) = x+2-E(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \in [0,1[\\ x+1 & ; x \in [1,2[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

ليس له نهاية عند ال 1

وبالتالي غير مستمر عند 1

f غير مستمر على المجال $[0,2[$

لأنه غير مستمر عند $x=1$

ب

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

السؤال الثالث :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

$$= \binom{10}{r} (2x)^{10-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r} (2x)^{10-2r} \cdot x^{-\frac{1}{2}r}$$

$$= \binom{10}{r} 2^{10-2r} \cdot x^{10-\frac{3}{2}r}$$

$$10 - \frac{3}{2}r = 4$$

$$20 - 3r = 8$$

$$3r = 12$$

$$r = 4$$

الحد الخامس

$$T_5 = \binom{10}{5} 2^{10-5} \cdot x^4$$

$$= \binom{10}{5} \cdot 2^5 \cdot x^4 = \boxed{}$$

يحوي حد مستقل عن x عندما

$$10 - \frac{3}{2}r = 0$$

$$10 = \frac{3}{2}r$$

$$r = \frac{20}{3}$$

وهذا لا يمكن لأنه r عدد طبيعي بدون فواصل أي لا يحوي حد مستقل عن x

السؤال الثاني :

$\vec{n}_Q = \vec{n}_p(1,-1,3)$

معادلة المستوى Q

$\vec{n}_Q(1,-1,3)$ $\quad A(1,-1,2)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-1)-1(y+1)+3(z-2)=0$

$Q: x-y+3z-8=0$

② معادلة الكرة

$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{1+1+4}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad I(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},3)$

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-3)^2=\frac{3}{2}$

السؤال السادس :

$n=5 \quad P=\frac{1}{4}$

تجربة برنولية

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

$P(x\geq 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$

$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^5$

$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot(\frac{1}{4})^1\cdot(\frac{3}{4})^4$

الاستاذ: أحمد شروري

السؤال الرابع :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{\ln(x+1)} & ; x\in]0, \\ 0 & ; x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر

f مشتقة على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

$$P(x\geq 2)=1-\left[\frac{243+405}{1024}\right]$$

$$=1-\frac{648}{1024}=\frac{376}{1024}$$

② $E(x)=n.P=5\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$V(x)=n.P.q=\frac{1}{4}\cdot 5\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$

ثانياً:

التمرين الأول: $f(x) = ax+b-\frac{\ln x}{x}$

① لكي يمر الخط ج بالنقطة $A(1,6)$

$f(1)=6$

$a+b-0=6 \Rightarrow$

$\boxed{a+b=6}$ *

يقبل مماساً في A ، ميله ٣ فإن

$f'(1)=3$

$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = a - \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(1)=3$

$a - \frac{1-0}{1} = 3$

$\boxed{a=4}$

نعوض في *

$\boxed{b=2}$

$f(x) = 4x+2-\frac{\ln x}{x}$

② أثبت $y=4x+2$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = 0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(4x+2-\frac{\ln x}{x}-(4x+2)\right)$

$=0$

ومنه $y=4x+2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y = -\frac{\ln x}{x}$

في المجال $]0,1[$ $f(x)-y<0$

C تحت y

في المجال $]1,+\infty[$ تكون

$f(x)-y>0$

C فوق y

③ $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(4x+2-\frac{\ln x}{x}\right)dx$

$= \left[2x^2+2x-\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^2$

$= 12-\ln 2-4 = 8-\ln 2$

الاستاذ: أحمد ناوري
0994446057

التمرين الثاني:

$$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{3+i\sqrt{3}-2}$$

$$= \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$$

$$\frac{a-c}{d-c} = i\sqrt{3}$$ تخيلي

$$\frac{a-c}{d-c} = \sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$(CA) \perp (CD)$$

فالمثلث DCA قائم في C

② N صورة B وفق تحاكي مركزه A ونسبته $K=2$

$$n-a = k(b-a)$$

$$n-(-1+i\sqrt{3}) = 2\left(\tfrac{1}{2}(-3+i\sqrt{3}) - a\right)$$

$$(-1+i\sqrt{3})$$

$$n - (-1+i\sqrt{3}) = -3+i\sqrt{3}+2-2i\sqrt{3}$$

$$n+1-i\sqrt{3} = -1-i\sqrt{3}$$

$$\boxed{n=-2}$$

③ بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة

$(A,2)$, $(D,-1)$, $(C,1)$

$$g = \frac{2a-d+c}{2-1+1}$$

$$g = \frac{-2+2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}+2}{2}$$

$$g = \frac{1}{2}(-3+i\sqrt{3}) = b$$

وبالتالي B هي م-أ-م ل

$(A,2)$, $(D,-1)$, $(C,1)$

الأستاذ: أحمد [illegible]اوري

التمرين الثالث:

$$U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 1}$$

$$U_0 = 2$$

① نبرهن صحة القضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$2 \le U_0 \le 5$$

$$2 \le 2 \le 5$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$2 \le U_n \le 5 \quad *$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$2 \le U_{n+1} \le 5$$

بما أن $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

f متزايد تماما

بما أن f متزايد نأخذ f للأطراف $*$

$$f(2) \le f(U_n) \le f(5)$$

$$3+\sqrt{2-1} \le U_{n+1} \le 3+\sqrt{5-1}$$

$$2 \le 4 \le U_{n+1} \le 5$$

$$2 \le U_{n+1} \le 5$$

إذاً العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

② للإثبات أن المتتالية U_n متزايدة
يجب أن نبرهن

$$U_{n+1} \ge U_n$$

نبرهن القضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n=0$

$$U_1 \ge U_0$$

$$3+\sqrt{2-1} \ge 2$$

$$3+1 \ge 2$$

$$4 \ge 2$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$U_{n+1} \ge U_n \quad **$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$U_{n+2} \ge U_{n+1}$$

نأخذ f للأطراف $**$

لأن f متزايد

$$f(U_{n+1}) \ge f(U_n)$$

$$U_{n+2} \ge U_{n+1}$$

حسب الاستقراء الرياضي U_n متزايدة

بما أن U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 5

فهي متقاربة

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 5$$

المسألة الأولى:

(1)

$A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$

$C(4,4,0)$ $D(0,4,0)$

$E(0,0,3)$

(2)

$$4\vec{CM} = 3\vec{CE}$$

$M(x,y,z)$

$$\vec{CM} = \frac{3}{4}\vec{CE}$$

$$(x-4, y-4, z) = \frac{3}{4}(-4,-4,3)$$

$x-4 = -3 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$y-4 = -3 \Rightarrow y = 1$

$z = \frac{9}{4}$

$M(1, 1, \frac{9}{4})$

(3)

$\vec{EB} \cdot \vec{BC}$

$= (4,0,-3)(0,4,0)$

$= 0+0+0 = 0$

$\vec{EB} \perp \vec{BC}$

المثلث قائم في B

$$S = \frac{EB \times BC}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{16+0+9} \cdot \sqrt{0+16+0}}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

(4) معادلة مستقيم (EC)

$\vec{V} = \vec{EC}(4,4,3)$ $E(0,0,3)$

$$(EC): \begin{cases} x = 0 + 4t \\ y = 0 + 4t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

(5) معادلة مستوي (EBC)

$\vec{n}(a,b,c)$ $B(4,0,0)$

$\vec{n} \cdot \vec{EB} = 0 \Rightarrow 4a - 3c = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow 4b = 0$

$\boxed{a=3}$ $\boxed{c=4}$ $\boxed{b=0}$

$\vec{n}(3,0,4)$

$3(x-4) + 0(y-0) + 4(z-0) = 0$

$3x + 4z - 12 = 0$

$$dist = \frac{|0+0-12|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{12}{5}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{12}{5}$$

$$= 8$$

المسألة الثانية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{2}{1} = -2$$

$y=-2$ مقارب أفقي لـ (C) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left[4-\frac{2}{e^x}\right]}{e^x\left[1+\frac{1}{e^x}\right]} = 4$$

$y=4$ مقارب أفقي للخط (C) في جوار $+\infty$

(2) f معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $]-\infty,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{4e^x(e^x+1) - e^x(4e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{6e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

f متزايد

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	-2	$\nearrow$	4

(3) $f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{3}{2}$

$$T: y = \frac{3}{2}x + 1$$

(4) $y_h = f(x) - y_T$

$$g(x) = \frac{4e^x-2}{e^x+1} - \frac{3}{2}x + 1$$

ندرس تغيرات $g(x)$

g معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{6e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{3}{2}$$

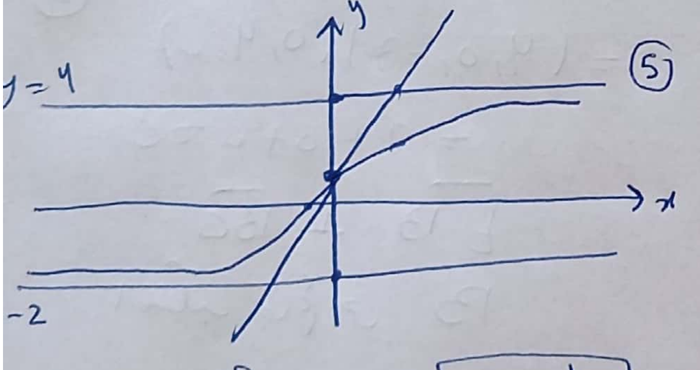
$g'(x) = 0$

$\boxed{x=0}$

$g(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
		فوق		تحت	

(5)



$y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=-\ln 2}$

(6) $(x) = \frac{6e^x}{e^x+1} = \frac{4e^x-2+2e^x+2}{e^x+1}$

$$\frac{4e^x-2}{e^x+1} + 2 = f(x)+2$$

C_h ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(0,2)$