النهايات والاستمرار

أ. نهايات التابع عند اللانهاية $\pm\infty$

إذا كانت التابع f معرف على المجال من الشكل $]a,+\infty[$ أو $]-\infty,a[$

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

ونقول عنه $y=b$

$\Leftarrow$ إن المستقيم $y=b$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f عند $\pm\infty$

ملاحظة: عند نهاية كسر فيه البسط لها قيم كثيرة حدود لوجود مقارب أفقي نهايتي

① درجة البسط أصغر من درجة المقام $\lim_{x\to\pm\infty} = 0$ أكبر من

② درجة البسط تساوي درجة المقام

$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{\text{أكبر من البسط}}{\text{أكبر من المقام}}$

مثال

① $f(x) = \dfrac{4x^2+x}{2x^2+1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} : \dfrac{4x^2}{2x^2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$\Leftarrow y=2$ مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

② $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$\lim_{x\to\pm\infty} : \dfrac{2x}{x} = 2$

$\Leftarrow y=2$ مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$

③ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

أخرج x عامل مشترك مقام

$f(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

في حالة $x\to+\infty \Leftarrow x>0 \Leftarrow |x| = x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \Rightarrow 1$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

في حالة $x<0$

$= -1 \quad \dfrac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$y=-1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

في حالة الثانية: اذا كانت التابع f
معرف على مجال من الشكل
$]-\infty, a[$ او $]a, +\infty[$

$\Leftarrow$ اذا $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

عند نهاية تابع كثير الحدود
عند $+\infty$ في نهاية اذا المعرفين
هي الاشارة

نهاية كسر فيه البسط والمقام كثير الحدود

اذا كانت البسط اكبر من المقام
$\lim_{x \to \pm\infty}$ = البسط مع الاشارة / المقام مع الاشارة

امثلة:

$f(x) = -4x^2 - 2x + 1$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)(-4x^2) = -\infty$

$f(x) = 6x^2 + 5x + 2$

$\lim_{x \to \pm\infty} = (6x^2) = +\infty$

امثلة محلولة:

① $f(x) = \frac{-2x^2 - 1}{x + 1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (-2x)$

$= -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x^2}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} (-2x)$ اذا

$= +\infty$

② $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} = \frac{x^3}{x^2} = x = \lim_{x \to \pm\infty} : \pm\infty$

حالات نهاية عند sin و cos

لـ لتابع sinx ليس له نهاية
عند الـ ∞+ و ∞-

تابع sinx هو تابع دوري وليس
ثابت وبالتالي لا يملك له نهاية
لـ ∞±

سندرس الآن حالات عدم التعيين
وهي

هناك عدة حالات عدم التعيين وهم
$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$

الحالة الاولى $\frac{\infty}{\infty}$ لدينا شكلين

استعمال يوجد في هذه البسط أم المقام
نخرج الحد المسيطر من البسط والمقام كعامل
مشترك ثم نختصر

ليكن f(x) تتضمن كثير حدود نقط
نميز ثلاث أشكال

الشكل الأول
درجة الحد المسيطر البسط أصغر من المقام

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

مثال

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+2x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

لأنه عدد على لانهاية يساوي صفر

الشكل الثاني
درجة البسط يساوي درجة المقام

البسط / المقام

$$\lim_{x \to \pm\infty}$$ أكبر

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{3x}{x} = 3$$

$$f(x) = \frac{6x-4}{2x+1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{6x}{2x} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{6}{2} = 3$$

الشكل الثالث درجة البسط أكبر من درجة المقام

البسط / المسيطر - المقام / المسيطر

$$\lim_{x \to \pm\infty}$$ أكبر

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x+2}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (3x) = +\infty$

لان $+\infty$ في $+\infty$ تساوي $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (+3x^2) = -\infty$

لان ناقص لانهاية بزائد لانهاية تساوي ناقص لانهاية

$+\infty + +\infty$	$= +\infty$
$-\infty + +\infty$	$= -\infty$
$-\infty - \infty$	$= -\infty$
$\frac{\text{عدد}}{\infty}$	$= 0$
$\frac{\infty}{\text{عدد}}$	$= \infty$
$\frac{0}{\infty}$	$= 0$

الحالة الثالثة $\infty - \infty$ عند $\pm\infty$ بناء

شكل الدالة

$$\sqrt{ax^2 + bx - c} - ax$$

جذر العدد المرفوع لأس الجذر بجانب الجذر

لهذه حالة نستخدم ضرب بالمرافق

① $\sqrt{x^2+1} - x \quad \infty - \infty$

حالة عدم تعيين ضرب المرافق

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

② الشكل الثاني

جذر العدد المرفوع لأس الجذر ≠ خارج الجذر

نقوم بإخراج x عامل مشترك

مثال

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} - x \quad \infty - \infty$$ حالة عدم تعيين

$$= \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)} - x$$

أخرج x^2 عامل مشترك $\sqrt{x^2}, \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - x$

$\sqrt{x^2} = -x$ لأن $x < 0$

$$= -x\left(x\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + 1\right)$$

$$= +\infty\left(-\infty\sqrt{\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{\infty}} - \infty\right)$$

$$= +\infty\left(-\infty\sqrt{0 - 0} - \infty\right)$$

$+\infty(-\infty,0) = -\infty$

$-\infty(-\infty,-\infty) = +\infty$

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

الحالة الثالثة $\frac{0}{0}$ شكل

1- أنشر المقدار البسط والمقام

2- حلل البسط والمقام

3- إختصر $(x-a)$

4- إذا لم يوجد جذر في البسط والمقام

جرب تقسم بالمرافق لإختصار $(x-a)$

نهايات شهيرة: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

الحالة الرابعة $\infty - \infty$

نغير شكل المقدار حتى نتخلص من اللانهاية

تمرين:

① $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3}$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}$

③ $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$

④ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - \sin^2 x}{x^2}$

⑥ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^2 x + \tan x)}{x^2}$

حل على دفاتر كم