Subject :

/ /

[1] المبحث الأول : المثلثات

[2] قوانين هامة

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

3) $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

4) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

5) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

6) $\sin(x \mp y) = \sin x . \cos y \mp \cos x . \sin y$

7) $\cos(x \mp y) = \cos x . \cos y \pm \sin x . \sin y$

8) $\sin(x+y) . \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

9) $\cos(x+y) . \cos(x-y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$

10) $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x . \cos y}$

11) $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

12) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

/ /

برهن صحة مايلي :

$\boxed{1}$ $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x . \cos y}$

الحل :

$l_1 = \tan x + \tan y = \dfrac{\sin x}{\cos x}_{\times \cos y} + \dfrac{\sin y}{\cos y}_{\cos x}$

$= \dfrac{\sin x . \cos y}{\cos x . \cos y} + \dfrac{\sin y . \cos x}{\cos y . \cos x} = \dfrac{\sin x . \cos y + \sin y . \cos x}{\cos x . \cos y}$

$= \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x . \cos y} = l_2$

هـ.م

$\boxed{2}$ $\sin 8x = 8 \sin x . \cos x . \cos 2x . \cos 4x$

الحل :

$l_1 = \sin 8x = 2 \sin 4x . \cos 4x$

$= 4 \sin 2x . \cos 2x . \cos 4x = 8 \sin x . \cos x . \cos 2x . \cos 4x$
$= l_2$

دساتير التحويل من الجمع الى ضرب :

1) $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

2) $\sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} . \sin \dfrac{x-y}{2}$

3) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} . \cos \dfrac{x-y}{2}$

4) $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} . \sin \dfrac{x-y}{2}$

Subject : .... / /

دساتير التحويل من الجداء الى مجموع أو فرق

1. $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

2. $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$

3. $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\right\}$

4. $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}\left\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\right\}$

سؤال# برهن ما يلي :

1. $\cos(45+x) - \cos(45-x) = -\sqrt{2}\ \sin x$

$l_1 = -2\sin 45 \cdot \sin x = -\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \sin x$

$= -2\sqrt{2} \cdot \sin x = l_2$

2. $\sin(60+x) - \sin(60-x) = \sin x$

$l_1 = 2\cos 60 \cdot \sin x = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sin x = \sin x = l_2$

انتهى البحث الأول.

Subject :

/ /

البحث الثاني : الهندسة التحليلية .

[1] - معادلة مستقيم يمر بنقطة (x_1, y_1) ومعلوم ميله m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

[2] - شرط توازي مستقيمين : $m_1 = m_2$

[3] - شرط تعامد مستقيمين : $m_1 \cdot m_2 = -1$

حيث m_1 ميل المستقيم الأول ، m_2 ميل المستقيم الثاني

[4] - بعد نقطة (x_0, y_0) عن المستقيم الذي معادلته $ax+by+c=0$

$$L = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

المعادلة يجب أن تكون بالشكل العام

[5] ملاحظة : ميل مستقيم معادلته بالشكل العام $ax+by+c=0$ هو : $m = \frac{-a}{b}$

مثال :

مستوٍ منسوب إلى الجملة xoy لدينا المستقيم الذي معادلته $2x-y+3=0$ والنقطة $a(-1,3)$ المطلوب

1) أوجد معادلة المستقيم المار من a ويوازي المستقيم المفروض

2) = = = a ويعامده

3) أوجد بعد النقطة a عن المستقيم المفروض .

الحل :

1) $m_1 = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{-1} = +2$

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftarrow$

$$y - 3 = 2(x+1)$$

2) شرط تعامد مستقيمين : $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_1 = 2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$

معادلة المستقيم : $y - y_1 = m_2(x - x_1)$

$$\Rightarrow \quad y-3=-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$L=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow L=\frac{|2(-1)-(3)+3|}{\sqrt{4+1}} \quad \boxed{3}$$

$$L=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

الاشتقاق :

١) مشتقة العدد الثابت : $y=a \Rightarrow y'=0$

٢) مشتقة التابع من الدرجة الأولى : $y=ax+b \Rightarrow y'=a+0$

٣) مشتقة تابع قوة : $y=x^n \Rightarrow y'=n\,x^{n-1}$

٤) مشتقة جداء تابعين :

القاعدة : مشتق الأول × الثاني + مشتق الثاني × الأول

$$y=u.v \Rightarrow y'=u'.v+v'.u$$

٥) مشتقة كسر :

القاعدة : $\dfrac{\text{مشتق البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتق المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$

٦) مشتقة جذر :

القاعدة : $\dfrac{\text{مشتق ما تحت الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

$$y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Subject :

/ /

7. مشتق تابع التابع :

$y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

8. التابع الضمني :

$x^2 - 3y^2 + 2x - y = 4$

المشتق :

$2x - 6yy' + 2 - y' = 0$

$\rightarrow y' = \frac{2x+2}{6y+1}$

9. مشتق التابع اللوغاريتمي :

$y = \ln(g(x)) \rightarrow y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$\boxed{\text{مثال :}}$

1. $y = \ln(2x+7)$

$\rightarrow y' = \frac{2}{2x+7}$

10. مشتق التابع الأسي :

$y = e^{g(x)} \rightarrow y' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

$\boxed{\text{مثال :}}$

$y = 2e^{3x}$

$y' = 6e^{3x}$

انتهى البحث الثاني

Subject : / /

المبحث الثالث: الدائرة

- نبين ما يستخدم لشكل معادلة الدائرة؟

① الشكل المختزل:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

* حيث مركزها هو (x_0,y_0)
* نصف قطرها هو R.

ملاحظة: اذا كان مركز الدائرة هو المبدأ تصبح المعادلة: $x^2+y^2=R^2$

② الشكل العام:

$$x^2+y^2+bx+dy+c=0$$

* مركزها:

$(x_0,y_0) \longrightarrow x_0=\frac{b}{-2} \quad y_0=\frac{d}{-2}$

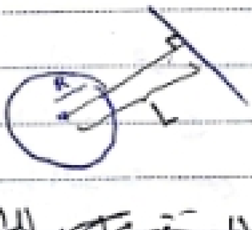
* نصف قطرها: $R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$

* دراسة وضع نسبي لدائرة مع مستقيم:

① $R>L$

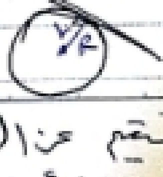
المستقيم يقطع الدائرة بنقطتين

② $R<L$



المستقيم خارج الدائرة

③ $R=L$ المستقيم مماس للدائرة



حيث L هو بعد المستقيم عن الدائرة، R هو نصف قطر الدائرة.

مثال: في مستوٍ محدد بجملة معامدة نظامية دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-2x-3=0$$

والمستقيم الذي معادلته $x-3y+9=0$

1 - عين مركز الدائرة ونصف قطرها.

2 - ما الوضع النسبي للدائرة والمستقيم.

الحل: $\boxed{1}$

$$x_0=\frac{b}{-2} \Rightarrow x_0=\frac{-2}{-2} \Rightarrow x_0=1$$

$$y_0=\frac{d}{-2} \Rightarrow y_0=\frac{0}{-2} \Rightarrow y_0=0$$

المركز $(1,0)$

نصف القطر:

$$R=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c} \Rightarrow$$

$$R=\sqrt{1+0+3} \Rightarrow R=\sqrt{4}=2$$

$\boxed{2}$

$$L=\frac{|(1)-3(0)+9|}{\sqrt{1+9}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$$L=\sqrt{10} > R=2$$

اذاً المستقيم خارج الدائرة.

* قوة نقطة:

قوة نقطة بالنسبة الى دائرة هي عدد حقيقي:

1 عندما A_1 داخل الدائرة $\Leftarrow$ $F(A_1)<0$

2 " A_2 على محيط الدائرة $\Leftarrow$ $F(A_2)=0$

3 " A_3 خارجه $\Leftarrow$ $F(A_3)>0$

Subject :

مثال: في مستوي محدث بجملة متعامدة نظامية دائرة معادلتها:

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

ادرس وضع النقط $A_1(4,6)$ $A_2(+1,-1)$ $A_3(-1,3)$

الحل:

$$F(A_1)=16+36+16+12-20=60>0$$

A_1 خارج الدائرة

$$F(A_2)=1+1-4-2-20=-24<0$$

A_2 داخل الدائرة.

$$F(A_3)=1+9+4+6-20=0$$

A_3 على الدائرة.

مثال:

في مستوي محدث بجملة قانونية اوجد معادلة دائرة تمر بالنقط:

$A(0,0)$ $B(0,1)$ $C(1,0)$

الحل:

معادلة الدائرة من الشكل:

$$x^2+y^2+bx+dy+c=0$$

$A(0,0) \rightarrow 0+0+0+0+c=0 \rightarrow c=0$

$B(0,1) \rightarrow 0+1+0+d+0=0 \rightarrow d=-1$

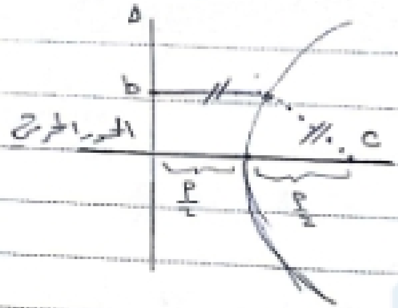
$C(1,0) \rightarrow 1+0+b+0+0=0 \rightarrow b=-1$

تصبح معادلة الدائرة $x^2+y^2-x-y=0$

انتهى البحث الثالث.

البحث الرابع : القطع المكافئ :

هو مجموعة نقاط المستوي التي بعدها عن نقطة ثابتة C (البؤرة) يساوي بعدها عن مستقيم ثابت Δ



عناصر القطع :

- O ذروة القطع المكافئ
- c بؤرة القطع المكافئ
- Δ دليل = =
- p وسيط القطع المكافئ

الشكل العام لمعادلة القطع المكافئ :

$x = ay^2 + by + d$ محور التماثل $// xx'$

$y = ax^2 + bx + d$ محور التماثل $// yy'$

أشكال معادلات القطع المكافئ عندما تكون ذروة القطع هي المبدأ (O) :

1 $y^2 = +2px$

- ذروته المبدأ O
- محور التماثل xx'
- تقعره نحو Ox^+
- بؤرته $C(\frac{p}{2}, 0)$
- دليله $\Delta: x = -\frac{p}{2}$

3 $x^2 = +2py$

- ذروته المبدأ O
- محور التماثل yy'
- تقعره نحو Oy^+
- بؤرته $C(0, \frac{p}{2})$
- دليله $\Delta: x = \frac{p}{2}$

2 $y^2 = -2px$

- ذروته المبدأ O
- محور التماثل xx'
- تقعره نحو Ox^-
- بؤرته $C(-\frac{p}{2}, 0)$
- دليله $\Delta: x = \frac{p}{2}$

4 $x^2 = -2py$

- ذروته المبدأ O
- محور التماثل yy'
- تقعره نحو Oy^-
- بؤرته $C(0, -\frac{p}{2})$
- دليله $\Delta: x = \frac{p}{2}$

Subject : ………… / /

مثال في مستوي منسوب الى محورين متعامدين جد عناصر المعادلة التالية مع تكامل
معينها ° (الذروة المحور المحرق الدليل) .

$x^2 - 8y = 0$

الحل :

$x^2 = 8y$

- الذروة : هي المبدأ $O(0,0)$
- المحور الحرقي yy' ، التقعر نحو: Oy^+
- الوسيط :

$2p = 8 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow \frac{p}{2} = 2$

- محرق $C(0, \frac{p}{2}) \Leftarrow C(0, 2)$
- دليله : $\Delta: x = \frac{p}{2} \Leftarrow \Delta: x = 2$

اشكال معادلات القطع المكافئ عندما لا تنطبق الذروة $A(x_0, y)$ على المبدأ نرافق الحالات:

1 $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

الذروة : $A(x_0, y_0)$

المحور الحرقي : $// xx'$

التقعر : Ox^+

المحرق : $C(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$

الدليل : $\Delta: x = x_0 - \frac{p}{2}$

2 $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

الذروة : $A(x_0, y_0)$

المحور الحرقي : $// xx'$

التقعر : Ox^-

المحرق : $C(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$

الدليل : $\Delta: x = x_0 + \frac{p}{2}$

3 $(x - x_0)^2 = +2p(y - y_0)$

الذروة : $A(x_0, y_0)$

المحور الحرقي : $// yy'$

التقعر : Oy^+

المحرق : $C(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$

الدليل : $\Delta: y = y_0 + \frac{p}{2}$

4 $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

الذروة : $A(x_0, y_0)$

المحور الحرقي : $// yy'$

التقعر : Oy^-

المحرق : $C(x_0, y_0 - \frac{p}{2})$

الدليل : $\Delta: y = y_0 - \frac{p}{2}$

مثال: اكتب معادلة القطع المكافئ اذا كان:

الذروة $A(0,1)$ الدليل $\Delta: x=-2$

الحل:

بالمقارنة بين الذروة والدليل نجد أن محور القطع هو xx'

تقعره نحو ox^+

اذاً معادلة المنحني من الشكل: $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

حساب الوسيط p : نعلم أن

$\Delta: x=-2$

$x = x_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow -2 = 0 - \frac{p}{2} \Rightarrow -\frac{p}{2} = -2 \Rightarrow p=4 \Rightarrow \boxed{2p=8}$

اذاً المعادلة من الشكل: $(y-1)^2 = 8(x-0)$

مثال: حدد عناصر المعادلة التالية بعد تحويلها لشكلها النظامي:

$y^2+2y-2x-7=0$

الحل:

$y^2+2y = +2x+7 \rightarrow y^2+2y+ \ \ = 2x+7$

$\Rightarrow y^2+2y+1 = 2x+8$

$(y+1)^2 = 2(x+4)$

وهي من الشكل $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

محور القطع: xx' تقعره نحو ox^+

الوسيط: $2p=2 \Rightarrow p=1 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$

الذروة: $A(-4,-1)$

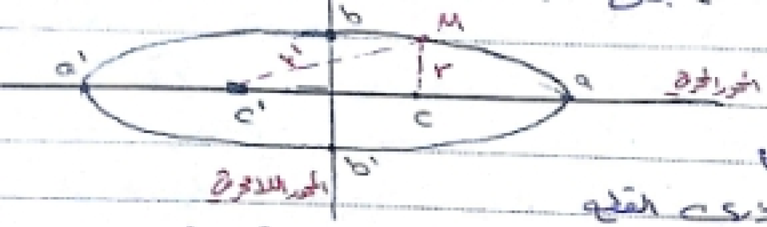
المحرق: $C(x_0+\frac{p}{2}, y_0) \Rightarrow C(-4+\frac{1}{2}, -1) \Rightarrow C(-\frac{7}{2}, -1)$

الدليل: $\Delta: x = x_0 - \frac{p}{2} \rightarrow x = -4 - \frac{1}{2} \rightarrow \Delta: x = -\frac{9}{2}$

انتهى البحث الرابع

البحث الخامس : القطع الناقص :

مجموعة نقاط المستوي التي مجموع بعد كل منها عن نقطتين ثابتتين c, c' مقدار 2B



عناصر القطع :

* c, c' محرقي القطع
* a, a', b, b' رؤوس القطع
* B, G, D وسطاء القطع والعلاقة بينهم $B^2 = G^2 + D^2$
حيث B أكبرهم.
* r, r' نصفي القطرين المحرقيين حيث: $r + r' = 2B$

ملاحظات هامة:

$L[cc'] = 2D$ البعد المحرقي

$L[aa'] = 2B$ $L[bb'] = 2G$

ملاحظة هامة: معادلة القطع الناقص من الدرجة الثانية بالنسبة x, y وصاحب المقام الأكبر يدل ع المحور المحرقي.

① معادلة قطع ناقص محوره المحرقي xx' مركزه مبدأ o:

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{G^2} = 1$$

② معادلة قطع ناقص محوره المحرقي yy' ومركزه o:

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{G^2} = 1$$

③ معادلة قطع ناقص محوره المحرقي // xx':

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2} + \frac{(y-y_0)^2}{G^2} = 1$$

1- المركز: (x_0, y_0)

2- محوره المحرقي // xx'

3- المحرقان: $c(x_0+D, y_0)$ $c'(x_0-D, y_0)$

4- الرؤوس: $a(x_0+B, y_0)$ $a'(x_0-B, y_0)$

$b(x_0, y_0+G)$ $b'(x_0, y_0-G)$

5- نصفا القطرين المحرقيين:

$$r' = B + \frac{D(x-x_0)}{B}$$

$$r = B - \frac{D(x-x_0)}{B}$$

④ معادلة قطع ناقص محوره الكبير // yy' :

$$\frac{(y-y_0)^2}{B^2}+\frac{(x-x_0)^2}{G^2}=1$$

1- المركز (x_0, y_0)

2- المحور الكبير $// yy'$

3- البؤرتان : $c(x_0, y_0+D)$ $c'(x_0, y_0-D)$

4- الذروات : $a(x_0, y_0+B)$
$a'(x_0, y_0-B)$
$b(x_0+G, y_0)$ $b'(x_0-G, y_0)$

⑤ نصفا القطرين البؤريين :

$$r=B-\frac{D(y-y_0)}{B}$$

$$r'=B+\frac{D(y-y_0)}{B}$$

ملاحظات :

1- الدائرة الداخلية معادلتها : $x^2+y^2=B^2$
مركزها مركز القطع نصف قطرها B

2- الدائرة الخارجية معادلتها : $x^2+y^2=G^2$
مركزها مركز القطع نصف قطرها G

3- مساحة القطع الناقص : مساحة القطع الناقص $=B.G.\pi$

مثال :
اكتب معادلة القطع الناقص علماً :
مساحة القطع الناقص $=20\pi$
المحور الكبير $// xx'$ ، مركز القطع $A_0(2,3)$ ، $L[aa']=10$

الحل :

$$\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$$

$L[aa']=2B=10 \rightarrow B=\frac{10}{2}=5 \rightarrow \boxed{B=5}$

مساحة القطع :
مساحة القطع $=B.G.\pi$

$20\cancel{\pi}=5.G\cancel{\pi} \rightarrow G=\frac{20}{5} \rightarrow \boxed{G=4}$

معادلة القطع :

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1}$$

Subject :

ت 15: في مستوي منسوب الى معلم ديكارتي مجموعة نقط معادلتها:

$$9x^2+25y^2+36x-50y-839=0$$

1 - بين ان المنحني ناقص وعين عناصره (وسطاه) رؤوسه، بؤرتاه، طول كل من قطريه ومعادلتي دليليه

2 - احسب r, r' حيث نقطة من المنحني فاصلتها 8

الحل: $\boxed{1}$

$$9x^2+25y^2+36x-50y-839=0$$

$$9(x^2+4x)+25(y^2-2y)-839=0$$

$$9(x^2+4x+2^2-2^2)+25(y^2-2y+1^2-1^2)=839$$

$$9[(x+2)^2-4]+25[(y-1)^2-1]=839$$

$$9(x+2)^2-36+25(y-1)^2-25=839$$

$$9(x+2)^2+25(y-1)^2=900$$

$$\div 900$$

$$\frac{9(x+2)^2}{900}+\frac{25(y-1)^2}{900}=\frac{900}{900}$$

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{36}=1}$$

تمثل معادلة قطع ناقص محوره الاكبر $\parallel xx'$ من الشكل $\frac{(x-x_0)^2}{B^2}+\frac{(y-y_0)^2}{G^2}=1$

مركزه: $A(-2,1)$

$B^2=100 \rightarrow B=10$

$G^2=36 \rightarrow G=6$

$G^2+D^2=B^2 \rightarrow D^2=100-36 \Rightarrow D=8$

الرؤوس:

$a(x_0+B,y_0) \rightarrow a(8,1)$

$a'(x_0-B,y_0) \rightarrow a'(-12,1)$

$b(x_0,y_0+G) \rightarrow b(-2,7)$

$b'(x_0,y_0-G) \rightarrow b'(-2,-5)$.

البؤرتين:

$C(x_0+D,y_0) \rightarrow C(6,1)$

$C'(x_0-D,y_0) \rightarrow C'(-10,1)$

$\boxed{2}$

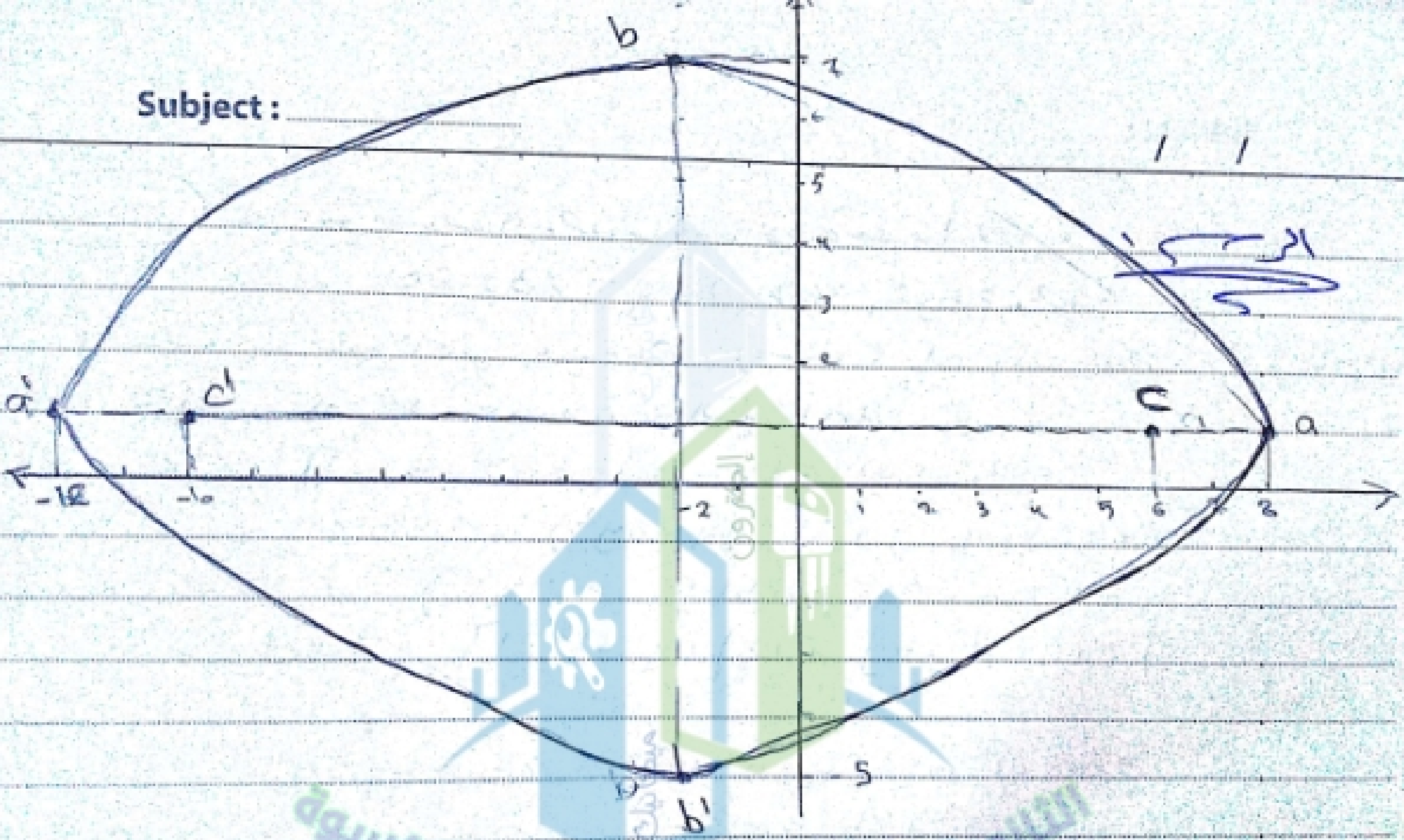
$r=B-\frac{D(x-x_0)}{B}=10-\frac{8(8+2)}{10}$

$\boxed{r=2}$

$r'=B+\frac{D(x-x_0)}{B}=10+\frac{8(8+2)}{10}$

$r'=18$

Subject :



انتهى البحث الخامس

Subject : / /

البحث السادس: القطع الزائد.

هو مجموعة نقاط المستوي التي يكون فرق بعدي كل منها عن النقطتين الثابتتين (المحرقين) مقدار $2B$

عناصر القطع:

- c , c' محرقي القطع
- a , a' : ذروتي القطع
- B , G , D معطاء القطع الجرم الوسط D $\qquad D^2=B^2+G^2$
- r , r' نصفي القطرين المحرقيين $\qquad |r-r'|=2B$

ملاحظات هامة:

$\underline{L[aa']=2B}$ المسافة بين الذروتين

$\underline{L[cc']=2D}$ المسافة بين المحرقين

ملاحظة: تكون B دائماً في المقام الذي يتبع له المحور المحرقي وبالتالي أكبر

شكل معادلات القطع الزائد:

1- معادلة قطع زائد محوره المحرقي xx' مركزه المبدأ O: $\frac{x^2}{B^2}-\frac{y^2}{G^2}=1$

2- معادلة قطع زائد محوره المحرقي yy' ومركزه المبدأ O: $\frac{y^2}{G^2}-\frac{x^2}{B^2}=1$

3- معادلة قطع زائد محوره المحرقي $\parallel xx'$:

1- محوره المحرقي: $\parallel xx'$

2- مركزه: (x_0 , y_0)

3- الذروتان: $a(x_0+B , y_0)$ ، $a'(x_0-B , y_0)$

4- المحرقان: $c(x_0+D , y_0)$ ، $c'(x_0-D , y_0)$

5- نصفا القطرين المحرقيين: $r'=\left|B+\frac{D(x-x_0)}{B}\right|$ ، $r=\left|B-\frac{D(x-x_0)}{B}\right|$

6- المقاربان: $y-y_0=\mp\frac{G(x-x_0)}{B}$

Subject : / /

٤- معادلة تقع ذات محوره المحرقي // yy' :

1- محوره المحرقي : // yy'

2- مركزه : $O(x_0, y_0)$

3- الذرى : $a(x_0, y_0+B)$, $a'(x_0, y_0-B)$

4- المحرقان : $c(x_0, y_0+D)$, $c'(x_0, y_0-D)$

5- نصفا القطرين المحرقيين :

$r' = \left| B + \frac{D(y-y_0)}{B} \right|$

$r = \left| B - \frac{D(y-y_0)}{B} \right|$

6- المقاربين :

$y - y_0 = \mp \frac{B(x-x_0)}{G}$

مثال :

في مستوي محدد بجملة متعامدة نظامية اوجد معطيات القطع الزائد (B,G,D) وعين مركزه والمحور المحرقي واوجد معادلة المستقيمين المقاربين وارسم المقاربين وارسمه

$64y^2 = 36x^2 + 144$

الحل :

$64y^2 - 36x^2 = 144$

$\div 144$

$\frac{64y^2}{144} - \frac{36x^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\frac{y^2}{22.5} - \frac{x^2}{4} = 1$

وهي من الشكل $\frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2}{G^2}$

المركز : $A_0(0,0)$

المعطيات :

$B^2 = 2.25 \Rightarrow B = 1.5$

$G^2 = 4 \Rightarrow G = 2$

$D^2 = B^2 + G^2 \Rightarrow D = 2.5$

محوره المحرقي هو yy'

المقاربين :

$y = \mp \frac{B\,x}{G}$

$y = \mp \frac{1.5\,x}{2}$

الذرى المحرقية :

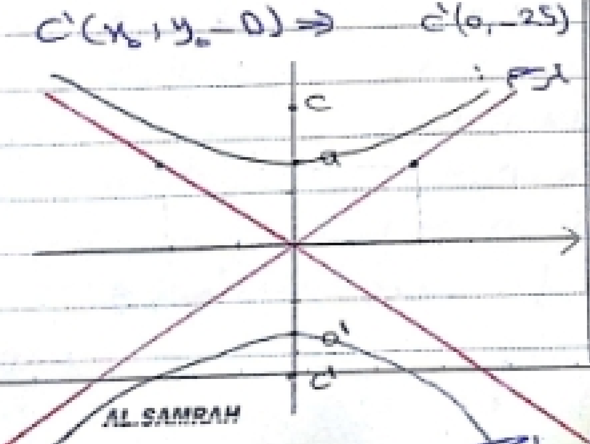
$a(x_0, y_0+B) \Rightarrow a(0, 1.5)$

$a'(x_0, y_0-B) \Rightarrow a'(0, -1.5)$

$c(x_0, y_0+D) \Rightarrow c(0, 2.5)$

$c'(x_0, y_0-D) \Rightarrow c'(0, -2.5)$

الرسم :



Subject : ....

/ /

المبحث السابع : التوابع

دراسة تحولات تابع ورسم خطه البياني :

1- نعين مجموعة التعريف ومجالات الاستمرار.

2- نبحث عن نهاية التابع عند كل طرف مفتوح من مجالات مجموعة التعريف ونعين قيمة التابع عند أطراف المجال المغلقة

3- نبحث عن القيم الحدية من دراسة إشارة المشتق الأول ونعين نوعها إن وجدت

4- نبحث عن نقطة الانعطاف (إن وجدت) من دراسة المشتق الثاني ونعين جهة التقعر

5- نبحث عن نقاط مساعدة لرسم الخط البياني وأهمها نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين

6- نرسم الخط البياني في مستوٍ منسوب إلى جملة متعامدة ونرسم المقاربات ونعين نقاط النهايات الحدية ونقطة الانعطاف والنقاط المساعدة.

3

سؤال: ادرس تحولات التابع بشكل كامل

$\boxed{④ \; y = x^2 + 4x + 5}$

الحل:
مجموعة التعريف $]-\infty , +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$

نبحث عن مقارب مائل معادلته بالشكل $y = mx + c$

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \mp\infty} x = \mp\infty$

المقارب هو المحور yy'

$y' = 2x + 4$

$y' = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4$

$x = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2$

$y = (-2)^2 + 4(-2) + 5$ نعوض بالتابع

$y = 4 - 8 + 5 \Rightarrow y = +1$

$(-2, 1)$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1 min	$\nearrow$	$+\infty$

$y'' = 2 > 0$ موجب دائماً
التقعر نحو yy' الموجب

نقاط التقاطع $(0, 5)$ ← $x = 0 \rightarrow y = 5$

$y = 0 \rightarrow 0 = x^2 + 4x + 5$

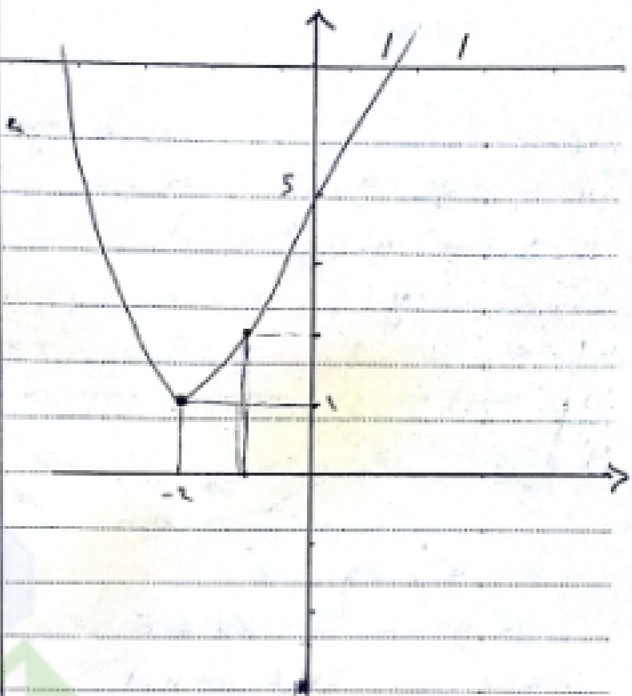
(لا داعي لإيجاد حلها لأنه مستحيل في $\mathbb{R}$)

نفرض نقاط مساعدة

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 4(-1) + 5$

$y = 1 - 4 + 5 \Rightarrow y = 2$

$(-1, 2)$



$\boxed{11}$ $y = \frac{-x+3}{x+2}$

$]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1$

$y=-1$ مستقيم مقارب // xx'

$\lim_{x \to +\infty} y = -1$

$y=-1$ مستقيم مقارب // xx'

$\lim_{x \to -2^-} y = \frac{-(-2)+3}{-2+2} = \frac{2+3}{0} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

$x=-2$ مستقيم مقارب // yy'

$\lim_{x \to -2^+} y = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$x=-2$ مستقيم مقارب // yy'

$y' = \frac{(-1)(x+2) - (1)(-x+3)}{(x+2)^2}$

$y' = \frac{-x-2+x-3}{(x+2)^2} \Rightarrow y' = \frac{-5}{(x+2)^2} < 0$

متناقصة دائماً

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	-1

$y'' = \frac{0(x+2)^2 - 2(x+2)(-5)}{(x+2)^4}$

$y'' = \frac{+10\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}}} \Rightarrow y'' = \frac{10}{(x+2)^3}$

لا يوجد نقاط انقلاب

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''	$-$	‖	$+$
تقعر	$\cap$ oy^-	‖	$\cup$ oy^+

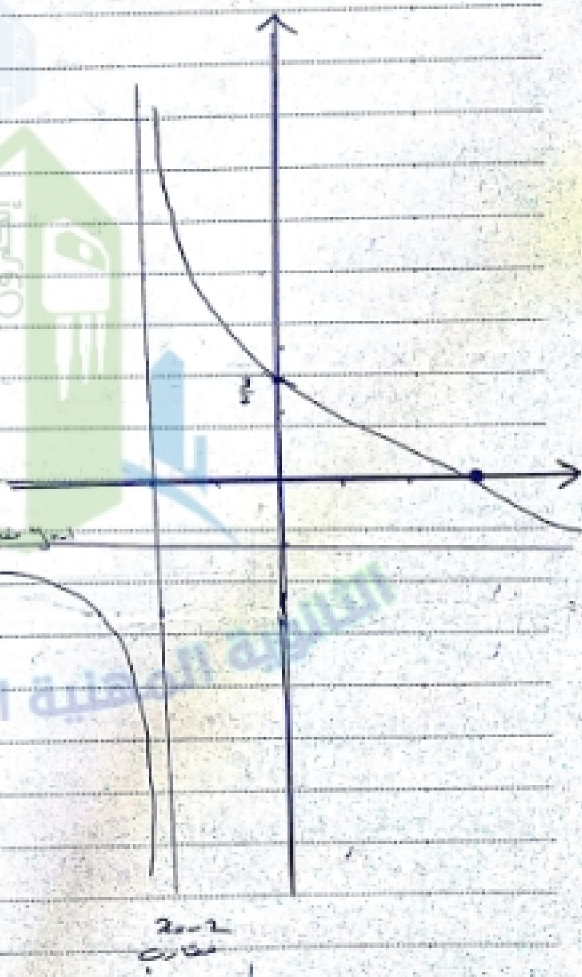
نقاط التقاطع مع المحاور :

$x=0 \rightarrow y = \frac{0+3}{0+2} \rightarrow y = \frac{3}{2}$

$(0, \frac{3}{2})$

$y=0 \rightarrow 0 = \frac{-x+3}{x+2} \rightarrow -x+3=0$

$(3, 0)$ $x=3$



$x=-2$ مقارب

$\boxed{12}$ $y = \frac{x}{x+1}$

$]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$

$y=1$ مستقيم مقارب $// \; xx'$

$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

$y=1$ مستقيم مقارب $// \; xx'$

$\lim_{x \to -1^{<}} y = \frac{-1}{-1+1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

$x=-1$ مستقيم مقارب $// \; yy'$

$\lim_{x \to -1^{>}} y = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x=-1$ مستقيم مقارب $// \; yy'$

$y' = \frac{(1)(x+1)-(1)(x)}{(x+1)^2}$

$y' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

متزايدة دائماً

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

$y'' = \frac{0.(x+1)^2 - 2(x+1)(1)}{(x+1)^4}$

$y'' = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \frac{-2}{(x+1)^3}$

لا يوجد نقاط انقلاب

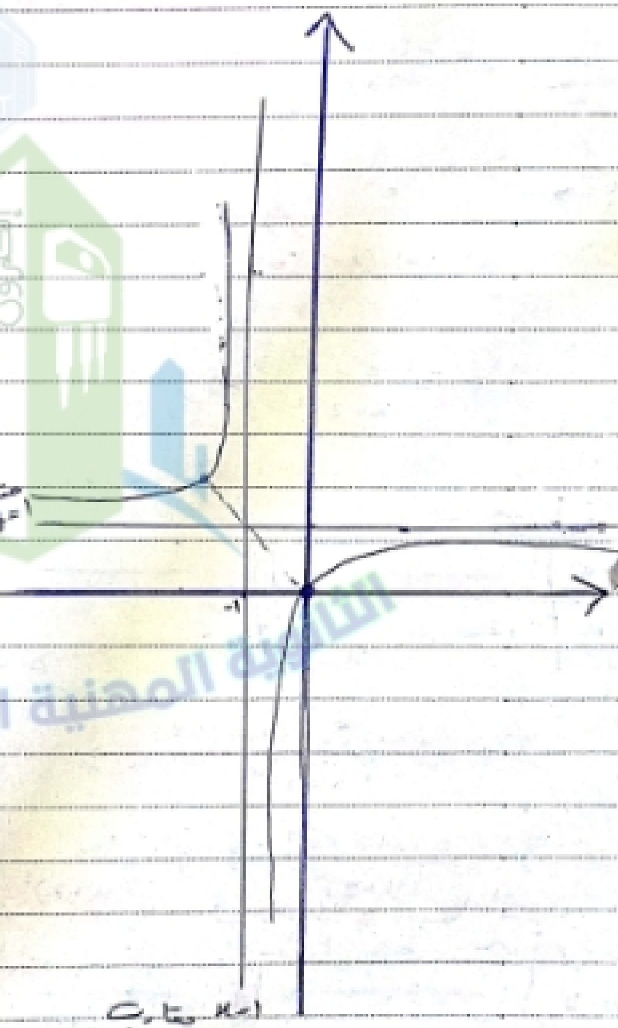
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y''		$+$	‖	$-$	
التقعر		oy^+ $\cup$	‖	$\cap$ oy^-	

نقاط التقاطع مع المحاور:

$x=0 \Rightarrow y = \frac{0}{0+1} \Rightarrow y=0$

$y=0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{x+1} \Rightarrow 0 = x$

$(0,0)$



Subject : / /

المحاضرة التاسعة: التفاضل

خواص التفاضل:

1- تفاضل الدالة الثابتة:

$y = a \Rightarrow dy = 0$

2- تفاضل الدالة من الدرجة الأولى:

$y = ax+b \Rightarrow dy = a.dx$

3- تفاضل القوة:

$y = x^n \Rightarrow dy = n x^{n-1} . dx$

4- تفاضل حاصل ضرب:

= تفاضل الأول × الثاني + تفاضل الثاني × الأول

$y = u.v \Rightarrow dy = u.dv + v.du$

5- تفاضل كسر:

تفاضل البسط × المقام - تفاضل المقام × البسط

6- تفاضل جذر تربيعي:

$= \dfrac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

أمثلة:

أوجد تفاضل كل من الدوال التالية:

1) $y = x^2+2$

الحل:

$dy = y' \, dx$

$dy = 2x \, dx$

2) $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

الحل

$dy = y' \, dx$

$dy = \dfrac{-7}{(x-3)^2} dx$

3) $y = \sin x$

الحل:

$dy = y' \, dx$

$dy = \cos x \, dx$

4) $y = \ln(x)$

الحل

$dy = y' \, dx$

$dy = \frac{1}{x} dx$

5) $y = \sqrt{2x^2+1}$

الحل:

$dy = y' \, dx$

$dy = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} dx$

تطبيقات التفاضل:

مربع طول ضلعه 10 cm تمدد بتأثير الحرارة فازداد طول الضلع بمقدار 0.1 cm أوجد مستخدماً التفاضل قيمة تقريبية لتغير سطح المربع.

الحل: نفرض x طول ضلع المربع

$y = x^2$ ، مساحة المربع

لدينا $dx = 0.1$ ، مطلوب $dy \cong \Delta y$

$dy = 2x \, dx$

$dy = 2(10)(0.1) = 2 \; cm^2$

انتهت المحاضرة التاسعة

البحث التاسع : التكامل

قواعد التكامل :

1) تكامل العدد الثابت

$$\int a\,dx = ax + c$$

2) تكامل ناتج القوة

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

3)

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(a)(n+1)} + c$$

4)

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

5)

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

6)

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

7)

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

أمثلة : أوجد التكاملات التالية

1)

$$\int (x^2+3)\,dx = \frac{x^3}{3} + 3x + c$$

2)

$$\int (2x-3)^5\,dx = \frac{(2x-3)^6}{12} + c$$

التكامل المحدود :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

تكامل

أمثلة : أوجد ناتج ما يلي :

1)

$$\int_{-1}^{2} (2x-1)^2\,dx$$

الحل :

$$\left[\frac{(2x-1)^3}{6}\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{(2(2)-1)^3}{6}\right) - \left[\frac{(2(-1)-1)^3}{6}\right]$$

$$= \frac{27}{6} + \frac{1}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

2)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx =$$

الحل :

$$\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\cos\frac{\pi}{3}\right] + \left[\cos\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}$$

4)

$$\int_0^1 3e^{3x}\,dx =$$

الحل :

$$= \left[e^{3x}\right]_0^1 = e^3 - 1$$

انتهى البحث التاسع

بحث الاحتمالات

1] الاختبار: هو تجربة معينة يمكن اجراؤها أو اختبارها لظاهرة طبيعية أو اجتماعية

2] فضاء العينة: نقول ان لكل تجربة مجموعة من الإمكانات Ω يحددها الرياضي هذه التجربة

3] الحدث: هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة المرتبط بالتجربة.

4] تابع الاحتمال وموضوعاته: اذا كانت Ω فضاء العينة وكانت شروط نقول انه يشكل تابع P لمجموعة الاحداث $G(\Omega)$ في المجال $[0,1]$

$$P: G(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

انه تابع احتمال لا يحقق الموضوعات التالية:

1] $P(x) \geq 0$

2] $P(\Omega) = 1$

3] اذا كان x_1 و x_2 حدثين متنافيين أي كانت x_1 و x_2 مستقلين بأن $\boxed{P(x_1 \cup x_2) = P(x_1) + P(x_2)}$

لنسمي $P(x)$ احتمال الحدث x والثلاثية $(\Omega, G(\Omega), P)$ فضاء احتمالي

* اذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشكل تجزئة لـ Ω فإن

[1] $P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_n) = P(\Omega)$

أي $P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_n) = 1$

مثال: سحبت كرة من صندوق فيه كرتان حمراء وبيضاء اذا رمزنا للكرتين L_1, L_2 للإمكانات نجد فضاء العينة $\Omega = \{L_1, L_2\}$ المطلوب

1] اكتب مجموعة الأحداث لـ Ω

2] اذكر حدث ابتدائي بسيط

3] شكل مجموعة الأحداث المتنافية مثنى:

الحل:

[1] $G(\Omega) = \{\emptyset, \{L_1\}, \{L_2\}, \Omega\}$

[2] $\{L_1\}, \{L_2\}$

[3] $\{\{L_1\}, \{L_2\}\}, \{\Omega, \emptyset\}, \{L_1, \emptyset\}, \{L_2, \emptyset\}$

جبر الأحداث:

1. الحدث المستحيل: الحدث الذي لا يحوي أي عنصر $\emptyset$ حيث $P(\emptyset)=0$
2. الحدث الأكيد: الحدث الذي يضم كافة عناصر الفضاء حيث $P(\Omega)=1$
3. الحدث المضاد: $\bar{x}$ حدث يسمى حدث مضاد أو متمم للحدث x حيث $P(x)+P(\bar{x})=1$
4. الحدث $x_1 \setminus x_2$: $P(x_1 \setminus x_2)=P(x_1)-P(x_1 \cap x_2)$
5. حدث x_1 أو x_2: $P(x_1 \cup x_2)=P(x_1)+P(x_2)-P(x_1 \cap x_2)$

* الفضاء المنتهي المتساوي الاحتمال:

إذا كان n عدد عناصر Ω فإن احتمال كل منها $\frac{1}{n}$ وإذا كان الحدث x مؤلف من r عنصر

$$\text{الاحتمال} = \frac{1}{n}\times r = \frac{r}{n}$$

$$P(x)=\frac{\text{عدد عناصر } x}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

مثال: يحوي صندوق 20 كرة منها 12 حمراء و 8 كرات بيضاء، فإذا سحبنا كرتين معاً بصورة عشوائية فما احتمال:

1. أن تكون الكرتين حمراوين
2. أن تكون الكرتين بيضاوين
3. أن تكون إحدى الكرتين على الأقل حمراء؟

الحل:

$$C(20,2)=\frac{20!}{2!(20-2)!}=\frac{20\times 19\times 18!}{2!\times 18!}=190$$

1. نفرض A حدث أن تكون الكرتين حمراوين:

$$P(A)=\frac{C(12,2)}{C(20,2)}=\frac{66}{190}$$

2. نفرض B حدث أن تكون الكرتين بيضاوين:

$$P(B)=\frac{C(8,2)}{C(20,2)}=\frac{28}{190}$$

3. نفرض C حدث أن تكون إحدى الكرتين على الأقل حمراء: (1 حمراء 1 حمراء) (1 بيضاء 1 حمراء)

$$P(C)=\frac{C(8,1)\times C(12,1)+C(12,2)}{C(20,2)}=\frac{8\times 12}{190}+\frac{66}{190}=\frac{162}{190}$$

ب- الأعداد العقدية:

- الشكل الجبري للعدد العقدي: $z = x+iy$ حيث x الجزء الحقيقي و y الجزء التخيلي
- ملاحظة: كل قوة لـ i من مضاعفات العدد 4 الجواب 1+ وأن $i^2=-1$
- * العددان العقديان المترافقان: نقول عن عددين عقديين إنهما مترافقان إذا تساويا بالقسم الحقيقي واختلفا بالإشارة فقط بالقسم التخيلي:

$$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$$

طويلة العدد العقدي:

$$|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

مثال: أوجد ناتج ما يلي بالشكل الجبري: $z = \frac{1}{2-i}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$z = \frac{1\times(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي

$$z = 3-4i$$

نفرض الجذر التربيعي

$$z_1 = x+iy$$

$$\Rightarrow (z_1)^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi = 3-4i \Rightarrow \boxed{x^2-y^2=3} \ (1)$$

$$2xy = -4 \Rightarrow x\cdot y = -2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-2}{x}} \ (2)$$ ونعوض (2) في (1)

$$x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1) = 0 \Rightarrow \text{إما } x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$$ أو $x^2 = -1$ مستحيل الحل

$$x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow z_1 = 2-i$$

أو $x = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z_2 = -2+i$

الشكل المثلثي للعدد العقدي: ليكن العدد العقدي $z = x+iy$ حيث $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x = r\cdot\cos\varphi \quad \text{و} \quad y = r\sin\varphi \Rightarrow z = r[\cos\varphi + i\sin\varphi] = [r, \varphi]$$

حيث $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ و $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ و $x^2+y^2 = r^2$

مثال: اكتب العدد العقدي $z = -2+2\sqrt{3}i$ بالشكل المثلثي:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = 4} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} = 120$$

$$\Rightarrow z = 4\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = \left[4, \frac{2\pi}{3}\right]$$

القسمة والضرب بالشكل المثلثي: $z_1 = r_1[\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1]$ و $z_2 = r_2[\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2]$

فيكون

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

بحث المصفوفات :

المصفوفة : من المرتبة $n \times m$ هي مجموعة العناصر العددية المرتبة بهيئة جدول مستطيل ذي m سطر و n عمود

درجة المصفوفة : عدد الأسطر وعدد الأعمدة في المصفوفة (m, n) حيث m عدد الأسطر و n عدد الأعمدة .

أنواع المصفوفات . [1] المصفوفة السطرية : من الشكل $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

[2] المصفوفة العمودية : من الشكل $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

[3] المصفوفة الصفرية : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [4] المصفوفة الواحدية : $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[5] المصفوفة المربعة : عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها [6] المصفوفة القطرية : هي مجموعة مربعة جميع عناصرها مساوية للصفر ما عدا عناصر القطر الرئيسي [7] المصفوفة المثلثية : هي مصفوفة جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر

[8] المصفوفة المتناظرة : هي مصفوفة من الشكل $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

[9] المصفوفة المتناظرة تناظراً عكسياً : $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -7 \\ -6 & 4 & -8 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات . [1] جمع مصفوفتين [2] طرح مصفوفتين [3] ضرب مصفوفتين

منقول مصفوفة : هي مصفوفة ناتجة عن المصفوفة A بإبدال الأعمدة بالأسطر والأسطر بالأعمدة .

مثال : لتكن المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

المطلوب : [1] أوجد $A.B$ [2] أوجد $B+C$ [3] أوجد A^T

(1)
$$A.B = \begin{bmatrix} 2(2)+3(1)+1(0) & 2(1)+3(3)+1(2) & 2(-1)+3(2)+1(1) \\ -1(2)+0(1)+1(0) & (-1)(1)+0(3)+1(2) & -1(-1)+0(-2)+1(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4+3 & 2+9+2 & -2-6+1 \\ -2 & -1+2 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)
$$B+C = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & 3-2 & -2+2 \\ 0 & 2-2 & 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)
$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$