التمرين

I- (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

1) أحسب u_1، u_2 و u_3 ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير (u_n).

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \geq -2$$

3) أحسب $u_{n+1} - u_n$ بدلالة u_n، ثم استنتج أن (u_n) متناقصة.

II- (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي:

$$v_n = u_n + 2$$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

2) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

الحل

I- (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

1) حساب u_1، u_2 و u_3:

$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad u_1 = -\frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$ $\qquad u_2 = -\frac{5}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{5}{8} - 1 = -\frac{13}{8}$ $\qquad u_3 = -\frac{13}{8}$

التخمين:

نلاحظ أن:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$$

وعليه: فالمتتالية (u_n) متناقصة.

2) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \geq -2$$

لتكن $P(n)$ الخاصية: $u_n \geq -2$ من أجل كل عدد طبيعي n

من أجل: $n = 0$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \quad و \\ 1 \geq -2 \end{cases} \longrightarrow u_0 \geq -2$$

ومنه: الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي: $u_n \geq -2$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي: $u_{n+1} \geq -2$ من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا من الفرضية: $u_n \geq -2$

$$\frac{1}{2}u_n \geq -1$$

$$\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -2$$

$$u_{n+1} \geq -2$$

ومنه: الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq -2$

3) حساب $u_{n+1} - u_n$ بدلالة u_n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n + 2)$$

استنتاج أن (u_n) متناقصة:

لدينا من البرهان بالتراجع: $u_n \geq -2$

أي: $u_n + 2 \geq 0$

ولدينا: $-\frac{1}{2} < 0$

ينتج: $-\frac{1}{2}(u_n + 2) \leq 0$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

فنستنتج أن (u_n) متناقصة.

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد — https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ — bouguetof.hamid@yahoo.fr

II- (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي:

$$v_n = u_n + 2$$

1) تبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0:

تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا:

$$v_n = u_n + 2$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2$$
$$v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n - 1\right) + 2$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 2)$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$u_0 = 3$ $\quad v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$

2) التعبير عن v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية بالعبارة:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

ومنه:

$$v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا:

$$v_n = u_n + 2$$
$$u_n = v_n - 2$$

ومنه:

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

عدد حدود المجموع S_n هو: $n + 1$

تعطى عبارة مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتالية هندسية بالعبارة:

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

ومنه:

$$S_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

تذكير:

كيف نتعرف على عدد الحدود في مجموع ما؟

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

حساب عدد الحدود:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

دليل الحد الأخير في المجموع هو n.

دليل الحد الأول في المجموع هو 0.

ومنه:

عدد الحدود $= n - 0 + 1$

عدد الحدود $= n + 1$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

تعلم الرياضيات

التمرين

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب الحدين: u_1 و v_1.

2) أ) أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع، برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n = u_n - v_n$$

أ) برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0.

ب) عبر عن w_n بدلالة n.

4) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

الحل

1) حساب الحدين u_1 و v_1:

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \qquad u_1 = \frac{7}{4}$$

$$v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2} \qquad v_1 = \frac{11}{2}$$

2) أ) كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}u_{n+1} + 1\right) - \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right)$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}u_n - 1$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n$$

ومنه:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$$

يمكن أن نستنتج أيضا أن:

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n)$$

2) ب) باستعمال البرهان بالتراجع، نبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما:

أولا:

نبرهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، أي:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

نسمي $P_1(n)$ الخاصية: $u_{n+1} - u_n > 0$.

من أجل: $n = 0$

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} \\ \text{و} \\ \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \longrightarrow \quad u_1 - u_0 > 0$$

ومنه: الخاصية $P_1(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P_1(n)$ صحيحة، أي:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

ونبرهن أن الخاصية $P_1(n+1)$ صحيحة، أي:

$$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

لدينا من الفرضية: $u_{n+1} - u_n > 0$

$$\frac{3}{4} \times (u_{n+1} - u_n) > \frac{3}{4} \times 0$$

$$\frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

ومنه: الخاصية $P_1(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي: $u_{n+1} - u_n > 0$.

نتيجة: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ثانيا:

نبرهن بالتراجع أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما، أي:

$$v_{n+1} - v_n < 0$$

نسمي $P_2(n)$ الخاصية: $v_{n+1} - v_n < 0$.

من أجل: $n = 0$

$$\begin{cases} v_1 - v_0 = \frac{11}{2} - 6 = -\frac{1}{2} \\ \text{و} \\ -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \longrightarrow \quad v_1 - v_0 < 0$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ومنه: الخاصية $P_2(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P_2(n)$ صحيحة، أي:

$$v_{n+1} - v_n < 0$$

ونبرهن أن الخاصية $P_2(n+1)$ صحيحة، أي:

$$v_{n+2} - v_{n+1} < 0$$

لدينا من الفرضية: $v_{n+1} - v_n < 0$

$$\frac{3}{4} \times (v_{n+1} - v_n) < \frac{3}{4} \times 0$$

$$\frac{3}{4}(v_{n+1} - v_n) < 0$$

$$v_{n+2} - v_{n+1} < 0$$

ومنه: الخاصية $P_2(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي: $v_{n+1} - v_n < 0$.

نتيجة: المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n = u_n - v_n$$

أ) نبرهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_0:

تكون (w_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$w_{n+1} = q \times w_n$$

لدينا: $w_n = u_n - v_n$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) - \left(\frac{3}{4}v_n + 1\right)$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \frac{3}{4}v_n - 1$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n - v_n)$$

ومنه:

$$w_{n+1} = \frac{3}{4} \times w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول: $w_0 = -5$

$$w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 6 = -5$$

ب) نعبر عن w_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول w_0 بالعبارة:

$$w_n = w_0 \times q^n$$

ومنه:

$$w_n = -5\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4) نبين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

تكون (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة والفرق بينهما يؤول إلى الصفر.

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} w_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

نعلم أن:

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha^n) = 0 \quad ; \quad 0 < \alpha < 1$$

ينتج:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$$

لأن: $0 < \frac{3}{4} < 1$.

أي:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

بما أن:

- (u_n) متزايدة تماما.
- (v_n) متناقصة تماما.
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

فإن: المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+{u_n}^2}{2}} \end{cases}$$

1)

أ) أحسب u_1، u_2 و u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = {u_n}^2 - 1$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2v_{n+1} = v_n$.

ب) استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q وحدها الأول v_0.

جـ) أكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n، ثم احسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية:

$$S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + \cdots + {u_n}^2$$

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 4v_2 + \cdots + 2^n v_n$$

$$L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \cdots + \ln v_n$$

الحل

أ) حساب u_1، u_2 و u_3:

$$u_1 = \sqrt{\frac{1+{u_0}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+3^2}{2}} = \sqrt{5} \qquad u_1 = \sqrt{5}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1+{u_1}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}} = \sqrt{3} \qquad u_2 = \sqrt{3}$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1+{u_2}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{2} \qquad u_3 = \sqrt{2}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 1$:

لتكن $P(n)$ الخاصية: $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

من أجل: $n = 0$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{و} \\ 3 > 1 \end{cases} \rightarrow u_0 > 1$$

ومنه: الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة، أي: $u_n > 1$.

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة، أي: $u_{n+1} > 1$.

لدينا من الفرضية: $u_n > 1$

$${u_n}^2 > 1$$

$$1 + {u_n}^2 > 2$$

$$\frac{1+{u_n}^2}{2} > 1$$

$$\sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} > 1$$

$$u_{n+1} > 1$$

ومنه: الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 1$.

ب) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

تكون المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ إذا كان:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} + u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1+{u_n}^2}{2} - {u_n}^2}{\sqrt{\frac{1+{u_n}^2}{2}} + u_n}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - {u_n}^2}{2\left(\sqrt{\frac{1 + {u_n}^2}{2}} + u_n\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - {u_n}^2}{2(u_{n+1} + u_n)}$$

إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$ من إشارة $(1 - {u_n}^2)$.

لأن:

$$\begin{cases} u_n > 1 \\ \text{و} \\ 1 > 0 \end{cases} \rightarrow u_n > 0 \rightarrow u_{n+1} > 0 \rightarrow u_{n+1} + u_n > 0$$

ومنه: $2(u_{n+1} + u_n) > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ندرس إشارة $(1 - {u_n}^2)$:

لدينا من البرهان بالتراجع:

$u_n > 1$

${u_n}^2 > 1$

$-{u_n}^2 < -1$

$1 - {u_n}^2 < 0$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

وبالتالي:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم حساب نهايتها:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1} - u_n < 0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 $(u_n > 1)$ فهي إذن **متقاربة** نحو نهاية ℓ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1 + {u_n}^2}{2}} = \ell$$

$$\ell = \sqrt{\frac{1 + \ell^2}{2}} \quad \text{مع} \quad (\ell \geq 0)$$

$$\ell^2 = \frac{1 + \ell^2}{2}$$

$2\ell^2 = 1 + \ell^2$

$\ell^2 = 1$

$\ell = 1$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = {u_n}^2 - 1$.

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2v_{n+1} = v_n$:

لدينا:

$v_n = {u_n}^2 - 1$

$v_{n+1} = {u_{n+1}}^2 - 1$

$v_{n+1} = \frac{1 + {u_n}^2}{2} - 1$

$2v_{n+1} = 1 + {u_n}^2 - 2$

$2v_{n+1} = {u_n}^2 - 1$

ومنه:

$$2v_{n+1} = v_n$$

ب) استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0:

تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا: $2v_{n+1} = v_n$

ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$v_0 = 8$ $\quad v_0 = {u_0}^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

جـ) كتابة بدلالة n كلا من v_n و u_n:

التعبير عن v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية بالعبارة:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

ومنه:

$$v_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التعبير عن u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = {u_n}^2 - 1$

أي: ${u_n}^2 = v_n + 1$

تعلم الرياضيات

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/

bouguetof.hamid@yahoo.fr

نجد: $u_n = \sqrt{v_n + 1}$

ومنه:

$$u_n = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

حساب من جديد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

حيث:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ومنه:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

3) حساب بدلالة n كلا من المجاميع S_n، T_n و L_n:

حساب المجموع S_n:

$$S_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + \cdots + {u_n}^2$$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \cdots + (v_n + 1)$$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (1 + 1 + \cdots 1)$$

$$S_n = S_1 + S_2$$

حيث:

- S_1 هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 8$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$، يعطى بالعبارة:

$$S_1 = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_1 = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

نجد:

$$S_1 = 16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

- S_2 هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1:

$$S_2 = (n+1) \times 1$$

نجد:

$$S_2 = n + 1$$

ومنه:

$$S_n = 16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n + 1$$

حساب المجموع T_n:

نذكر أن:

$$v_n = q^n \times v_0 \to \begin{cases} v_0 \\ v_1 = q^1 \times v_0 \\ v_2 = q^2 \times v_0 \\ v_n = q^n \times v_0 \end{cases} \to \begin{cases} v_0 \\ v_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \times v_0 \\ v_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times v_0 \\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times v_0 \end{cases}$$

ومنه:

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 4v_2 + \cdots + 2^n v_n$$

$$T_n = v_0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)v_0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 v_0 + \cdots + 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$$

$$T_n = v_0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)v_0 + 4\left(\frac{1}{4}\right)v_0 + \cdots + 2^n\left(\frac{1}{2^n}\right)v_0$$

$$T_n = v_0 + v_0 + v_0 + \cdots + v_0$$

حيث:

- T_n هو مجموع $(n+1)$ مرة الحد v_0:

$$T_n = (n+1) \times v_0$$

نجد:

$$T_n = 8(n+1)$$

حساب المجموع L_n:

$$L_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \cdots + \ln v_n$$

$$L_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n)$$

$$L_n = \ln\left(v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 v_0 \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0\right)$$

$$L_n = \ln\left((v_0 \times v_0 \times v_0 \times \ldots \times v_0) \times \left(\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)$$

$$L_n = \ln\left({v_0}^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+2+\cdots+n}\right)$$

$$L_n = \ln\left({v_0}^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^S\right)$$

حيث:

- S هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة من متتالية **حسابية** حدها الأول 0 وأساسها 1، يعطى بالعبارة:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع}\right)$$

مع:

$$S = 0 \;\; +1 \;\; +2 \;\; + \cdots + n$$

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

حساب عدد الحدود:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

الحد الأخير في المجموع هو w_n ودليله هو: n.

الحد الأول في المجموع هو w_0 ودليله هو: 0.

ومنه:

$$\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1$$

$$\text{عدد الحدود} = n + 1$$

يمكن حساب المجموع S كما يلي:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأخير في المجموع} + \text{الحد الأول في المجموع}\right)$$

$$S = \frac{n+1}{2} \times (w_0 + w_n)$$

$$S = \frac{n+1}{2} \times (0 + n)$$

ومنه:

$$S = \frac{1}{2} n(n+1)$$

فنكتب:

$$L_n = ln\left({v_0}^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right)$$

$$L_n = ln({v_0}^{n+1}) + ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\right)$$

$$L_n = (n+1)\; ln\, v_0 + \frac{1}{2} n(n+1)\; ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$L_n = (n+1)\; ln\, 8 - \frac{1}{2} n(n+1)\; ln 2$$

$$L_n = (n+1)\; ln\, 2^3 - \frac{1}{2} n(n+1)\; ln 2$$

$$L_n = 3(n+1)\; ln\, 2 - \frac{1}{2} n(n+1)\; ln 2$$

$$L_n = (n+1)\left(3 - \frac{1}{2} n\right)\; ln\, 2$$

ومنه:

$$L_n = \frac{1}{2}(n+1)(6-n)\; ln\, 2$$

التمرين

1- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = 2^{n+1}$$

أ) برهن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q وحدها الأول u_0.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

2- لتكن (v_n) المتتالية العدية المعرفة بـ : $v_0 = 2$ و $v_1 = 3$،

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+2} = \alpha v_{n+1} - 2(\alpha - 2)v_n \text{ ، } \alpha \in \mathbb{R}$$

ولتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n}$$

أ) عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول w_0.

ب) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n' حيث:

$$S_n' = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

الحل

1- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_n = 2^{n+1}$$

أ) البرهان أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q وحدها الأول u_0:

تكون (u_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

لدينا:

$$u_{n+1} = 2^{(n+1)+1}$$
$$= 2^1 \times 2^{(n+1)}$$
$$= 2 \times u_n$$

ومنه:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول:

$$u_0 = 2^{0+1} = 2^1 = 2$$

$$u_0 = 2$$

ب) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 2$ وأساسها $q = 2$، يعطى بالعبارة:

$$S_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
$$= 2 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

نجد:

$$S_n = 2(2^{n+1} - 1)$$

2- لتكن (v_n) المتتالية العدية المعرفة بـ : $v_0 = 2$ و $v_1 = 3$،

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+2} = \alpha v_{n+1} - 2(\alpha - 2)v_n \text{ ، } \alpha \in \mathbb{R}$$

ولتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n}$$

أ) تعين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعين أساسها r وحدها الأول w_0:

لدينا:

$$w_0 = \frac{v_0}{u_0} = \frac{2}{2} = 1 \qquad w_0 = 1$$

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{3}{4} \qquad w_1 = \frac{3}{4}$$

لاحظ أن:

$$w_1 - w_0 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

حتى تكون (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\frac{1}{4}$ يجب أن يكون كذلك:

$$w_2 - w_1 = -\frac{1}{4}$$

حيث:

$$w_2 - w_1 = \frac{v_2}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{v_2}{8} = \frac{1}{2}$$

نجد:

$$v_2 = 4$$

ولدينا:

$v_2 = \alpha v_1 - 2(\alpha - 2)v_0 = 4$

$v_2 = 3\alpha - 4(\alpha - 2) = 4$

$3\alpha - 4\alpha + 8 = 4$

$-\alpha = 4 - 8$

نجد:

$$\alpha = 4$$

ومنه:

تكون المتتالية (w_n) حسابية أساسها $r = -\frac{1}{4}$ وحدها الأول $w_0 = 1$، من أجل $\alpha = 4$.

ب) كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n:

■ كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n:

المتتالية (w_n) حسابية أساسها $r = -\frac{1}{4}$ وحدها الأول $w_0 = 1$، تعطى عبارة حدها العام بـ :

$$w_n = w_0 + n \times r$$

ومنه:

$$w_n = 1 - \frac{1}{4}n$$

■ كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

لدينا:

$w_n = \frac{v_n}{u_n}$

ومنه:

$v_n = w_n \times u_n$

بالتعويض:

$$v_n = \left(1 - \frac{1}{4}n\right) \times 2^{n+1}$$

$$= \frac{4-n}{4} \times 2 \times 2^n$$

$$= \frac{(4-n)}{2} \times 2^n$$

نجد:

$$v_n = (4-n) \times 2^{n-1}$$

ج) حساب بدلالة n المجموع S_n' حيث:

$$S_n' = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

S_n' هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول $w_0 = 1$ وأساسها $r = -\frac{1}{4}$، يعطى بالعبارة:

$$S_n' = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 - \frac{1}{4}n\right)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(2 - \frac{1}{4}n\right)$$

نجد:

$$S_n' = \frac{(n+1)(8-n)}{8}$$

بكالوريا 2017 العادية - شعبة الرياضيات - الموضوع الثاني

التمرين رقم 05

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول:

$$u_0 = 1$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 7u_n + 8$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$3u_n = 7^{n+1} - 4$$

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n \\ \text{و} \\ S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$$

أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$$

3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب- عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

الحل رقم 05

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8 \end{cases}$$

1) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$3u_n = 7^{n+1} - 4$$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} 3u_0 = 3 \times 1 = 3 \\ \text{و} \\ 7^{0+1} - 4 = 7^1 - 4 = 7 - 4 = 3 \end{cases}$$

لاحظ أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني.

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$ »

لدينا من الفرضية:

$$3u_n = 7^{n+1} - 4$$
$$7 \times 3u_n = 7 \times 7^{n+1} - 7 \times 4$$
$$21u_n = 7^{1+n+1} - 28$$
$$21u_n = 7^{n+2} - 28$$
$$21u_n = 7^{n+2} - 24 - 4$$
$$21u_n + 24 = 7^{n+2} - 4$$
$$3(7u_n + 8) = 7^{n+2} - 4$$
$$3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$ »

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n \\ \text{و} \\ S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$$

أ- نحسب بدلالة n المجموع S_n ثم نجد علاقة بين S_n و S'_n:

نحسب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا:

$$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$$

ونكتب أيضا:

$$S_n = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^n$$

حيث:

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 7، يعطى كما يلي:

bouguetof.hamid@yahoo.fr https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

$$S_n = \left(\text{الحد الأول في المجموع}\right) \times \frac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$$

$$S_n = 1 \times \frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1}$$

ومنه:

$$S_n = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$$

نجد علاقة بين S_n و S'_n:

لدينا من البرهان بالتراجع:

$$3u_n = 7^{n+1} - 4$$

ينتج:

$$\begin{cases} 3u_0 = 7^1 - 4 \\ 3u_1 = 7^2 - 4 \\ 3u_2 = 7^3 - 4 \\ \quad \dots \\ 3u_n = 7^{n+1} - 4 \end{cases}$$

لدينا:

$$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

ونكتب أيضا:

$$3S'_n = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \cdots + 3u_n$$

$$3S'_n = 7^1 - 4 + 7^2 - 4 + 7^3 - 4 + \cdots + 7^{n+1} - 4$$

$$3S'_n = (7^1 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{n+1}) - (4 + 4 + \cdots + 4)$$

$$3S'_n = 7(1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n) - (4 + 4 + \cdots + 4)$$

$$3S'_n = 7S_n - 4(n + 1)$$

ومنه:

$$3S'_n = 7S_n - 4(n + 1)$$

ب- نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$$

لدينا:

$$3S'_n = 7S_n - 4(n + 1)$$

$$3S'_n = 7S_n - 4n - 4$$

$$6 \times 3S'_n = 6 \times 7S_n - 6 \times 4n - 6 \times 4$$

$$18 \times S'_n = 42S_n - 24n - 24$$

$$18 \times S'_n = 42 \times \frac{1}{6} \times (7^{n+1} - 1) - 24n - 24$$

$$18 \times S'_n = 7(7^{n+1} - 1) - 24n - 24$$

$$18 \times S'_n = 7 \times 7^{n+1} - 7 - 24n - 24$$

ومنه:

$$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$$

3) أ- ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5:

$n = 0 :\ 7^0 \equiv 1\ [5]$

$n = 1 :\ 7^1 \equiv 2\ [5]$

$n = 2 :\ 7^2 \equiv 4\ [5]$

$n = 3 :\ 7^3 \equiv 3\ [5]$

$n = 4 :\ 7^4 \equiv 1\ [5]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4m$	$4m+1$	$4m+2$	$4m+3$	$m \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	2	4	3	[5]

ومنه:

$n = 4m \quad :\ 7^{4m} \equiv 1\ [5]$

$n = 4m + 1 :\ 7^{4m+1} \equiv 2\ [5]$

$n = 4m + 2 :\ 7^{4m+2} \equiv 4\ [5]$

$n = 4m + 3 :\ 7^{4m+3} \equiv 3\ [5]$

3) ب- نعين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5:

S'_n يقبل القسمة على 5 معناه:

$$S'_n \equiv 0\ [5]$$

لدينا:

$S'_n \equiv 0\ [5]$

$18 \times S'_n \equiv 0\ [5]$ (لأن 18 و 5 أوليان فيما بينهما)

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0\ [5]$

$7^2 \times 7^n - 24n - 31 \equiv 0\ [5]$

$4 \times 7^n - 4n - 1 \equiv 0\ [5]$

$4 \times 7^n - 4n \equiv 1\ [5]$

$4(7^n - n) \equiv -4\ [5]$

$7^n - n \equiv -1\ [5]$

$7^n - n \equiv 4\ [5]$

لتعيين قيم n الطبيعية التي تحقق $7^n - n \equiv 4\ [5]$ نميز الحالات التالية:

تعلم الرياضيات

- $n = 4m$

$7^{4m} - 4m \equiv 4\ [5]$

$1 - 4m \equiv 4\ [5]$

$-4m \equiv 3\ [5]$

$m \equiv 3\ [5]$

$m = 5k + 3$

ومنه:

$$n = 20k + 12\ (k \in \mathbb{N})$$

- $n = 4m + 1$

$7^{4m+1} - 4m - 1 \equiv 4\ [5]$

$2 - 4m - 1 \equiv 4\ [5]$

$-4m \equiv 3\ [5]$

$m \equiv 3\ [5]$

$m = 5k + 3$

ومنه:

$$n = 20k + 13\ (k \in \mathbb{N})$$

- $n = 4m + 2$

$7^{4m+2} - 4m - 2 \equiv 4\ [5]$

$4 - 4m - 2 \equiv 4\ [5]$

$-4m \equiv 2\ [5]$

$m \equiv 2\ [5]$

$m = 5k + 2$

ومنه:

$$n = 20k + 10\ (k \in \mathbb{N})$$

- $n = 4m + 3$

$7^{4m+3} - 4m - 3 \equiv 4\ [5]$

$3 - 4m - 3 \equiv 4\ [5]$

$-4m \equiv 4\ [5]$

$m \equiv 4\ [5]$

$m = 5k + 4$

ومنه:

$$n = 20k + 19\ (k \in \mathbb{N})$$

نتيجة:

قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5 هي:

$$n \in \{20k + 10\,; 20k + 12\,; 20k + 13\,; 20k + 19\}$$

حيث k عدد طبيعي.

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

بكالوريا 2018 - شعبة العلوم التجريبية - الموضوع الأول

التمرين رقم 06

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث:

$$u_0 = 1$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n > -2$$

ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعين حدها الأول.

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

الحل رقم 06

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n > -2$$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{و} \\ 1 > -2 \end{cases} \longrightarrow u_0 > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > -2$ »

لدينا من الفرضية:

$$u_n > -2$$
$$u_n + 5 > -2 + 5$$
$$u_n + 5 > 3$$
$$\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$$
$$\frac{9}{u_n + 5} < \frac{9}{3}$$
$$\frac{9}{u_n + 5} < 3$$
$$-\frac{9}{u_n + 5} > -3$$
$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$$
$$1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$$
$$u_{n+1} > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

1) ب) البرهان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

معناه نبرهن أن:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n$$
$$= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

$$= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5}$$

$$= \frac{u_n - 4 - {u_n}^2 - 5u_n}{u_n + 5}$$

$$= \frac{-{u_n}^2 - 4u_n - 4}{u_n + 5}$$

$$= -\frac{{u_n}^2 + 4u_n + 4}{u_n + 5}$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5}$$

حسب نتيجة البرهان بالتراجع لدينا:

$$u_n > -2$$

ينتج:

$$\begin{cases} u_n + 2 > 0 \\ \text{و} \\ u_n + 5 > 3 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} (u_n + 2)^2 > 0 \\ \text{و} \\ u_n + 5 > 0 \quad (\text{لأن: } 3 > 0) \end{cases}$$

فنكتب:

$$\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5} > 0$$

وعليه:

$$-\frac{(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

نتيجة:

(u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1} - u_n < 0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n > -2)$ فهي إذن متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول:

تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها r إذا كان:

$$v_{n+1} = r + v_n$$

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2}$$

$$= \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n + 5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3(u_n + 5) - 9}{u_n + 5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3u_n + 15 - 9}{u_n + 5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3u_n + 6}{u_n + 5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5}}$$

$$= \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)}$$

$$= \frac{(u_n + 2) + 3}{3(u_n + 2)}$$

$$= \frac{(u_n + 2)}{3(u_n + 2)} + \frac{3}{3(u_n + 2)} \qquad (u_n > -2)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{(u_n + 2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} + v_n$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

نتيجة:

المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

3) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

التعبير بدلالة n عن v_n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول v_0 بالعبارة:

$$v_n = v_0 + r \times n$$

ومنه:

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(n+1)$$

$$v_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

التعبير بدلالة n عن u_n:

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n+2) = 1$$
$$v_n u_n + 2v_n = 1$$
$$v_n u_n = 1 - 2v_n$$
$$u_n = \frac{1-2v_n}{v_n}$$
$$u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

بالتعويض:

$$u_n = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2$$

$$u_n = \frac{3}{n+1} - 2$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1} - 2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 \times \frac{1}{n+1} - 2\right)$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

نضع:

$$T = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

لدينا مما سبق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{1}{v_0} - 2\right)v_0 + \left(\frac{1}{v_1} - 2\right)v_1 + \cdots + \left(\frac{1}{v_n} - 2\right)v_n \\ &= 1 - 2v_0 + 1 - 2v_1 + \cdots + 1 - 2v_n \\ &= (1+1+\cdots+1) - 2(v_0+v_1+\cdots+v_n) \\ &= S_1 - 2S_2 \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} S_1 = 1+1+\cdots+1 \\ \text{و} \\ S_2 = v_0+v_1+\cdots+v_n \end{cases}$$

■ S_1 هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1.

أي:

$$S_1 = n+1$$

■ S_2 هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$، يعطى بالعبارة:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأخير في المجموع + الحد الأول في المجموع}\right) \\ &= \frac{n+1}{2}(v_0+v_n) \\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1)\right) \\ &= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1+n+1}{3}\right) \end{aligned}$$

ومنه:

$$S_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

لدينا مما سبق:

$$T = S_1 - 2S_2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} T &= n+1-2\frac{(n+1)(n+2)}{6} \\ &= n+1-\frac{(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{3(n+1)-(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{1}{3}[3(n+1)-(n+1)(n+2)] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(3-n-2) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(1-n) \\ &= \frac{1}{3}(1+n)(1-n) \\ &= \frac{1}{3}(1-n^2) \end{aligned}$$

ومنه:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

تعلم الرياضيات

جميع الحقوق محفوظة
BAC
عبد الحميد

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

دورة 2018 - شعبة التقني رياضي - الموضوع الثاني

التمرين

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي:

$$u_n = 2(3)^n$$

و (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $v_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = 5v_n + u_n$$

1) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

ـ أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n = 5^{n+1} - 3^n$$

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8.

4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8.

الحل

1) البرهان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$:

تكون (w_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$w_{n+1} = q \times w_n$$

لدينا:

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2}$$

ولدينا:

$$u_n = 2(3)^n$$

ومنه:

$$u_{n+1} = 2(3)^{n+1} = 2(3)^n \times 3 = 3u_n$$

ولدينا:

$$v_{n+1} = 5v_n + u_n$$

بعويض عبارتي u_{n+1} و v_{n+1} في عبارة w_{n+1} نكتب:

$$w_{n+1} = \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5v_n}{3u_n} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{3} w_n$$

ومنه:

(w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$.

حساب الحد الأول w_0:

$$w_0 = \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \ ; \ w_0 = \frac{5}{2}$$

2) كتابة عبارة الحد العام w_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول w_0 كما يلي:

$$w_n = w_0 \times q^n$$

بالتعويض:

$$w_n = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

استنتاج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n = 5^{n+1} - 3^n$$

لدينا:

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$v_n = u_n\left(w_n - \frac{1}{2}\right)$$

بتعويض عبارتي u_n و w_n في عبارة v_n نكتب:

$$v_n = 2(3)^n\left(\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2(3)^n\left(\frac{5(5)^n}{2(3)^n} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2(3)^n\frac{5(5)^n}{2(3)^n} - 2(3)^n\frac{1}{2}$$
$$= 5(5)^n - (3)^n$$
$$= (5)^{n+1} - (3)^n$$

ومنه:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n = 5^{n+1} - 3^n$$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8:

أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 8:

لدينا:

$n = 0:\ 3^0 \equiv 1\ [8]$

$n = 1:\ 3^1 \equiv 3\ [8]$

$n = 2:\ 3^2 \equiv 1\ [8]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 2.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$n = 2k \quad :\ 3^{2k} \equiv 1\ [8]$

$n = 2k+1:\ 3^{2k+1} \equiv 3\ [8]$

ومنه:

بواقي قسمة العدد 3^n على 8 هي:

$$r' = \{1\,;3\}$$

نلخص بواقي قسمة العدد 3^n على 8 في الجدول التالي:

n	$2k$	$2k+1$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	[8]

ب- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 8:

لدينا:

$n = 0:\ 5^0 \equiv 1\ [8]$

$n = 1:\ 5^1 \equiv 5\ [8]$

$n = 2:\ 5^2 \equiv 1\ [8]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 2.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$n = 2m \quad :\ 5^{2m} \equiv 1\ [8]$

$n = 2m+1:\ 5^{2m+1} \equiv 5\ [8]$

ومنه:

بواقي قسمة العدد 5^n على 8 هي:

$$r'' = \{1\,;5\}$$

نلخص بواقي قسمة العدد 5^n على 8 في الجدول التالي:

n	$2m$	$2m+1$	$m \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	[8]

4) تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد v_n على 8:

لدينا:

$v_n \equiv 5^{n+1} - 3^n\ [8]$

$v_n \equiv 5 \times 5^n - 3^n\ [8]$

من أجل: $n = 2p$

$v_{2p} \equiv 5 \times 5^{2p} - 3^{2p}\ [8]$

$\equiv 5 \times 1 - 1\ [8]$

$\equiv 5 - 1\ [8]$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي p:

$$v_{2p} \equiv 4\ [8]$$

باقي قسمة v_{2p} على 8 هو 4.

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

من أجل: $n = 2p + 1$

$$v_{2p+1} \equiv 5 \times 5^{2p+1} - 3^{2p+1}\ [8]$$
$$\equiv 5 \times 5 - 3\ [8]$$
$$\equiv 25 - 3\ [8]$$
$$\equiv 22\ [8]$$
$$\equiv 6\ [8]$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي p:

$$v_{2p+1} \equiv 6\ [8]$$

باقي قسمة v_{2p+1} على 8 هو 6.

خلاصة:

بواقي قسمة v_n على 8 هي:

$$r = \{4\,;6\}$$

تلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي:

n	$2p$	$2p+1$	$p \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	[8]
$5 \times 5^n \equiv$	5	1	[8]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5 \times 5^n - 3^n \equiv$	4	6	[8]

جميع الحقوق محفوظة
BAC
عبد الحميد

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

التمرين رقم 01

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$.

ب) بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

حل التمرين رقم 01

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{و} \\ 1 > -2 \end{cases} \longrightarrow u_0 > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} > -2$ »

لدينا من الفرضية:

$u_n > -2$

$u_n + 5 > -2 + 5$

$u_n + 5 > 3$

$\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$

$\frac{9}{u_n + 5} < \frac{9}{3}$

$\frac{9}{u_n + 5} < 3$

$-\frac{9}{u_n + 5} > -3$

$1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$

$1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$

$u_{n+1} > -2$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$ »

1) ب) البرهان أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

معناه نبرهن أن:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n$$
$$=\frac{u_n+5-9-u_n(u_n+5)}{u_n+5}$$
$$=\frac{u_n-4-u_n^2-5u_n}{u_n+5}$$
$$=\frac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}$$
$$=-\frac{u_n^2+4u_n+4}{u_n+5}$$
$$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

حسب نتيجة البرهان بالتراجع لدينا:

$$u_n>-2$$

ينتج:

$$\begin{cases} u_n+2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>3 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} (u_n+2)^2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>0 \quad (\text{لأن: } 3>0) \end{cases}$$

فنكتب:

$$\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}>0$$

وعليه:

$$-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}<0$$

ومنه:

$$u_{n+1}-u_n<0$$

نتيجة:

(u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1}-u_n<0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 $(u_n>-2)$ فهي إذن متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n=\frac{1}{u_n+2}$$

البرهان أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعين حدها الأول:

تكون (v_n) متتالية حسابية أساسها r إذا كان:

$$v_{n+1}=r+v_n$$

لدينا:

$$v_n=\frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}$$
$$=\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3(u_n+5)-9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3u_n+15-9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3(u_n+2)}{u_n+5}}$$
$$=\frac{u_n+5}{3(u_n+2)}$$

بتفكيك البسط نكتب:

$$v_{n+1} = \frac{(u_n+2)+3}{3(u_n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(u_n+2)}}{3\cancel{(u_n+2)}} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(u_n+2)} \qquad \left(\text{تذكر أن: } u_n > -2\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{(u_n+2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} + v_n \qquad \left(\text{من الشكل: } v_{n+1} = r + v_n\right)$$

نتيجة:

المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

3) التعبير بدلالة n عن v_n و u_n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

التعبير بدلالة n عن v_n:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول v_0 بالعبارة:

$$v_n = v_0 + r \times n$$

ومنه:

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(n+1)$$

$$v_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

التعبير بدلالة n عن u_n:

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n+2) = 1$$

$$v_n u_n + 2v_n = 1$$

$$v_n u_n = 1 - 2v_n$$

$$u_n = \frac{1-2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

بالتعويض:

$$u_n = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2$$

$$= \frac{3}{n+1} - 2$$

$$u_n = \frac{3}{n+1} - 2$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1} - 2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 \times \frac{1}{n+1} - 2\right) = -2$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

نضع:

$$T = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

لدينا مما سبق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

ومنه:

$$T = \left(\frac{1}{v_0} - 2\right)v_0 + \left(\frac{1}{v_1} - 2\right)v_1 + \cdots + \left(\frac{1}{v_n} - 2\right)v_n$$

$$= 1 - 2v_0 + 1 - 2v_1 + \cdots + 1 - 2v_n$$

$$= (1 + 1 + \cdots + 1) - 2(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

$$= S_1 - 2S_2$$

حيث:

$$\begin{cases} S_1 = 1 + 1 + \cdots + 1 \\ \text{و} \\ S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \end{cases}$$

■ S_1 هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1.

أي:

$$S_1 = n + 1$$

■ S_2 هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$، يعطى بالعبارة:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع}\right)$$

بالتعويض:

$$S_2 = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1)\right)$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1+n+1}{3}\right)$$
$$S_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

لدينا مما سبق:

$$T = S_1 - 2S_2$$

ومنه:

$$T = n + 1 - 2\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= n + 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$
$$= \frac{3(n+1) - (n+1)(n+2)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}[3(n+1) - (n+1)(n+2)]$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)(3 - n - 2)$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)(1-n)$$
$$= \frac{1}{3}(1+n)(1-n)$$
$$= \frac{1}{3}(1-n^2)$$

ومنه:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

نص التمرين رقم 01:

(u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases}$$

1) باستعمال البرهان بالتراجع، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$.

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$.

ب- باستعمال البرهان بالتراجع، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

جـ- أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = \dfrac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$.

- أحسب نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى.

الحل المفصل للتمرين رقم 01

(u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+21} \end{cases}$.

1) باستعمال البرهان بالتراجع، تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية: $u_n > 0$.

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 1$ و: $1 > 0$ أي: $u_0 > 0$.

ومنه: $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل n أي: $u_n > 0$ ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$ أي: $u_{n+1} > 0$.

لدينا من الفرضية: $u_n > 0$ فينتج: $\begin{cases} 3u_n > 0 \\ u_n + 21 > 0 \end{cases}$ أي: $\frac{3u_n}{u_n+21} > 0$ فنجد: $u_{n+1} > 0$.

ومنه: $P(n+1)$ محققة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

طريقة أخرى:

لاحظ أن:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 21} = \frac{3u_n + 63 - 63}{u_n + 21} = \frac{3(u_n + 21) - 63}{u_n + 21} = 3 - \frac{63}{u_n + 21}$$

نبرهن بالتراجع أن $u_n > 0$ باتباع الخطوات التالية:

$u_n > 0$ (من الفرضية)

$u_n + 21 > 21$

$\frac{1}{u_n + 21} < \frac{1}{21}$

$\frac{63}{u_n + 21} < \frac{63}{21}$

$\frac{63}{u_n + 21} < 3$

$-\frac{63}{u_n + 21} > -3$

$3 - \frac{63}{u_n + 21} > 3 - 3$

$3 - \frac{63}{u_n + 21} > 0$

$u_{n+1} > 0$

2) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتاج أنها متقاربة:

لتبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ يكفي أن نبرهن أن: $u_{n+1} - u_n < 0$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n + 21} - u_n = \frac{3u_n - u_n{}^2 - 21u_n}{u_n + 21} = \frac{-u_n{}^2 - 18u_n}{u_n + 21} = \frac{-u_n(u_n + 18)}{u_n + 21}$$

لدينا: $u_n > 0$ فينتج: $\begin{cases} u_n + 18 > 0 \\ u_n + 21 > 0 \end{cases}$ أي: $\frac{u_n(u_n+18)}{u_n+21} > 0$ وينتج: $\frac{-u_n(u_n+18)}{u_n+21} < 0$.

أي: $u_{n+1} - u_n < 0$.

ومنه: المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1} - u_n < 0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 $(u_n < 0)$ فنستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية ℓ.

3) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$:

نبرهن أن $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ باتباع الخطوات التالية:

$$u_n > 0 \ (\text{من الفرضية})$$
$$u_n + 21 > 21$$
$$\frac{1}{u_n + 21} < \frac{1}{21}$$
$$\frac{3}{u_n + 21} < \frac{3}{21}$$
$$\frac{3}{u_n + 21} < \frac{1}{7}$$
$$\frac{3u_n}{u_n + 21} < \frac{1}{7}u_n \ (\text{لأن}: u_n > 0)$$
$$u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$.

طريقة أخرى:

يمكن أن نبرهن أن: $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n < 0$ أي: $7u_{n+1} - u_n < 0$.

$$7u_{n+1} - u_n = 7\frac{3u_n}{u_n + 21} - u_n = \frac{21u_n}{u_n + 21} - u_n = \frac{21u_n - {u_n}^2 - 21u_n}{u_n + 21} = \frac{-{u_n}^2}{u_n + 21}$$

لدينا: $u_n > 0$ أي: $\begin{cases} -{u_n}^2 < 0 \\ u_n + 21 > 0 \end{cases}$ ينتج: $\frac{-{u_n}^2}{u_n+21} < 0$ فنجد: $7u_{n+1} - u_n < 0$ أي: $u_{n+1} - \frac{1}{7}u_n < 0$.

ومنه: $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$.

ب- باستعمال البرهان بالتراجع، تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$:

نسمي $Q(n)$ الخاصية: $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 1$ و $\left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$ حيث: $1 \leq 1$ أي: $u_0 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$.

ومنه: $Q(0)$ محققة.

نفرض أن $Q(n)$ محققة من أجل n أي: $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

ونبرهن أن $Q(n+1)$ محققة من أجل $n+1$ أي: $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا من الفرضية: $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ فينتج: $\frac{1}{7}u_n \le \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ أي: $\frac{1}{7}u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

ولدينا من 3) أ- أن: $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ فنكتب: $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ فنجد: $u_{n+1} \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

ومنه: $P(n+1)$ محققة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

طريقة أخرى:

نبرهن أن $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ دون استعمال البرهان بالتراجع باعتماد الخطوات التالية:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ فنكتب:

$$\begin{cases} u_1 \le \frac{1}{7}u_0 \\ u_2 \le \frac{1}{7}u_1 \\ u_3 \le \frac{1}{7}u_2 \\ \dots \le \cdots \\ u_{n-2} \le \frac{1}{7}u_{n-3} \\ u_{n-1} \le \frac{1}{7}u_{n-2} \\ u_n \le \frac{1}{7}u_{n-1} \end{cases} \longrightarrow \text{بالضرب طرف لطرف}$$

ينتج:

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_{n-2} \times u_{n-1} \times u_n \le \frac{1}{7}u_0 \times \frac{1}{7}u_1 \times \frac{1}{7}u_2 \times \dots \times \frac{1}{7}u_{n-3} \times \frac{1}{7}u_{n-2} \times \frac{1}{7}u_{n-1}$$

بعد الاختزال ينتج: $u_n \le u_0 \underbrace{\left(\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\dots\times\frac{1}{7}\right)}_{n \text{ مرة}}$ أي: $u_n \le u_0\left(\frac{1}{7}\right)^n$ و $u_0 = 1$ ومنه: $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

جـ- حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا: $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ ولدينا أيضا: $u_n > 0$ أي: $0 < u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ حسب النهايات بالمقارنة فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

طريقة أخرى:

بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ وانطلاقا من $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+21}$ نكتب:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{u_n+21}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{3\left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right]}{\left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right]+21}$$

$$\ell = \frac{3\ell}{\ell+21}$$

أي: $\ell^2 + 18\ell = 0$ ونكتب أيضا: $\ell(\ell+18) = 0$ فنجد: $\ell = -18$ أو $\ell = 0$.

القيمة $\ell = -18$ مرفوضة لأن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 $(u_n > 0)$.

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$:

نبين أن: $v_{n+1} = q \times v_n$ فنتبع الخطوات التالية:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 18}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{u_n + 21}}{\frac{3u_n}{u_n + 21} + 18}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n}{u_n + 21}}{\frac{3u_n + 18(u_n + 21)}{u_n + 21}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{3u_n + 18(u_n + 21)}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{21u_n + 21 \times 18}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n}{21(u_n + 18)}$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{21} \times \frac{u_n}{(u_n + 18)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n}{(u_n + 18)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{7} \times v_n$$

ومنه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ وحدها الأول: $v_0 = \frac{u_0}{u_0+18} = \frac{1}{1+18} = \frac{1}{19}$.

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج أن: $u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

انطلاقا من عبارة الحد العام لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{19}$ نكتب:

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{19} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$$

ولدينا: $v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$ أي: $u_n = v_n(u_n + 18)$ وأيضا: $u_n = v_n u_n + 18v_n$ أي: $u_n(1 - v_n) = 18v_n$.

فنجد: $u_n = \frac{18v_n}{1-v_n}$.

ومنه:

$$u_n = \frac{18v_n}{1 - v_n} = \frac{18 \times \frac{1}{19} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{19} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{\frac{1}{19} \times 18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{\frac{1}{19}\left(19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n\right)} = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

- حساب نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{18\times 0}{19-0} = 0 \quad \left(\text{لأنّ : } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0\right)$$

توقعات بكالوريا 2019 في المتتاليات العددية (تمرين رائع مرفق بالحل المفصل يستحق النشر)

نص التمرين:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{9+{u_n}^2}{2u_n}$.

① برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n > 3$.

② أ- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب نهايتها.

③ أ- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$.

ب- استنتج من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n - 3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ- أحسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

④ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع:

$$\begin{cases} v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \\ \text{و} \\ w_n = \dfrac{v_n}{n} \end{cases}$$

أ- بيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن:

$$3n < v_n \leq 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 3n$$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

الحل المفصل:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{9+{u_n}^2}{2u_n}$.

① نبرهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n > 3$.

لتكن $P(n)$ الخاصية: « $u_n > 3$ »

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 6$ و $6 > 3$ أي $u_0 > 3$.

ومنه: $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ محققة أي: $u_n > 3$.

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ محققة أي: $u_{n+1} > 3$.

لدينا:

$$u_{n+1} - 3 = \frac{9 + {u_n}^2}{2u_n} - 3 = \frac{{u_n}^2 - 6u_n + 9}{2u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{2u_n}$$

لدينا من فرضية التراجع أن: $u_n > 3$.

معناه: $u_n > 0$ و $(u_n - 3)^2 > 0$.

فينتج: $\frac{(u_n-3)^2}{2u_n} > 0$.

أي: $u_{n+1} - 3 > 0$.

فنجد: $u_{n+1} > 3$.

أي: $P(n+1)$ محققة.

ومنه:

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n > 3$$

② أ- نبيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

نقول عن متتالية (u_n) إنها متناقصة تماما إذا كان: $u_{n+1} - u_n < 0$.

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9 + {u_n}^2}{2u_n} - u_n = \frac{9 - {u_n}^2}{2u_n} = \frac{(3 + u_n)(3 - u_n)}{2u_n}$$

لدينا من البرهان بالتراجع أن: $u_n > 3$.

معناه: $u_n > 0$ و $3 + u_n > 0$ و $3 - u_n < 0$.

فينتج: $\frac{(3+u_n)(3-u_n)}{2u_n} < 0$.

أي: $u_{n+1} - u_n < 0$.

ومنه:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

② ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة وحساب نهايتها.

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1} - u_n < 0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 $(u_n > 3)$ فهي إذن متقاربة نحو نهاية ℓ حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \; ; \; (3 \leq \ell \leq 6)$$

فنكتب:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9 + {u_n}^2}{2u_n} = \frac{9 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)^2}{2\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)}$$

فينتج: $\ell = \frac{9+\ell^2}{2\ell}$.

أي: $\ell^2 - 9 = 0$.

نجد: $\ell = -3$ (قيمة مرفوضة لأن: $3 \leq \ell \leq 6$) أو $\ell = 3$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

③ أ- نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}-3 \leq \frac{1}{2}(u_n-3)$.

لدينا من السؤال ①: $u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)^2}{2u_n}$.

ونكتب أيضا: $u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)}{2u_n}(u_n-3)$.

- بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq u_0$.

أي: $u_n \leq 6$.

ونكتب: $0<u_n-3 \leq 3 \ldots (1)$.

- ولدينا من البرهان بالتراجع أن: $u_n>3$.

معناه: $2u_n>6$.

أي: $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{6} \ldots (2)$.

من (1) و (2) ينتج: $\frac{u_n-3}{2u_n} \leq \frac{3}{6}$.

أي: $\frac{u_n-3}{2u_n} \leq \frac{1}{2}$.

ونكتب: $\frac{u_n-3}{2u_n}(u_n-3) \leq \frac{1}{2}(u_n-3)$ (لأن: $u_n-3>0$).

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$u_{n+1}-3 \leq \frac{1}{2}(u_n-3)$$

③ ب- استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n-3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

من ③ أ- لدينا: $u_{n+1}-3 \leq \frac{1}{2}(u_n-3)$.

فنكتب:
$$\begin{cases} u_1-3 \leq \frac{1}{2}(u_0-3) \\ u_2-3 \leq \frac{1}{2}(u_1-3) \\ u_3-3 \leq \frac{1}{2}(u_2-3) \\ \ldots \\ u_{n-1}-3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-2}-3) \\ u_n-3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1}-3) \end{cases}$$

بالضرب لطرف لطرف ينتج:

$$u_n-3 \leq (u_0-3)\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times \ldots \times\frac{1}{2}\right)$$

نجد: $u_n-3 \leq (u_0-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

بالتعويض ينتج: $u_n-3 \leq (6-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالبرهان بالتراجع.

③ جـ- نحسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا من ③ بـ- : $0<u_n-3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

وباستعمال النهايات بالمقارنة: $0<\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-3 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ينتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-3=0$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=3$$

④ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع:

$$\begin{cases} v_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \\ \text{و} \\ w_n=\frac{v_n}{n} \end{cases}$$

أ- نبيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن:

$$3n<v_n \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

لدينا من ③ بـ- أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم:

$$0<u_k-3 \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

فنكتب:

$$0<\sum_{k=0}^{n-1} u_k-3 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1} u_k-\sum_{k=0}^{n-1} 3 \leq 3\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1} u_k-3n \leq 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1} u_k-3n \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$3n<\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$3n<v_n \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

③ أ- نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}-3 \le \frac{1}{2}(u_n-3)$.

لديا من السؤال ①: $u_{n+1}-3=\frac{(u_n-3)^2}{2u_n}$.

ونكتب أيضا: $u_{n+1}-3=\frac{u_n-3}{2u_n}(u_n-3)$.

● بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ فإن: $u_n \le u_0$.

أي: $u_n \le 6$.

ونكتب: $0<u_n-3\le 3$ ... (1).

● ولدينا من البرهان بالتراجع أن: $u_n>3$.

معناه: $2u_n>6$.

أي: $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{6}$ ... (2).

من (1) و (2) ينتج: $\frac{u_n-3}{2u_n}\le\frac{3}{6}$.

أي: $\frac{u_n-3}{2u_n}\le\frac{1}{2}$.

ونكتب: $\frac{u_n-3}{2u_n}(u_n-3)\le\frac{1}{2}(u_n-3)$ (لأن: $u_n-3>0$).

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$$

③ ب- استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n-3\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

من ③ أ- لدينا: $u_{n+1}-3\le\frac{1}{2}(u_n-3)$.

فنكتب:

$$\begin{cases} u_1-3\le\frac{1}{2}(u_0-3)\\ u_2-3\le\frac{1}{2}(u_1-3)\\ u_3-3\le\frac{1}{2}(u_2-3)\\ \dots\\ u_{n-1}-3\le\frac{1}{2}(u_{n-2}-3)\\ u_n-3\le\frac{1}{2}(u_{n-1}-3)\end{cases}$$

بالضرب لطرف لطرف ينتج:

$$u_n-3\le(u_0-3)\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\dots\times\frac{1}{2}\right)$$

نجد: $u_n-3\le(u_0-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

بالتعويض ينتج: $u_n-3\le(6-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-3\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالبرهان بالتراجع.

③ جـ- نحسب مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا من ③ ب- : $0<u_n-3\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

وباستعمال النهايات بالمقارنة: $0<\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-3\le\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ينتج: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-3=0$.

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=3$$

④ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع:

$$\begin{cases} v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k\\ \text{و}\\ w_n=\frac{v_n}{n}\end{cases}$$

أ- نبيّن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن:

$$3n<v_n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

لدينا من ③ ب- أنه من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم:

$$0<u_k-3\le 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

فنكتب:

$$0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-3\le\sum_{k=0}^{n-1}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}3\le 3\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-3n\le 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$0<\sum_{k=0}^{n-1}u_k-3n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$3n<\sum_{k=0}^{n-1}u_k\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

ومنه:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$3n<v_n\le 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

ب- استنتاج: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$3n < v_n \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

باستعمال النهايات بالمقارنة ينتج:

$$\lim_{n\to+\infty} 3n < \lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty}\left[6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n\right]$$

ولدينا:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty \\ \text{و} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n\right] = +\infty \end{cases}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$3n < v_n \leq 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3n$$

ينتج:

$$\frac{3n}{n} < \frac{v_n}{n} \leq \frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{3n}{n}$$

أي:

$$3 < w_n \leq \frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3$$

باستعمال النهايات بالمقارنة ينتج:

$$3 < \lim_{n\to+\infty} w_n \leq \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+n\right]$$

ولدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+3\right] = 3$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 3$$

بالتوفيق في امتحان البكالوريا