الوحدة الثانية : [redacted] النهايات والاستمرار

اعداد المدرس : محمد الأحمد 0994837185

1- نهاية تابع صحيح عند اللانهاي:

نعوض بالحد المسيطر الموجود في التابع

نقصد بالحد المسيطر المجهول ذو أكبر قوة

في التابع $f(x) = -3x^5 + x^2 + \sqrt{3}$

الحد المسيطر هو $-3x^5$

قاعدة: لإيجاد نهاية تابع صحيح عند اللانهاي

نعوض في الحد المسيطر فقط مع العلم أن:

1) $(+\infty)^n = +\infty \; ; \; \forall n \in N$

2) $(-\infty)^n = -\infty$ فردي n   3) $(-\infty)^n = +\infty$ زوجي n

4) $\text{عدد} \times \infty = \infty$ مع مراعاة ضرب الاشارة

5) $\infty \times \infty = \infty$ مع مراعاة ضرب الإشارة

6) $+\infty + \infty = +\infty$ 7) $-\infty - \infty = -\infty$

ص 34 تمرين (1): أحسب نهاية التوابع الآتية

1) $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ عند $-\infty$ و $+\infty$

الحل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3) = (+\infty)^3(-) = -\infty$

نحن نعوض بالحد المسيطر لنوضح

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$

2) $f(x) = -3x^4 + 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-3x^4) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-3x^4) = -\infty$

3) $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(8x^4) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(8x^4) = +\infty$

4) $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(5x^3) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(5x^3) = +\infty$

For You

تمرين على الماشي أوجد نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$

1) $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

2) $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$

2- نهاية تابع كسري عند اللانهاية

بشرط أن يكون البسط والمقام تابعين صحيحين

نميز الحالات الثلاث الآتية لحساب النهاية عند ∞

الحالة الأولى: درجة البسط أصغر من درجة المقام تكون النهاية معدومة 0

مثال: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+5}\right) = 0$

نقصد بدرجة البسط أي الحد المسيطر في البسط ودرجة المقام أي الحد المسيطر في المقام

اعداد المدرس : محمد الأحمد 0994837185

يوجد حالة خاصة: إذا كان البسط عدد والمقام جذر أيضاً النهاية معدومة

مثال: $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{-x}} = 0$ & $\lim_{x\to+\infty} \frac{-6}{\sqrt{x+1}} = 0$

الحالة الثانية: درجة البسط تساوي درجة المقام

تكون النهاية تساوي أمثال الحد المسيطر في البسط على أمثال الحد المسيطر في المقام

$$\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{3x^2+x}{-x^2+2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2}{-x^2}\right) = -3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x+8x^2}{x+2x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{8x^2}{2x^2}\right) = 4$$

الحالة الثالثة: درجة البسط أكبر من درجة المقام، تكون النهاية بتعويض [الحد المسيطر] بالبسط على الحد المسيطر في المقام وبعدها نعوض في ناتج القسمة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x^4}{2x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right) = +\infty$$

3- المقارب الأفقي والوضع النسبي:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f فإذا كان

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ إذ l عدد

يكون $y=l$: مقارب أفقي لـ C_f عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ إذ l عدد.

يكون $y=l$ مستقيم مقارب أفقي لـ C_f عند $+\infty$

ولدراسة الوضع النسبي لـ C مع مقاربه الأفقي $y=l$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-l$ ونميز

① $f(x)-l>0$ يكون C فوق مقاربه

② $f(x)-l<0$ يكون C تحت مقاربه

تمرين (2): مهم ليكن التابع $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-3}{2}\}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$

① أوجد نهاية التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$ واستنتج المقارب الأفقي

② أدرس الوضع النسبي لـ C_f مع مقاربه الأفقي

الحل:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$y=2$: مقارب أفقي لـ C_f عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ $y=2$: مقارب أفقي لـ C_f عند $+\infty$

② توحيد المقامات $f(x)-2 = \frac{4x-5}{2x+3} - 2$

$f(x)-2 = \frac{-11}{2x+3}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
-11	$-$	$-$	$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$f(x)-2$	$+$	‖	$-$
الوضع النسبي	C_f فوق مقاربه	‖	C_f تحت مقاربه

تمرين (3): ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق العلاقة $f(x)=\frac{5x-1}{x-1}$

① جد نهاية التابع عند $-\infty$ و $+\infty$ واستنتج المقارب الأفقي

② أدرس الوضع النسبي لـ C_f مع مقاربه الأفقي

عزيزي الطالب I Love You

اعداد المدرس : محمد الأحمد 0994837185

4) نهاية تابع كسري عند اللانهاية وعدد والمقارب الشاقولي: ليكن C الخط البياني للتابع f

لحساب نهاية تابع كسري عند عدد نعوض العدد في كل مجهول موجود في البسط والمقام

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$x = a$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$x = a$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

قواعد

1) $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ 2) $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

3) $\frac{\infty}{0} = \infty$ 4) $\frac{0}{\infty} = 0$

5) $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$ 6) $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

1 و 2 و 3 مع مراعاة قسمة الإشارة

ملاحظة: ليكن $f(x)$ معرف على المجال $]a, b[$

عندئذٍ نسمي نهاية من اليمين عند a

كتابةً: $\lim_{x \to a^+} f(x) =$ أو كتابةً $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) =$

$\lim_{x \to b^-} f(x)$ نسمي نهاية من اليسار عند b

أو $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) =$

مهم

تدريب: في كل حالة آتية جد نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$ وعند النقطة المعطاة a

وأوجد معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي

1) $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ ، $a = 1$:أوجد

الحل: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ & $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$y = 1$: مقارب أفقي لـ C عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

ملاحظة هامة جداً: لمعرفة اشارة الصفر نعوض قيمة أصغر من القيمة التي تعدم المقام مباشرة إذا كنا ندرس النهاية من اليسار

وإذا كنا ندرس النهاية من اليمين نعوض قيمة أكبر منها مباشرة مثال ندرس النهاية عند 2 نعوض 1 إذا كانت النهاية من اليسار ونعوض 3 إذا كانت النهاية من اليمين

2) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ ، $a = 2$ الحل

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

اعداد المدرس : محمد الأحمد 0994837185

تدرب ص43

تمرين: أحسب نهاية التوابع عند $+\infty$ و $-\infty$ وعند النقطة المعطاة a وأوجد كل معادلة مقارب أفقي أو شاقولي إن وجد

① $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ $a=1,2$

الحل: $f(x)=\dfrac{2x^2}{-x^2+3x-2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

$y=-2$: مقارب أفقي لـ C عند $-\infty$ و $+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$x=1$: مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

هنا عوضنا (1) لمعرفة إشارة الصفر وليس 2 لا نها تعدم المقام

$x=1$: مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

هنا عوضنا 2 وليس 1 لأن 1 يعدم المقام لمعرفة اشارة الصفر

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$

$x=2$: مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{8}{0^-}=-\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

③
② $f(x)=x^2-2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $a=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

تمارين دسمة شوي For You فتان تمام

④③ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $a=-2,2$

④ $f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2}$ $a=1,2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

⑤
③ $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $a=2$ & $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ لأن درجة المقام أكبر من درجة البسط

$y=0$ مقارب أفقي لـ C منطبق $x'x$ عند $\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$ لوجود تربيع في المقام

$x=2$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$

$x=2$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

⑥
④ $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$ $a=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-5+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-5+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-11+\dfrac{2}{0^-}=-\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي لـ C عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-11+\dfrac{2}{0^+}=+\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي لـ C عند $+\infty$

For You تمرين حلو وخفيف

~~على المعدة وإذا حسيته ثقيل اشرب ماء~~

⑤ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $a=-1$ ⑥ $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$ $a=-1$

⑦ $f(x)=-3x+5+\dfrac{2}{x-2}$ $a=2$

⑧ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ $a=1$