الرياضيات

Bac
2024

الأشعة

القسم التحليلي

أ.ماهر برير

4-حل مسائل وتطبيقات على الإسقاط

رياضيات مع المدرس ماهر برير 0994 830 381

* المسألة الأولى:

في الشكل المجاور: $D-ABC$ هرم

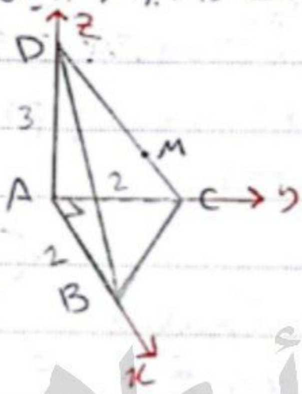
رأسه D وقاعدته المثلث القائم ABC في A

وارتفاع الهرم هو DA، حيث:

$AD=3$، $AB=AC=2$ والمطلوب:

(1): اختر معلماً متجانساً وأوجد إحداثيات نقاط الشكل:

(2): أوجد إحداثيات النقطة M المعرفة: $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



الحل: (1):

تذكرة / ارتفاع الهرم هو مستقيم يصل بين رأس الهرم ومستوي القاعدة، وارتفاع الهرم هو دوماً عمودي على مستوي القاعدة والمستقيم العامد لأي مستوٍ هو مستقيم عمودي على كل مستقيم فيه.

ومنه $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp AC \end{cases}$ برهاناً.

$AC \perp AB$ (فرضاً) وبالتالي نختار المعلم الذي مبدأه النقطة A ولا مانع غير ذلك: (وانتبه إلى المحاور هنا)

ومنه نختار المعلم المتجانس:

$\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$

ومنه: $A(0,0,0)$ ، $B(2,0,0)$

$C(0,2,0)$ ، $D(0,0,3)$.

(2):

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_M-x_C \\ y_M-y_C \\ z_M-z_C \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_D-x_C \\ y_D-y_C \\ z_D-z_C \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_M-0 \\ y_M-2 \\ z_M-0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-2 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_M=0$ ، $y_M=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$

$z_M=1 \Rightarrow M\left(0, \frac{4}{3}, 1\right)$

*المسألة الثانية (8/39 من الكتاب)

E-ABCD هرم رأسه E وقاعدته مربع . [BE] ارتفاع الهرم ، ونعلم أن:

$EB = 4\sqrt{2}$ ، $AB = 4$

M نقطة من القطعة [ED] وتحقق: $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$

ولتكن:

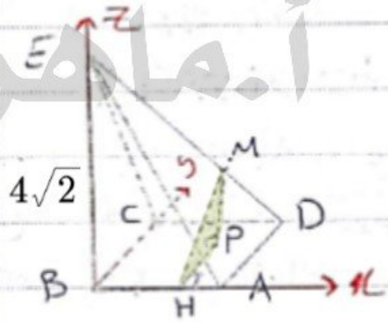
P المسقط القائم للنقطة M على المستوي (ABCD)

H " " " P على المستقيم (AB)

والمطلوب:

احسب طول القطعة المستقيمة [MH].

*الحل:



يجب حساب إحداثيات M و H

/ لنتذكر بداية: لحساب طويلة MH يجب استخدام دستور الطويلة وذلك في معلم متجانس حصراً لذلك يجب اختيار معلم متجانس وحساب إحداثيات النقاط /

- اختيار معلم متجانس:

لدينا فرضاً ABCD مربع ومنه $BC \perp BA$ ، أيضاً [EB] ارتفاع الهرم عمودي على مستوي القاعدة فهو عمودي على كل مستقيم محتوى فيه أي:

$EB \perp BA$ and $EB \perp BC$

وبالتالي النقطة B هي النقطة الوحيدة التي تصلح لأن تكون مبدأ لمعلم متعامد ، وبما أن القاعدة مربع طول ضلعه $AB = 4$ سيكون المعلم متجانس بجعل أطوال أشعة الأساس تساوي 1 ، إذاً نختار المعلم:

$$\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$$

$x = 4$ ، $y = 4$ ، $z = 4\sqrt{2}$

$B(0,0,0)$ ، $A(4,0,0)$

$D(4,4,0)$ ، $E(0,0,4\sqrt{2})$

$C(0,4,0)$

لدينا فرضاً: $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$ ومنه:

$$3\begin{bmatrix} x_M - x_D \\ y_M - y_D \\ z_M - z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \\ z_E - z_D \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$3\begin{bmatrix} x_M - 4 \\ y_M - 4 \\ z_M - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 4 \\ 0 - 4 \\ 4\sqrt{2} - 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3x_M - 12 \\ 3y_M - 12 \\ 3z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &3x_M - 12 = -4 \Rightarrow x_M = \frac{8}{3} \\ &3y_M - 12 = -4 \Rightarrow y_M = \frac{8}{3} \\ &3z_M = 4\sqrt{2} \Rightarrow z_M = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

يجب حساب إحداثيات H .

هنا يجب الانتباه إلى ما يلي، لدينا فرضاً
P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$
H " " " " المستقيم (AB).
ما معنى ذلك؟

- الموضوع ببساطة على الشكل الآتي.
إن إحداثيات المسقط القائم لنقطة M
على مستوي (مستقيم) هي نفسها إحداثيات
M ويكن ضمن المستوي (المستقيم)
الواقعة فيه نقطة المسقط.

- بالعودة إلى المسألة:
(لحساب إحداثيات H يجب حساب إحداثيات P)
- P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ -
نفس الإحداثيات ضمن المستوي
P واقعة في المستوي (O,x,y) إذاً
(لها نفس فاصلة وترتيب النقطة M أما
الراقم معدوم ومنه: $P\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$
- H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)
- نلاحظ أن H تقع على محور الفواصل أي
لها نفس فاصلة النقطة P فقط.
$H\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$ ومنه يمكننا الآن
حساب طول القطعة المستقيمة $[MH]$ -

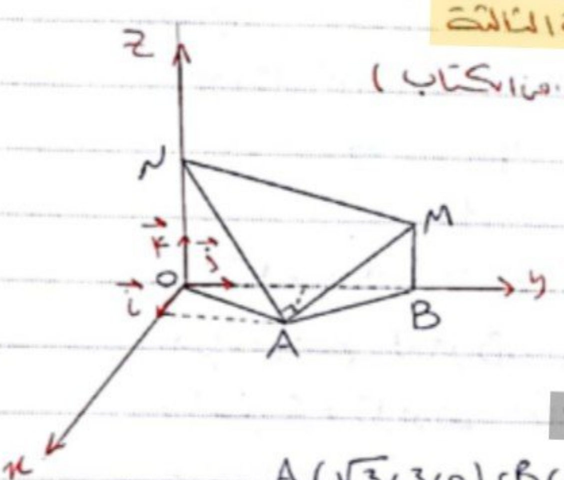
$$MH = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2 + (z_H - z_M)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

/ لا داعي لكتابة الشرح هو للتوضيح فقط /

*** المسألة الثالثة**

(20/42 من الكتاب)



$n > m > 0$

$A(\sqrt{3}, 3, 0)$, $B(0, 6, 0)$
$M(0, 6, m)$, $N(0, 0, n)$
في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ إذن n, m
ليكون:
- MAN قائم في A.
- حجم المجسم $MNAOB$ $5\sqrt{3}$.

الحل: لنحسب أطوال أضلاع المثلث
MAN (حيث المعلم متجانس فرضاً)

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$$

$$AM = \sqrt{12 + m^2}$$

بنفس الطريقة نجد:

$$AN = \sqrt{3 + 9 + n^2} \Rightarrow AN = \sqrt{12 + n^2}$$

$$MN = \sqrt{0 + 36 + (n-m)^2} \Rightarrow$$

$$MN = \sqrt{36 + n^2 - 2nm + m^2}$$

ليكون المثلث AMN قائم في A يجب أن يتحقق:

$$(MN)^2 = (AM)^2 + (AN)^2$$

نعوض من :

$$36+n^2-2nm+m^2=12+n^2+12+m^2$$

$$-2nm=24-36 \Rightarrow$$

$$nm=6 \quad ....(1)$$

- نشكل معادلة من الفرض الثانية
- حيث المجسم $A-OBMN$ هو هرم
- رأسه A وقاعدته $OBMN$ هو
- شبه منحرف قاعدتاه MB ، NO
- وحجم هذا الهرم هو $5\sqrt{3}$

- حجم الهرم :

* $V=\frac{1}{3}S(OBMN)\times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع الهرم}}$

- لنحسب مساحة القاعدة: حيث مساحة شبه المنحرف هي $\frac{(\text{مجموع القاعدتين})\times \text{ارتفاعه}}{2}$

$$S(OBMN)=\frac{(ON+BM)\times OB}{2}$$

$$=\frac{(n+m)\times 6}{2}$$

$$=3(n+m)$$

- ارتفاع الهرم هو KA أي $\sqrt{3}$ ومنه:

نعوض في *

$$5\sqrt{3}=\frac{1}{3}\left(3(n+m)\right)\times\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow n+m=5 \quad ....(2)$$

من المعادلتين : $n.m=6$

$n+m=5$

نحل هاتين المعادلتين حلاً مشتركاً أو بالتجريب مباشرة من عددين مجموعهما 5 وجداؤهما 6 نجد العددين 3 ، 2 وحسب الشرط $n>m$ نجد: $n=3$ ، $m=2$

ملاحظة وقواعد ثابتة حول المعلم.

* في المسائل التي تحوي رسوم المجسمات (مكعب. متوازي مستطيلات. موشور قائم - متوازي سطوح . هرم أو أحرفه الجانبية ارتفاع) يمكن حلها باستخدام معلم متجانس أو متعامد أو كيفي.

/ أما إذا كانت المسألة عبارة عن علاقات شعاعية نتعامل معها وفق قواعد شعاعية نتعرف عليها لاحقاً في القسم الشعاعي /

* في متوازي السطوح تحديداً (المجسم أوجهه متوازيات أضلاع) يكون المعلم كيفي (ليس متجانس ولا متعامد)، وفي حالة اختيار معلم لا يوجد فيه أطوال نعتبر أطوال أشعة الأساس تساوي 1

الرجاء الانتباه جيداً إلى هذه الملاحظات.