منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

التحليل العددي

الدكتور
نصر الدين عيد
أستاذ في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣٢ - ٢٠١١

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

التحليل العددي

الدكتور

نصر الدين عيد

أستاذ في قسم الرياضيات

لطلاب السنة الثالثة
قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣٢هـ - ٢٠١١م

الفهرس

الفصل الأول

الأخطاء

الفصل الثاني

حل المعادلات الجبرية غير الخطية ومعادلات كثيرات الحدود

الفصل الثالث

الطرائق العددية لحل جملة المعادلات الجبرية الخطية

وتعيين القيم الذاتية (الخاصة)

الفصل الرابع

تقريب التوابع باستخدام الاستيفاء الداخلي

الفصل الخامس

الاشتقاق والتكامل العدديان

الفصل السادس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية

المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية

الفصل السابع

تقريب التوابع باستخدام طريقة المربعات الصغرى توابع تشيبشيف، توابع لوجندر، تقريب بادي

الفصل الثامن

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية حل المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئية

حل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية

المقدمة

أعد هذا الكتاب لطلاب المرحلة الجامعية الأولى في السنة الثالثة بقسم الرياضيات طبقاً لمنهاج مقرر " التحليل العددي " المحدد في الخطة الدراسية الجديدة لطلاب كلية العلوم.

إن مفردات هذا المقرر عديدة وقد تطلب هذا العمل الرجوع إلى الكثير من المراجع والكتب الدراسية الأجنبية والعربية (المذكورة في المراجع) وتم بذل جهد غير قليل في سبيل تنسيق مفاهيم هذا المقرر وإعداد عدد كبير من الأمثلة والتمارين المناسبة والحديثة جداً.

يتضمن هذا الكتاب ثمانية فصول يمكن أن نعرضها كما يلي:

الفصل الأول: ويتضمن دراسة موضوع الأخطاء وهو من المواضيع الهامة في التحليل العددي وبالتالي في كافة العلوم التي تستخدم هذا العلم.

الفصل الثاني: وقد تضمن الطرائق العددية المتعددة لحل المعادلات الجبرية غير الخطية وكذلك معادلات كثيرات الحدود.

الفصل الثالث: وقد تضمن الطرائق العددية لحل جمل المعادلات الجبرية غير الخطية وكذلك تعيين القيم الذاتية نظراً لأهمية هذه المواضيع التي طرحت بشكل حديث جداً تناسب حتى الباحثين من طلاب الدراسات العليا وغيرهم.

الفصل الرابع: وقد تضمن الطرائق العددية المختلفة لتقريب التوابع باستخدام طرائق الاستيفاء الداخلي.

الفصل الخامس: ويتضمن هذا الفصل الطرائق العددية في الاشتقاق العددي و التكامل العددي تم فيه بحث مسألة الاشتقاق العددي باستخدام عدد من كثيرات الحدود الاستيفائية مثل كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذي الفروق الأمامية ثم الخلفية. كما تم دراسة التكامل العددي بعدة طرق مثل طريقة شبه المنحرف (البسيطة والمركبة) وكذلك طريقة سيمبسون (البسيطة والمركبة) وطريقة رومبرغ وكذلك موضوع أخطاء هذه الطرق.

الفصل السادس: تم فيه بحث مسألة الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية باستخدام طرق التحليل العددي، مثل طريقة تايلور وطريقة أولر وطريقة أولر المحسنة وطريقة رانج كوتا و دراسة حل موضوع المعادلات الفرقية الخطية من المرتبة الأولى والثانية.

الفصل السابع: وتضمن هذا الفصل نظرية التقريب بطرق عديدة مثل طريقة المربعات الصغرى وطريقة التقريب باستخدام كثيرات حدود تشيبشيف ولوجاندر والتقريب بطريقة بادي.

الفصل الثامن: تم فيه دراسة حل المعادلات التفاضلية الجزئية المتعددة الأنواع، المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئية و دراسة موضوع استقرار الحل، حل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية، المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية بطريقة الفروق المنتهية. تم أيضاً التطرق لبعض الطرائق العددية المتقدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية وخاصة طريقة العناصر المنتهية.

إن مواضيع التحليل العددي من المواضيع الهامة جداً في الميادين العلمية المختلفة ولا غنى لكل الفروع العلمية وخاصة التطبيقية من دراسة التحليل العددي ولغات البرمجة المتعددة ولذلك فقد تم حل الكثير من الأمثلة العددية المتنوعة لتدريب الطالب على حل الكثير من التمارين التي يمكن أن يواجهها في حياته العملية أو يمكنه أن يستفيد منها بشكل مماثل.

أخيراً آمل أن أكون قد وفقت في تحقيق الهدف المنشود من تأليف هذا الكتاب... وأشكر زملائي الذين استفدت من مراجعهم ولكل من يقدم لي نقداً بناءً لتجاوز الهفوات التي قد ترد في هذا الكتاب.

والله الموفق

حلب في / ٤ / ٢٠١١م

المؤلف
نصر الدين عيد

من ص ١٧ ← ٣٦
محذوف

الفصل الأول

حساب الأخطاء Errors

مقدمة:

إن التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير القابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة وذلك لكي نحكم على قبول هذه الإجابة أو رفضها.

هناك عدة أنواع من الخطأ أهمها:

1- خطأ المعطيات (DATA) الناتجة عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية غير الدقيقة بشكل كاف أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل مستخدمين بذلك قواعد التدوير مثلاً.

2- خطأ الطريقة: ينتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلاً بعلاقة أخرى أبسط منها. ومثال ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف مثلاً في حساب قيمة التكامل المحدود.

3- الخطأ المقتطع: والناتج عن اعتبار أن مجموع السلسلة غير المنتهية مثلاً هو عدد من حدودها.

4- أخطاء الحاسب الآلي: ناتجة عن الحاسب نفسه فمثلاً لنفرض أن لدينا حاسب بحيث أن كل عدد فيه يحتوي على خمسة أرقام فقط وإننا نريد جمع العددين 9.2654 و 7.1625 إن المجموع هو 16.4279 وهو يحتوي على ستة أرقام عندئذ الحاسب لايستطيع تخزين هذه الأرقام وبالتالي يقوم بتدوير الأرقام الستة إلى 16.428 .

أخيراً هناك أخطاء مهملة، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما مقارنة بشخص آخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

يمكن أن نعبر عن الأخطاء عادة بثلاثة طرق:

(1-1) الخطأ المطلق Absolute error :

ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية ويرمز له بالشكل: $E_a = |x - x_1| = \Delta x$

حيث x هي القيمة الحقيقية (الدقيقة) و x_1 القيمة التقريبية المحسوبة أو التقريبية التجريبية، (سنرمز للخطأ المطلق بـ E بدلاً من E_a إذا لم يكن هناك التباس للسهولة).

(1-2) الخطأ النسبي Relative error :

وهو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة الحقيقية. حيث إن الخطأ المطلق لايعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس مثلاً : لو قسنا طول غرفة وطول المسافة من حلب إلى دمشق وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق. طبعاً المسافة من حلب إلى دمشق أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال التعريف السابق والذي يرمز له بـ:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (1-1)$$

(1-3) الخطأ المرتكب:

وهو عبارة عن إحدى القيمتين:

$$\alpha_x = x_1 - x \quad \text{و} \quad \alpha_x = x - x_1 \qquad (1-2)$$

أي أن :

$$E = |\alpha_x| = |x - x_1| = |x_1 - x|$$

(1-4) الخطأ المئوي Percentage error

وهو عبارة عن الخطأ النسبي مضروباً بـ 100 . أي يساوي $100E_r$.

(1-5) أخطاء تمثيل التوابع والعلاقات:

إن الأخطاء المرتكبة بسبب تمثيل التوابع يمكن تحديدها بعلاقة خطأ عامة كما يلي:

ليكن :

$$N = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1-3)$$

تابع للمتحولات المستقلة x_i ; $(i=1,...,n)$ وبحيث إن كل من هذه المتحولات خاضع للخطأ Δx_i $(i=1,...,n)$ على الترتيب . عندئذ يوجد خطأ ΔN للتابع بحيث يكون:

$$N+\Delta N = f(x_1+\Delta x_1, x_2,..., x_n+\Delta x_n) \qquad (1\text{-}4)$$

إن الطرف الأيمن من هذه العلاقة يمكن نشره على شكل سلسلة تايلور Taylor series لعدة متحولات فنجد:

$$\begin{aligned} f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,..., x_n+\Delta x_n) &= f(x_1, x_2,..., x_n) \\ &+\left(\Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+\Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+...+\Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(\Delta x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+...+\Delta x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}+\right. \\ &+2\Delta x_1 \Delta x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}+... \\ &\left.+2\Delta x_{n-1}\Delta x_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right) \end{aligned}$$

عادة أخطاء المتحولات يجب أن تكون نسبياً صغيرة، أي أن: $\Delta x_i / x_i << 1$ ، وبالتالي فإنه يسمح بتجاهل التربيع والجداءات والقوى العالية لـ $\Delta x_i (i=1,...,n)$ ، وبكتابة تقريب المرتبة الأولى:

$$N+\Delta N = f(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (1\text{-}5)$$

وإذا طرحنا الآن (1-3) من (1-5) نحصل على :

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad (1\text{-}6)$$

إن العلاقة (1-6) هي تقريب المرتبة الأولى لخطأ التابع. كما أنه يمكن ملاحظة أنه لدينا نفس التعبير كما للتفاضل الكلي للتابع N . وكذلك فإن علاقة الخطأ النسبي تكون مباشرة:

$$E_r = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\partial N}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{N}+\frac{\partial N}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{N}+...+\frac{\partial N}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{N} \qquad (1\text{-}7)$$

إن علاقة الخطأ يمكن أن تطبق على كل التوابع وتفيد بتقدير أي إجراء يمكن أن يعبر عنه على شكل علاقة.

مثال (1) : لنعتبر العلاقة:

$$N = \frac{3x^2y}{z^3}$$

لتقدير الخطأ في العلاقة N المرتكب بسبب خطأ في x و y و z نحدد أولاً المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{3x^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{9x^2y}{z^4}$$

وبالتالي نجد أن:

$$\Delta N = 6xyz^{-3}\Delta x + 3x^2z^{-3}\Delta y - gx^2yz^{-4}\Delta z$$

نستبدل في هذه العلاقة قيم الأخطاء Δx , Δy , Δz والمشتقات الجزئية تقدر في النقطة المرغوبة (x_1, y_1, z_1).

بشكل عام الأخطاء $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ يمكن أن تكون موجبة أو سالبة وإذا لم تحدد الإشارة فإن من الممكن فقط عندئذ حساب الخطأ الأعظمي لـ N:

$$\Delta N_{max} = \left| 6xyz^{-3}\Delta x \right| + \left| 3x^2y^{-3}\Delta y \right| + \left| gx^2yz^{-4}\Delta z \right|$$

من المهم ملاحظة أن هذه هي القيمة الأعظمية للخطأ وهذا يعطي حد أعلى للخطأ an upper bound on the error .

وللاستمرار في معالجة المثال، لنفرض أن: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.005$

عندئذ الخطأ الأعظمي عند النقطة (1 , 1 , 1) يكون:

$$\Delta N_{max} = 6(0.005) + 3 \ . \ (0.005) + 9(0.005) = 18(0.005) = 0.090$$

إن قيمة التابع عند النقطة (1 , 1 , 1) تكون : N = 3 والخطأ النسبي الأعظمي يكون:

$$E_{r\,max} = \left.\frac{\Delta N}{N}\right|_{max} = \frac{1}{3}(0.090) = 0.30$$

إن احتواء حدود مراتب عليا يكون مطلوباً فقط في حالات نادرة ، وهكذا مثلاً في المثال السابق (1) فإن حد المرتبة الثانية يكون:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = \Delta y^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\Delta z^2\right) +$$

$$+\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\Delta y \Delta z + \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z$$

إن المشتقات الجزئية محسوبة عند النقطة (1,1,1) تصبح:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\right) = 6yz^{-3} = 6 \quad ; \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} = 6xz^{-3} = 6;$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z} = -9x^2 z^{-4} = -9;$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 36x^2 yz^{-5} = 36 \;; \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial z} = -18xyz^{-4} = -18$$

إن المربعات والجداءات المتصالبة للأخطاء من أجل:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.005$$

تصبح:

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \Delta x \Delta y = \Delta x \Delta z = \Delta y \Delta z = 0.000025$$

الخطأ الأعظمي عند النقطة (1,1,1) محتوياً على حدود المرتبة الثانية يكون:

$$\Delta_{m\,max} = 0.090 + [3 + 0 + 18 + 6 + 9 + 18] + 0.000025 = 0.09135$$

ملاحظة:

1- إن معالجة مسألة الخطأ هي مسألة واسعة ولاتقتصر عند حد أو طريقة حيث إنه كما هو معلوم أن التحليل العددي هو علم التقريب وبالتالي فإنه عند حل أي مسألة

وفق طرق التحليل العددي سيكون هناك خطأ لهذه الطريقة (سيعالج عند ذكر كل طريقة من طرق التقريب في الفصول المقبلة).

ومن الأمثلة على ذلك حساب الخطأ الناتج عن نشر السلاسل والذي يمكن تقديره بالباقي بعد n حد.

لمزيد من التفاصيل يمكن مراجعة مقررات الحساب التفاضلي والسلاسل.

2- يمكن استخدام طريقة ثانية لحساب الخطأ المرتكب في حساب قيمة تابع بالشكل التالي:

الخطأ المرتكب في حساب قيمة تابع:

ليكن التابع $y = f(x)$ لمتحول واحد ولنحسب الخطأ المرتكب في حساب قيمة y من أجل قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية x .

من أجل x_1 قيمة تقريبية نحصل على القيمة التقريبية $y = f(x_1)$ ثم نقرب y_1 إلى قيمة y_2 وبذلك نكون قد ارتكبنا خطأ مقداره:

$$y - y_2 = (y - y_1) + (y_1 - y_2)$$

بأخذ القيمة المطلقة للطرفين نجد أن:

$$|y - y_2| \leq |y - y_1| + (y_1 - y_2)$$

إذن الخطأ المطلق المرتكب عبارة عن قسمين:

الأول: $|y - y_1|$ ويسمى عادة بالخطأ المطلق.

الثاني: $|y_1 - y_2|$ ويسمى بالخطأ الحسابي.

ولحساب الخطأ المطلق ننشر سلسلة تايلور للتابع $y(x)$ حول النقطة x_1 ، أي:

$$y - y_1 = f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(\zeta)$$

حيث اكتفينا بالحد الحاوي للمشتق الأول، لنأخذ القيمة المطلقة للطرفين فنجد:

$$|y - y_1| \leq \varepsilon_x . k$$

حيث: $|x - x_1| \leq \varepsilon_x$

و $\max|f'(x)| < k$

وبالتالي يمكن تعميم ذلك على تابع لأكثر من متغير (متغيرين مثلاً) فنجد:

$$|z - z_1| \le \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2$$

حيث إن:

$$|x - x_1| \le \varepsilon_1 \quad \& \quad |y - y_1| \le \varepsilon_2$$
$$\max|f'_x(x, y)| \le k_1 \quad \&$$
$$\max|f'_y(x - y)| \le k_2$$

مثال (2): احسب الخطأ المرتكب في حساب قيمة التابع:

$$y = \frac{x-1}{x}$$

وذلك من أجل:

$x = \pi$ ويأخذ $x_1 = 3.14$

الحل:

الخطأ الأعظمي المرتكب في حساب x_1 هو:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right) = \frac{1}{2 \times 10^2} = 0.005$$

ثم نحسب:

$$y' = \frac{x - (x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

وبما أن $3 < x < 4$ وبتعويض الحد الأدنى لـ x كونه في المقام فنجد أن:

$$k = \frac{1}{9}$$

وبالتالي:

$$\varepsilon_x . k = \frac{5}{1000} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{9000} \approx \frac{55}{10^5}$$

وبما أن قيمة التابع من أجل $x_1 = 3.14$ هي:

$$y_1 = \frac{3.14 - 1}{3.14} = 0.6815286 \approx 0.682 = y_2$$

فإننا نكون قد ارتكبنا خطأ حسابي مقداره: $|y_1 - y_2| = 0.0005$

وخطأ كلي مقداره:

$$\frac{55}{10^5} + \frac{5}{10^4} = \frac{105}{10^5} < \frac{2}{1000} = 0.002$$

وبالتالي حدوديات الناتج تكون:

$$0.680 < y(x) < 0.684$$

على سبيل المثال، لندرس علاقة الخطأ في منشور سلسلة تايلور من خلال النظرية التالية:

نظرية (1-1) نظرية تايلور:

لنفرض أن $f \in c^n[a,b]$ والمشتقات $f^{(n+1)}$ موجودة على المجال $[a,b]$.

ولتكن النقطة $x_o \in [a,b]$. من أجل كل $x \in [a,b]$ ، يوجد نقطة $\xi(x)$ بين x, x_o ، مع:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad (1-8)$$

حيث:

$$P_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n \qquad (1-9)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(n)}(x_o)}{k!}(x - x_o)^k \qquad (1-10)$$

و:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1} \qquad (1-11)$$

وهنا يسمى $P_n(x)$ كثير حدود تايلور النوني من أجل f حول النقطة x_o و $R_n(x)$ يسمى الحد الباقي (أو الخطأ) المرافق لـ $P_n(x)$. والسلسلة اللانهائية التي نحصل عليها من النهاية: $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ تسمى سلسلة تايلور لـ f حول x_o.

في الحالة الخاصة عندما $x_0 = o$ كثير حدود تايلور يسمى كثير حدود "ماك لوران" وسلسلة تايلور تسمى سلسلة " ماك لوران ".

مثال (3):

عين كثير حدود تايلور الثاني والثالث من أجل $f(x)=\cos x$ حول النقطة $x_0 = o$ واستخدم كثير الحدود لتقريب $\cos(0.01)$.

الحل:

بما أن $f \in c^{\infty}(\Re)$ عندئذ يمكن تطبيق النظرية السابقة من أجل أي $n > o$:

من أجل $n = 2$ ، $x_0 = o$ النظرية تعطي:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x)$$

حيث $\xi(x) \ni [o, x]$

يأخذ $x = 0.01$ فإن كثير حدود تايلور والحد الباقي يكون:

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 . \sin \xi(x)$$

$$= 0.99995 + (0.16\overline{6}).10^{-6} \sin \xi(x)$$

حيث: $o < \xi(x) < 0.01$

(والخط فوق العدد 0.166 يدل على أن هذا الرقم يتكرر بشكل لانهائي)

بما أن $|\sin \xi(x)| < 1$ فيمكننا أن نستخدم 0.99995 كتقريب لـ $\cos\ 0.01$ مع ستة أرقام عشرية على الأقل في الدقة وباستخدام الجداول لدينا:

$$\cos 0.01 = 0.999950042$$

وبالتالي يوجد دقة بتسعة أرقام عشرية.

إن كثير حدود تايلور الثالث حول النقطة $x_0 = o$ يحسب بالشكل:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 . \cos \xi(x)$$

حيث $o < \xi(x) < 0.01$ ، بما أن $f'''(o) = o$ فإن كثير حدود تايلور هو نفسه ويبقى التقريب 0.99995 نفسه ولكن الدقة تحسب بتسعة أرقام عشرية:

$$\left|\frac{1}{24}x^4.\cos\xi(x)\right| \le \frac{1}{24}(0.01)^4(1) \approx$$
$$\approx 4.2\times10^{-10}$$

(6-1) دقة الأعداد:

يوجد عادة نوعين من الأعداد ، تلك الأعداد المضبوطة تماماً، ونوع آخر يشير إلى قيم ذات درجات معينة من الدقة . أمثلة عن تلك ذات الدقة التامة، الأعداد الصحيحة 1,2,3,... .

الأعداد الكسرية $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$,.... والأعداد $\sqrt{3},\pi,e$,.... وغيرها من الأعداد المكتوبة بهذه الطريقة. إن العدد المقرب هو واحد من تلك التي تعبر عن القيمة حيث الدقة تكون فقط لعدد من السجلات الرقمية وهكذا مثلاً $\sqrt{3}$ يكون مضبوطاً كتابة ولكن لايمكن أن نعبر عنه بدقة كرقم منته من الأعداد الرقمية، يمكننا أن نكتبه مثلاً بالشكل 1.732 حيث يكون كتقريب وكذلك يمكن كتابته بالشكل 1.73205 كتقريب أفضل. إن الأرقام المستخدمة للتعبير عن عدد تسمى أشكال معنوية significant figures إذا كان لهم معنى في العدد . مثلاً كل الأعداد الرقمية في 1.73205 تكون أشكال معنوية. بينما في العدد 0.00572 فقط 5 , 7 , 2 أشكال معنوية . الـ o استخدم لمكان النقطة العشرية. إذا استخدم الـ o في نهاية العدد ، يجب إضافة معلومات إضافية لتحديد فيما إذا كان معنوياً. مثلاً $525.000 يمكن أن يكون دقيقاً (مضبوطاً) أو يمكن أن يكون تعبير مالي (نقدي) لأقرب ألف . إذا كانت الدقة مطلوبة، كل الأعداد تكتب على شكل نقطة عائمة، مثل: 5.25×10^5 أو 5.25000×10^5.

إن العمليات الرياضية تقود الأعداد إلى عدم تحديد ولذلك من الضروري حذف (قطع) هذه الأعداد إلى الشكل المراد ويسمى هذا القطع أو الحذف بالتدوير Rounding off.

وهذا التدوير يخضع للقواعد التالية على الأعداد:

ليكن العدد:

$$X = x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{n+\ell}$$

عندئذ لتدوير هذا العدد إلى عدد معنوي يحتوي على n رقم تحذف ℓ رقم متتالي وفق ما يلي:

1- إذا كان $x_{n+1} > 5$

تحذف بزيادة 1 على x_n فتصبح: $x_n + 1$

مثال (4): 60.73721 يدور إلى عدد يحوي على 4 أرقام معنوية فيصبح بالشكل: 60.74

2-. إذا كان $x_{n+1} < 5$ تحذف دون تغيير x_n.

مثال: 60.7542 يصبح بعد تدويره لأربعة أرقام معنوية بالشكل : 60.75.

3- إذا كان $x_{n+1} = 5$ نميز حالتين:

أ – إذا كانت جميع الأرقام على يمين x_{n+1} معدومة فتتم عملية الحذف بزيـادة 1 إلى x_n وذلك إذا كان: x_n فردي وإلاّ (في حالة x_n زوجي) فيتم الحذف دون تغيير x_n.

ب – إذا وجد رقم على يمين x_{n+1} غير معدوم فيتم الحذف مع إضافة 1 إلى x_n .

مثال: العدد 6.33500 يدور لثلاثة أرقام .

1) العدد : 6.34

مثال (5): العدد 23.4500 يدور لثلاثة أرقام إلى العدد : 23.4 (دون تغيير) .

(1-7) الخطأ النسبي المرتكب في تدوير عدد ما:

يعطى بالقانون:

$$\eta \leq \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1\text{-}12)$$

حيث a هو أول رقم في العدد المقرب من اليسار n عدد الأرقام في العدد المقرب.

مثال (6): ماهو عدد الأرقام التي يجب أن تأخذها عند حساب $\sqrt{18}$ حتى لايتجاوز الخطأ النسبي الأعظمي المقدار 0.003 .

الحل:

لنأخذ a هنا تساوي 4 ، لذلك لدينا:

$$\frac{1}{2\times 4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \leq 0.003.\left(\frac{3}{10^3}\right)$$

ومنه لدينا: $10^{n-1} \geq 41.6666$

وبالتالي: $n \geq 3$

مثال (7): كم هو حد الخطأ النسبي إذا أخذنا بدلاً من π العدد $a = 3.14$.

الحل:

في هذه الحالة لدينا $n = 3$ ، $a = 3$ ومنه:

$$\eta=\frac{1}{2.3}.\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1}=\frac{1}{600}\approx 0.001666$$
$$\leq 0.002$$

مثال (8): كم رقم يجب أخذه في حساب $\sqrt{20}$ حتى لايتجاوز الخطأ النسبي 0.0005.

الحل:

ليكن العدد الأول $a = 4$ ومنه:

$$\frac{1}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \leq 0.0005$$

$$10^{n-1} \geq \frac{1}{0.004}=250$$

$$n \geq 4$$

مثال (9) : إن الأعداد التالية تقرب (تدور) إلى خمسة أرقام معنوية :

31.35764	تدور إلى	31.358
10.19313	تدور إلى	10.193
14.32250	تدور إلى	14.322
14.32150	تدور إلى	14.322

مثال (10): ليكن العدد $x = 5.3251$ ولنفرض أن هذه القيمة قربت إلى القيمة التقريبية $x_1 = 5.3$.

عندئذ يمكن اعتبار الخطأ المرتكب:

$$\alpha_x = x - x_1 = 0.0251$$

أو:

$$\alpha_x = x_1 - x_o = -0.0251$$

وكذلك لدينا الخطأ المطلق:

$$E = |\alpha_x| = 0.0251$$

كما يمكن أن نعتمد القيمة 0.03 كحد أعلى من القيمة E ونرمز له بـ ε_x أي:

$$\varepsilon_x = 0.03$$

(طبعاً يمكن اعتبار أي قيمة أكبر من القيمة السابقة مثل 0.04 و 0.05 فقط كحد أعلى أيضاً لـ E).

ملاحظات:

1- من العلاقة: $E = |x - x_1| \le \varepsilon_x$

حيث ε_x هو الحد الأعلى للخطأ المطلق يمكن كتابة:

$$x_1 - \varepsilon_x \le x \le x_1 + \varepsilon_x$$

وعندما نأخذ ε_x صغيراً $(\varepsilon_x \le x)$ بالنسبة لـ x نكتب:

$$x = x_1 \mp \varepsilon_x$$

وبالتالي بالعودة للمثال السابق يمكن أن نكتب:

$$x = 5.3 \mp 0.03$$

2- يمكن حساب ε_x من القانون:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^n}\right)$$

حيث n عدد الأرقام العشرية في العدد المدور، حسب قواعد التدوير السابقة.

3- بما أن العدد x غير معلوم في الغالب ، فعندما نحسب E_r من العلاقة:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|}$$

فإننا نستبدل هذه العلاقة بالعلاقة التالية:

$$\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x_1 - \varepsilon_x|}$$

حيث x_1 هي القيمة التقريبية للعدد.

والتي تعطينا حداً أعلى للخطأ النسبي وفي حال كون ε_x صغيراً جداً بالنسبة لـ x نستبدل هذه العلاقة.

$$\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x_1|}$$

حيث x_1 هي القيمة التقريبية للعدد.

4- إذا كانت x قريبة من العدد 1 عندئذ يكون لدينا:

$$E_r \approx \delta_x$$

(1-8) تراكم الأخطاء :

كما هو معلوم فإن هذه الأخطاء تتراكم وتزداد عند إجراء العمليات الحسابية على الأعداد التقريبية ويمكن تبيان ذلك من خلال بعض النظريات:

نظرية (1):

الخطأ المطلق المرتكب لمجموع جبري لعدد من الأعداد التقريبية لايتجاوز مجموع الأخطاء المطلقة المرتكبة لهذه الأعداد التقريبية.

أي أنه، إذا كان $x_1, x_2, \dots, x_n$

n عدد مقرب .

وإذا كان $E_{x_1}, E_{x_2}, \dots, E_{x_n}$ على الترتب الأخطاء المطلقة المرتكبة لهذه الأعداد.

وإذا كان $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ فإن:

$$E_x \le E_{x_1} + E_{x_2} + \dots + E_{x_n} \qquad (1\text{-}13)$$

نظرية (1-2):

إذا كان x_2, x_1 عددين مقربين وكان $x = x_1 - x_2$ فإن:

$$E_x \le E_{x_1} + E_{x_2} \tag{1-14}$$

أي أن الخطأ المطلق المرتكب في ناتج طرح عددين تقريبيين لايتجاوز مجموع خطأيهما المطلقين.

نظرية (1-3):

إذا كان y , x عددين مقربين فإن:

$$E_{x.y} \le E_x |y_1| + E_y .|x_1| \tag{1-15}$$

حيث y_1 , x_1 هما العددان التقريبيين:

يمكن تعميم النظرية (3) لأكثر من عددين بالشكل:

$$E_{xyz} \le E_x .|y_1 z_1| + E_y .|x_1 z_1| + E_z .|x_1 y_1|$$

نظرية (1-4):

وكذلك لدينا بالنسبة للقسمة النظرية التالية :

$$E_{x/y} \le \left|\frac{E_x}{y_1}\right| + E_y \left|\frac{x_1}{y_1^2}\right| \tag{1-16}$$

ملاحظة (2):

يمكن تعميم هذه النظريات على الحدود العليا للخطأ المطلق أيضاً.

مثال (11): أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في المجموع:

$$x + y = 12.23 \;\; + \;\; 3.12$$

لدينا هنا حسب القانون:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^n}\right)$$

بالنسبة لـ x لدينا $n = 2$ ومنه:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{1}{10^2} = \frac{1}{200} = 0.005$$

بالنسبة لـ $\varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2}\right) = 0.005$

ومنه فإن الحد الأعلى للخطأ المرتكب في المجموع هو:

$$0.005 + 0.005 = 0.01$$

مثال (12):

أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في حاصل الضرب للعددين:

$$x \,.\, y = (2.23)\,.\,(12.3)$$

تحسب:

$$\varepsilon_x = 0.005 \;,\; \varepsilon_y = 0.05$$

ومنه الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب يكون:

$$\begin{aligned} &0.005\,(12.3) + 0.05\,.\,(2.23) = \\ &= 0.0615 + 0.1115 = \\ &= 0.173 \end{aligned}$$

مثال (13):

أوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب في حاصل قسمة العددين:

الحل:

لدينا:

$$\frac{x}{y} = \frac{13.2}{23.13}$$

لدينا:

$$\varepsilon_x = 0.05$$
$$\varepsilon_y = 0.005$$

ومنه الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب:

$$\begin{aligned} &\frac{0.05}{23.13} + 0.005 . \frac{13.2}{(23.13)^2} = 0.0021616 + 0.0001233 \\ &= 0.0022849 < 0.0023 \end{aligned}$$

نظرية (5-1) : (الخطأ النسبي)

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل الجمع الجبري لعدد من الأعداد التقريبية الموجبة لايتجاوز أكبر حد أعلى للأخطاء النسبية المرتكبة في الأعداد المجموعة، أي إذا كان:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

فإن:

$$\delta_x \le \max\left(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n\right) \tag{1-17}$$

نظرية (6-1):

الخطأ النسبي المرتكب في حاصل طرح عددين تقريبيين x , y هو:

$$\delta_{x-y} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{|x_1 - y_1|} \tag{1-18}$$

كما يلاحظ أنه إذا كانت x_1 قريبة من y_1 فإن هذه العلاقة لا تطبق.

نظرية (7-1):

الخطأ النسبي المرتكب في ناتج قسمة عددين تقريبيين يساوي مجموع الخطأين النسبيين المرتكبين في المقسوم والمقسوم عليه.

مثال (14): احسب الخطأ النسبي الأعظمي المرتكب في حاصل الطرح:

$$x - y = 32.413 - 32.415$$

الحل:

لدينا الحد الأعظمي للخطأ المطلق المرتكب لكل من العددين يساوي: 0.0005 ومنه فإن:

$$\varepsilon_{x-y} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{|x - y|} = \frac{0.0005 + 0.0005}{|32.413 - 32.415|}$$

$$= \frac{0.001}{0.002} \approx 0.5$$

لو حسبنا الخطأ النسبي في كل من العددين التقريبين نجد أن الخطأ النسبي المرتكب في المطروح منه هو:

$$\delta_x = \frac{0.0005}{32.413} \approx 0.00002$$

أما الخطأ النسبي المرتكب في المطروح فهو:

$$\delta_y = \frac{0.0005}{32.415} \approx 0.00002$$

إذن الخطأ المرتكب في حاصل الطرح أكبر بكثير من الخطأ النسبي الأعظمي لكل من العددين x , y ويساوي تقريباً: 25000 مرة. وهذا يبين أنه لايمكن تطبيق الدستور السابق عندما يكون كلا العددين متقاربين من بعضهما البعض.

تمارين

1- دور الأعداد التالية إلى خمسة أرقام معنوية:

$$38.46235\ ,\ 2.37425$$
$$0.00237135\ ,\ 0.700029$$

2- احسب مجموع الأعداد التالية:

$$12.3172\ ,\ 11.283\ ,\ 4.3496\ ,\ 2.4875$$

واحسب الخطأ النسبي المرتكب.

3- قدر العلاقة:

$$\vartheta = \left(\frac{2g\ \ hd}{fx}\right)^{1/2}$$

إذا كان: $d=\frac{3}{8}\quad ,\quad h=92\quad ,\quad g=32.2$

$x=1250$ و $f=0.025$ و

أ – عندما تكون القيم المعطة معتبرة دقيقة (مضبوطة).

ب – عندما تكون القيم المعطة تقريبية.

4- أوجد قيم $f(x)$:

$$f(x)=7x^4-5x^3+x^2-8x+2$$

من أجل:

$$x=2,3,2\frac{1}{2}\ ,\ 1.3298$$

5- قدر قيمة المحددات:

$$\begin{vmatrix} -75 & 76 & 20 \\ 94 & 72 & 21 \\ -414 & 55 & 10 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -75 & 86 & 20 \\ 94 & 72 & 21 \\ -414 & 55 & 10.01 \end{vmatrix}$$

6- إن الحل لجريان التيار في دارة إلكترونية يحسب من المعادلة التفاضلية المحققة لـ:

$$i = 4.3\cos 120\pi t + 7.5\sin 120\pi t$$
$$- e^{-600t}(4.3\cos 200t + 27.1\sin 200t)$$

أوجد قيمة التيار عندما $t = 0.01$ و $t = 5$.

7- أوجد الخطأ النسبي المرتكب في كل مما يلي:

a) $8.12 + 6.7$
b) $8.12 - 4.2$
c) $(8.12)(6.7)$
d) $8.124/3.1$

8- احسب الحد الأعلى للخطأ المطلق المرتكب في حساب المقدار:

$$A = \frac{312.7-(4.3)(2.61)}{(2.1).(13.41)}$$

9- أوجد كثير حدود تايلور الرابع للتابع f حول النقطة $x_o = o$ حيث $f(x) = e^x.\cos x$ واستخدم كثير الحدود هذا لتقريب $f(\pi/16)$ وأوجد حد الخطأ لهذا التقريب.

10- أوجد كثير حدود تايلور الرابع للتابع f حول النقطة $x_o = 1$ حيث $f(x) = e^{x^2}$ واستخدم كثير الحدود هذا لتقريب f(1,1) وأوجد حد الخطأ لهذا التقريب.

11- ليكن $f(x) = e^{-x}$، أوجد كثير حدود تايلور الثالث لـ f حول النقطة $x_o = 1$ وقرب $e^{-0.99}$ باستخدام كثير الحدود المذكور.

12- أوجد الحد الأعلى للخطأ المرتكب في ناتج العمليات التالية:

$$\frac{13.23+24.2-2.321}{(3.14).(1.324)}$$

للحل: احسب الخطأ الأعظمي المرتكب في البسط وكذلك الخطأ الأعظمي المرتكب في المقام. ثم احسب أخيراً الخطأ المرتكب في ناتج القسمة حسب قانون الخطأ في القسمة.

مطلوب كل الفصل ما عدا
الفقرات المحذوفة

محددة

الفصل الثاني
حل المعادلات الجبرية غير الخطية

مقدمة:

نبحث عن حل للمعادلة:

$$f(x) = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

مثلاً المعادلة:

$$e^{-x} - x = 0$$

نبحث عن حلول حقيقية للمعادلة (2-1) نعلم أن بعض المعادلات لها حلول مركبة (عقدية) مثل المعادلة:

$$x^2 + 1 = 0$$

وهذا ليس مجال بحثنا في الساحة الحقيقية.

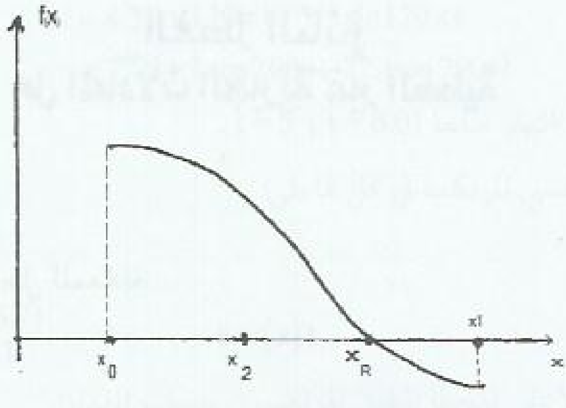
إن الخطوة الأولى لحل هذا النوع من المعادلات تكمن في عزل الجذر ضمن مجال ضيق وذلك كي نضمن عدم وجود أكثر من جذر ضمن هذا المجال. وهذا يتم بدراسة مختصرة بسيطة إما بالطريقة البيانية ، أو بطريقة حسابية يدوية أو بالحاسب باستخدام خطوة صغيرة بشكل كاف.

(2-1) طريقة التنصيف Bisection

هذه الطريقة تكون مفيدة من أجل الحسابات اليدوية وتتناسب أيضاً جيداً مع الحسابات على الحاسب. وتتلخص في عزل الجذر المطلوب X_R ضمن مجال $[x_0 , x_1]$ حيث X_R جذر بسيط كما في الشكل (2-1) .

نتحقق أولاً من الشرط:

$$f(x_0).f(x_1) < 0$$



الشكل (2-1)

ثم نأخذ بعد ذلك:

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_o + x_1)$$

ونشكل الجداء:

$$f(x_2).f(x_1)$$

إذا كان $f(x_2).f(x_1) > o$ فإن X_R ضمن x_2, x_o . نضع x_2 بدل x_1 ثم نعيد الكرة . وإذا كان $f(x_2).f(x_1) < o$ فإن الجذر X_R ضمن x_1, x_2 ونضع x_2 بدل x_o ثم نعيد العمل بنفس الطريقة. نستمر إذن بنفس الشكل حتى يكون $x_1 - x_o < 2\varepsilon$ هو الدقة التي نرغب بها للحصول على x_R . لنأخذ قيمة x_R القيمة $\frac{1}{2}(x_1 + x_o)$. نحن متأكدون من أن $\frac{1}{2}(x_1 + x_o)$ بعيداً عن x_R بمقدار أقل من ε.

إذا كان هناك عدد من الجذور ضمن المجال $[x_o, x_1]$ فإن المسألة تكون أكثر تعقيداً ويجب تصغير هذا المجال وعزل الجذور.

كما يمكن إعطاء خوارزمية هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- نوجد إشارة $f(x_n)$ و $f(x_{n+1})$ حيث x_{n+1}, x_n طرفي المجال المحتوي على X_R .

فإن كانتا من إشارتين مختلفتين أي:

$$f(x_n).f(x_{n+1}) < o$$

2- نحسب $\tilde{X}$ و $f(\tilde{X})$ من الدستور:

$$\tilde{X} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

3- إذا كان لـ $f(\tilde{X})$ و $f(x_n)$ نفس الإشارة

نأخذ:

$$x_n = \tilde{x}$$
$$f(x_n) = f(\tilde{x})$$

وإلاّ إذا اختلفت الإشارتان فنأخذ:

$$x_{n+1} = \tilde{x}$$
$$f(x_{n+1}) = f(\tilde{x})$$

4- إذا كان $f(\tilde{x})$ صغيراً بقدر كاف (حسب الرغبة لمقدار الخطأ ε) فإننا نتوقف عن العمل وإلاّ نعد إلى الخطوة (2) ثانية.

مثال (1): أوجد الجذر التقريبي للمعادلة:

$$f(x) = \ln x - x + 1.901387711 = o$$

ضمن المجال [2.8 , 3.1] .

الحل:

يفضل ترتيب خطوات الحل ضمن الجدول التالي، وذلك بعد تطبيق النظري السابق:

i	x_i	$f(x_i)$	المجال المحتوي على الحل
0	2.8	0.131	لايوجد
1	3.1	- 0.07	$[x_0,x_1]$
2	2.95	0.03	$[x_2,x_1]$
3	3.025	- 0.02	$[x_2,x_3]$
4	2.987	0.01	$[x_4,x_3]$

ويلاحظ أنه من أجل القيمتين $f(x_3)$ و $f(x_4)$ يمكن اعتبار القيمة:

$$x_R = \frac{x_3 + x_4}{2}$$

$$= \frac{3.025 + 2.987}{2} = 3.006$$

مثال (2)

حسن جذر المعادلة التالية، بطريقة التنصيف ، والواقع في المجال [o,1]:

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = o$$

الحل: لدينا:

$$f(o) = -1 \quad ; \quad f(1) = 1$$
$$f(0.5) = 0.06 + 0.25 - 0.5 - 1 = -1.19$$
$$f(0.75) = 0.32 + 0.84 - 0.75 - 1 = -0.59$$
$$f(0.875) = 0.59 + 1.34 - 0.88 - 1 = +0.05$$
$$f(0.8125) = 0.436 + 1.072 - 0.1812 - 1 = -0.304$$
$$f(0.8438) = 0.507 + 1.202 - 0.844 - 1 = -0.135$$
$$f(0.8594) = 0.546 + 1.270 - 0.859 - 1 = -0.043$$

وهكذا ...

ويمكن وضع:

$$x_o = \frac{1}{2}(0.859 + 0.875) = 0.867$$

(2-2) طريقة التقريبات المتتالية: دوري

لتكن المعادلة:

$$f(x) = o \qquad (2\text{-}2)$$

f(x) تابع مستمر. المسألة تعتمد على إيجاد حل حقيقي. وذلك بعد كتابة المعادلة (2-2) بالشكل:

$$x = \varphi(x) \qquad (2\text{-}3)$$

وذلك باختيار حل x_o ابتدائي نعوضه في الطرف الأيمن ونحصل منه على الحل التقريبي الأول x_1 بالشكل:

$$x_1 = \varphi(x_o) \qquad (2\text{-}4)$$

وهكذا نحصل من x_1 على التقريب الثاني x_2 وبمتابعة هذا العمل نحصل

على متتالية القيم:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1,2,...) \qquad (2\text{-}5)$$

إذا كانت هذه المتتالية متقاربة، أي إذا وجدت النهاية:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

وباعتبار $\varphi(x)$ تابع مستمر، نجد أن:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

حيث:

$$x = \varphi(x) \qquad (2\text{-}6)$$

وهكذا فإن النهاية x هي الجذر للمعادلة (2-3) . وتحسب بالعلاقة (2-5)

حسب الدقة المطلوبة.

نظرية (2-1):

ليكن التابع $\varphi(x)$ معرف وقابل للاشتقاق على المجال [a,b] من أجل كل

قيمة $\varphi(x) \ni [a,b]$ وإذا وجد عدد q بحيث:

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \qquad (2\text{-}7)$$

من أجل $a < x < b$ عندئذ:

1- التكرار المتتالي:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \;;\; n = 1,2,...$$

يتقارب بشكل مستقل عن القيمة الابتدائية $x_0 \ni [a,b]$.

2- النهاية $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

هي الجذر الوحيد للمعادلة: $x = \varphi(x)$ في المجال [a,b]

مثال (3): أوجد الجذر الأكبر الموجب x للمعادلة:

$$x^3 + x = 1000 \qquad \text{بدقة } 10^{-4} \cong \varepsilon$$

الحل:

لنأخذ الجذر التقريبي الابتدائي $x_0 = 10$

من الواضح أن $x < 10$.

إن المعادلة السابقة يمكن أن تكتب بالشكل:

الشكل مرفوض لأنه عند تعويض أي عدد من المجال [9,10] في مشتق φ(x) يتجاوز الواحد في القيمة المطلقة

$$x = 1000 - x^3$$

أو بالشكل:

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

أو بالشكل:

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

إن الشكل الأخير أخذه أفضل أخذه في هذه الطريقة، لأنه يأخذ المجال (9,10)

ووضع:

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$$

نجد أن:

من التعويض

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3.\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

يجب أن يكون أكبرها (9,10) أصغر من 1

وأيضاً لأنه مبرهنة 5

ومنه:

$$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{3.\sqrt[3]{(990)^2}} \approx \frac{1}{300} = q$$

وهي أصغر من قيمة $|\varphi'(x)|$ في نفس النقطة التي أخذناها (10) للشكلين الأول والثاني السابقين.

نحسب الجذور التقريبية المتتالية x_n فنضع:

$$y_n = 1000 - x_n$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{y_n} \quad (n = 0,1,2,...)$$

الجدول التالي يبين القيم التالي نحصل عليها للتقريبات المتتالية:

N	x_n	y_n
0	10	990
1	9.96655	990.03345
2	9.96666	990.03334
3	9.96667	

مثال (4)

أوجد الجذر الحقيقي للمعادلة:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}-\frac{x^{11}}{1320}+\dots$$
$$+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(n-1)!\,(2n-1)}+\dots=0.4431135$$

الحل:

لدينا $x=\varphi(x)$

حيث:

$$\varphi(x)=0.4431135+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10}+\frac{x^7}{42}-\frac{x^9}{216}+\frac{x^{11}}{1320}-\dots$$

لنأخذ $x_o=0.44$ وبأخذ الحدين الأول والثاني في عبارة $\varphi(x)$ بعين الاعتبار

فقط نجد أن:

$$\begin{aligned}
x_1&=\varphi(0.44)\approx 0.47\\
x_2&=\varphi(0.47)\approx 0.478\\
x_3&=\varphi(0.476)\approx 0.4795\\
x_4&=\varphi(0.4767)\approx 0.4799\\
x_5&=\varphi(0.47689)\approx 0.47995\\
x_6&=\varphi(0.476927)\approx 0.47997\\
x_7&=\varphi(0.476934)\approx 0.47997
\end{aligned}$$

وبالنتيجة فإن $x=0.47997$.

(2-3) طريقة نيوتن (المماسات) Newton method

هذه الطريقة تستخدم عندما يكون بالإمكان حساب مشتق التابع $f(x)$ أي حساب $f'(x)$.

مبدأ الطريقة:

نوضح هذه الطريقة بالشكل (2-2) لتكن x_o نقطة معطاة .

عندئذ لدينا $f(x_o)$ ومنها نجد x_1 ثم نجد $f(x_1)$ ومنه نحصل على x_2 وهكذا...

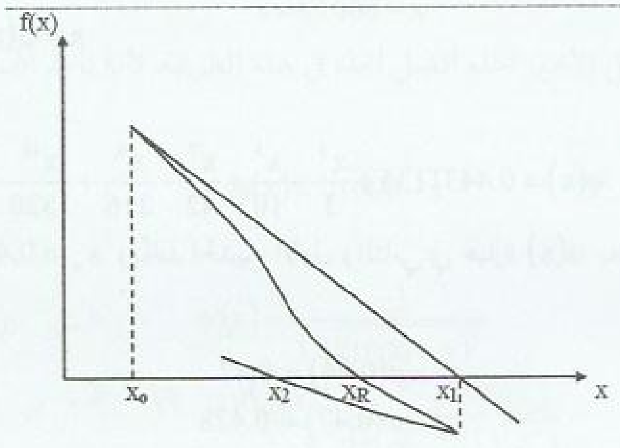
للحصول على x_1 ، نكتب:

$$y = f(x_o) + (x - x_o)\, f'(x_o) \qquad (2\text{-}8)$$

x_1 تكون بحيث إن $y = o$ وهذا يؤدي إلى:

$$o = f(x_o) + (x_1 - x_o) f'(x_o) \qquad (2\text{-}8')$$

ومنه:



الشكل (2-2)

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \qquad (2\text{-}9)$$

وبنفس الطريقة نحصل على x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهكذا نتابع فنجد العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2\text{-}10)$$

تنته هذه الخوارزمية عندما يكون $x_{n+1} - x_n \le \varepsilon$.

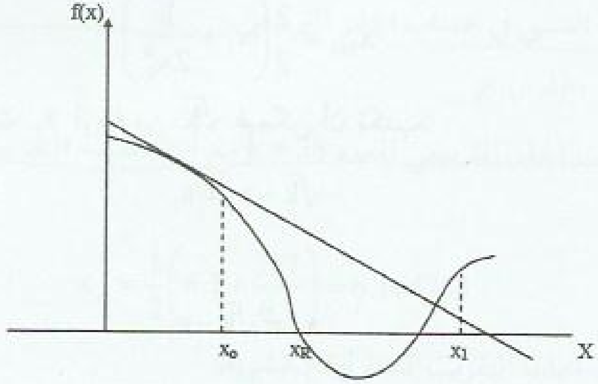
وهذا لا يضمن أن الدقة لـ x_R هي ε.

بشكل عام، حتى تكون الدقة لـ x_R مساوية ε، نختار توقف الخوارزمية عندما:

$$x_{n+1} - x_n \le \varepsilon$$

ولضمان التقارب، يجب أن تكون x_o قريبة إلى حد كاف من x_R وإلاّ نخاطر بقذف x_1 بعيداً جداً ونحصل على جذر غير الجذر الذي نبحث عنه كما يبين الشكل (3-2).

ملاحظة: تسمى هذه الطريقة أحياناً بطريقة المماسات لنيوتن لأن المعادلة (2-9) ما هي إلاّ معادلة المماس عند النقطة x_o.



الشكل (3-2)

مثال (5): نظري و هام جداً

احسب جذور عدد ما من مرتبة n مستخدماً طريقة نيوتن.

الحل: نكتب:

$$f(x) = x^n - k = o$$

حيث يكون عندئذ x هو الجذر من المرتبة n للعدد k.

وبتطبيق طريقة نيوتن نجد أن:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^n - k}{n.x_i^{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{n}\left[x_i + \frac{k}{(n-1)x_i^{n-1}}\right]$$

وهو الدستور الذي يعطي الجذر النوني لعدد ما k .

حالة خاصة : من أجل $n = 2$ نحصل مع الدستور التالي الذي يعطي الجذر التربيعي للعدد k:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{k}{x_i}\right)$$

وكذلك من أجل $n = 3$ نحصل على دستور الجذر التكعيبي لعدد k:

$$x_{i+1} = \frac{2}{3}\left(x_i + \frac{k}{2x_i^2}\right)$$

الآن إذا كانت x_i قريبة من $\sqrt{k}$ فيمكن أن نكتب:

$$\sqrt{k} - x_i = \varepsilon_i$$

أي أن:

$$x_i = \sqrt{k} - \varepsilon_i$$

ومنه:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k} - \varepsilon_i + \frac{k}{\sqrt{k} - \varepsilon_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{k} - \varepsilon_i + \frac{k}{\sqrt{k}\left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{k}}\right)}\right]$$

ولكن بما أن: $\left|\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{k}}\right| < 1$

فإن:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{k} - \varepsilon_i + \sqrt{k}\left(1 + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{k}} + \frac{\varepsilon_i^2}{k} + \ldots\right)\right]$$

$$= \sqrt{k} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_i^2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_i^3}{k} + \ldots$$

وبالتالي نجد أن:

$$\varepsilon_{i+1} = x_{i+1} - \sqrt{k} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}.\frac{\varepsilon_i^2}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}\ \frac{\delta^2}{2}$$

وهذا يدل على أنه إذا كان الخطأ المرتكب في x_i يساوي ε_i فإن الخطأ المرتكب في x_{i+1} حسب ما سبق أصغر من ε_i إذا كان: $\left|\frac{\varepsilon_i}{2\sqrt{k}}\right| < 1$ مع اعتبار أن δ هو الخطأ النسبي في حساب الجذر التربيعي.

غير مطلوب

مثال (6) : مطلوب

احسب الجذر التربيعي للعدد $k = 38$ مع أخذ القيمة التقريبية $x_1 = 6.1$.

الحل:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(6.1 + \frac{387}{6.1}\right) = 6.164754$$

حيث أخذنا التقريب لستة أرقام عشرية.

وبحساب الخطأ المرتكب في x_1 نجد أنه أصغر من 0.0644141 ونجد أن الخطأ في x_2 يعطى بـ:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1^2\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{0.0020746}{\sqrt{k}} < 0.0003401$$

حيث أخذنا $\sqrt{k}$ بحده الأدنى. وبالتالي تكون حدود الجذر هي:

$$6.1644139 < \sqrt{38} < 6.1650941$$

علما بأن $\sqrt{38} = 6.164414003$ وهو ضمن الحدود السابقة للجذر، يمكن متابعة التكرارات والحصول على $x_3, x_4, \ldots$.

مثال (7) : احسب: $\sqrt{N}$, $N > 0$

وذلك بتقريبات متتالية ، مع فرض أن $x_0 = N$

الحل :

هذه المسألة تحل بفرض أن لدينا المعادلة :

$$f(x) = x^2 - N = 0$$

والمطلوب إيجاد جذر هذه المعادلة باستخدام طريقة نيوتن.

لدينا إذن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

من أجل المعادلة السابقة، تأخذ المعادلة التكرارية لنيوتن الشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{x_n^2 - N}{2x_n}\right]$$

وتابع التكرار يكون إذن:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

حيث إن المشتق أيضاً يكون:

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{x^2}\right)$$

من الواضح أن $\alpha = \sqrt{N}$ هو جذر للمعادلة $x^2 - N = 0$

وبالتالي:

$$F\left(\sqrt{N}\right) = \sqrt{N}$$
$$F'\left(\sqrt{N}\right) = 0$$

(وهذه هي نفس الحالة الخاصة في المثال 5).

مثال (8):

استخدم طريقة نيوتن (المماسات) لحل المعادلة:

$$f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$$

بدقة 0.001 مع أخذ التقريب الأول $x_1 = 3$.

الحل:

لدينا:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

وبالتالي العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

تأخذ الشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}$$

ومنه نجد:

$$x_2 = 3 - \frac{27 - 9 - 5}{27 - 3} = 3 - \frac{13}{24} = 2.46$$

$$x_3 = 2.46 - \frac{14.89 - 7.38 - 5}{18.16 -} = 2.46 - 0.165 = 2.295$$

$$x_4 = 2.95 - \frac{12.088 - 6.885^{-5}}{15.801 - 3} = 2.295 - 0.016 = 2.279$$

$$x_5 = 2.279 - \frac{11.837 - 6.807 - 5}{15.582 - 3} = 2.279$$

وبالتالي نجد أنه بدقة 0.001 فإن $x_4 = x_5$.

إذن جذر هذه المعادلة هو 2.279 بدقة 0.001 .

(2-3-1) برهان تقارب طريقة نيوتن:

مطلوب + نظري نظري

لبرهان تقارب علاقة نيوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2\text{-}11)$$

(حيث التقريب الابتدائي x_o) لنأخذ متتالية التقريبات المتتاليـة $x_1, x_2, ...$ (المتقاربة) .

للجذر α للمعادلة $f(x) = o$ ونختبر تابع التكرار:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2\text{-}12)$$

ومشتقه:

$$F'(x) = \frac{f(x) \, . \, f''(x)}{[f'(x)]^2} \qquad (2\text{-}13)$$

بحيث إن $F(x_n) = x_{n+1}$ و $F(\alpha) = \alpha$ و $F'(\alpha) = o$.

إن استخدام التـابع المساعد $F(x)$ (التكـراري) موضـح في برهـان النظريـة التالية:

نظرية (2-1) :

ليكن K أكبر قيمة لـ $F'(x)$ في المجـال الحـاوي علـى $x_o, x_1, x_2, ..., \alpha$. إذا كان $K < 1$ عندئذ المتتالية: $\{x_{i+1} = F(x_i)\}$ تتقارب من α ، حيث α جذر المعادلة:

$$f(x) = o \quad \text{و} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \, .$$

البرهان:

لنستخدم علاقة نيوتن التكرارية:

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

ونحسب:

-1 $x_1 = F(x_o)$ عندئذ:

-2 $x_1 - \alpha = F(x_o) - F(\alpha)$ لأن $F(\alpha) = \alpha$ و

-3 $F(x_o) - F(\alpha) = (x_o - \alpha) \; F'(\overline{x}_o)$

باستخدام نظرية القيمة الوسطى حيث $\overline{x}_o \in (x_o, \alpha)$ وبالتالي :

مالوزمة -4 $x_1 - \alpha = (x_o - x) F'(\overline{x}_o)$

وباستخدام خواص القيمة المطلقة نجد أن:

5- $|x_1-\alpha|=|x_o-\alpha||F'(\overline{x}_o)|\le|x_o-\alpha|K$ (من الفرض) .

وبنفس الطريقة ، نجد أن:

6- $|x_2-\alpha|=|x_1-\alpha||F'(\overline{x}_1)|\le|x_1-\alpha|K\le|x_o-\alpha|K^2$ (من 5) .

وبالمتابعة نجد أن:

7- $|x_{i+1}-\alpha|=|x_1-\alpha||F'(\overline{x}_i)|\le|x_i-\alpha|K\le|x_o-\alpha|K^{i+1}$

من العلاقة:

$$|x_{i+1}-\alpha|\le|x_o-\alpha|K^{i+1}$$

حيث $K<1$

نجد أن: $\lim\limits_{i\to\infty}|x_{i+1}-\alpha|=o$

أي أن: $\lim\limits_{i\to\infty}x_{i+1}=\alpha$

وبالتالي مما سبق يتبين أن المتتالية $\{x_{i+1}\}$ تتقارب من الجذر α لـ $f(x)=o$

وبالتالي فإن الخوارزمية المعرفة بـ $x_{i+1}=F(x_i)$ تولد تقارب المتتالية $\{x_{i+1}\}$ على شكل تقريب متتالي يتقارب من α ، مهما كانت قيمة الجذر التقريبي الأول.

(2-3-2) معدل تقارب طريقة نيوتن: لهام

إن معدل تقارب أي طريقة تقاربية يحسب بمقارنة القيم المتتالية لحد الخطأ:

$$\delta_i=x_i-\alpha \qquad (2\text{-}14)$$

إذا وجدنا علاقة بين δ_{i+1} و δ_i ، فإنه يمكن تقدير تسارع (أو تباطؤ) خوارزمية التقارب نحو الجذر α للمعادلة $f(x)=o$.

إن منشور تايلور للتابع $F(x)$ على شكل سلسلة حول النقطة $x=\alpha$ يعطى بـ:

$$F(x)=F(\alpha)+F'(\alpha).(x-\alpha)+\frac{F''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2+\dots \qquad (2\text{-}15)$$

ومن أجل خوارزمية نيوتن، إن تابع التكرار $F(x)$ ومشتقاته $F'(x)$ و $F''(x)$ هي:

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2-16}$$

$$F'(x)=\frac{f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2} \tag{2-17}$$

$$F''(x)=\frac{(f')^2(f f''{'}+f'f'')-(f f'')2f'f''}{(f')^4} \tag{2-18}$$

و $F(\alpha)=\alpha$ و $F'(\alpha)=o$ و:

$$F''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{2-19}$$

بتعويض هذه القيم الأخيرة في المنشور السابق لـ $F(x)$ وتعويض $x=x_i$ نجد أن:

$$F(x_i)=\alpha+\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_i-\alpha)^2 \tag{2-20}$$

وباستخدام العلاقة: $x_{i+1}=F(x_i)$

ومن العلاقة (2-14) نجد أن:

$$\delta_{i+1}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\delta_i^2 \tag{2-21}$$

هذه العلاقة تبين أن معدل التقارب يكون تربيعياً أي من مرتبة مربعة.

مثال (9) : احسب $\sqrt[3]{5}$ وذلك بحل المعادلة: $f(x)=x^3-5=o$

بطريقة نيوتن مستخدماً $x_o=5$ كتقريب أولي للجذر.

الحل:

$$f(x)=x^3-5$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$=x_i-\frac{x_i^3-5}{3x_i^2}=\frac{3x_i^2+5}{3x_i^2}$$

الجدول التالي يبين خطوات الحل – التقريبات المتتالية للحل:

x_i	$f(x_i)$
5.0	120.0
3.400	34.304
2.4108	9.011466
1.89365	1.793848
1.727271	0.153253
1.710149	0.001519
1.7099759	- 0.00000041
1.7099759	- 0.00000041

إن التقريبين الأخيرين يختلفان بأقل من 10^{-7} ، وهكذا تعتبر القيمة 1.7099459 تقريب ممتاز لـ $\sqrt[3]{5}$.

مثال (10):

حل معادلة كيبلر: $M = E - e \sin E$

بطريقة نيوتن حيث: $M = 0.8$ و $e = 0.2$ واستخدم $E_1 = M$ كتقريب أولي (ابتدائي)

الحل:

لنعرف: $f(E) = E - e \sin E - M$

عندئذ: $f'(E) = 1 - e \cos E$

وتأخذ علاقة نيوتن الشكل:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} = E_i - \frac{E_i - e\sin E_i - M}{1 - e\cos E_i}$$

$$= \frac{M - E_i e\cos E_i + e\sin E_i}{1 - e\cos E_i} = F(E_i)$$

وباستخدام هذه العلاقة التكرارية نجد التقريبات المتتالية للحل E التالية:

$$0.8\,,\ 0.976\,,\ 0.96434,\ldots$$

ملاحظة:

إذا لم نكن نعلم أن x_R جذر بسيط أو مضاعف لـ $f(x)$ ، فإنه يمكننا تطبيق هذه العلاقة آلياً وهي صالحة للجذور المضاعفة والبسيطة.

نظري

(2-4) الاستيفاء بطريقة (القاطع) للاغرانج:

ليكن x_2, x_1 قيمتين لـ x بحيث إن $f(x_1)f(x_2) < o$ ، حيث f(x) تابع حقيقي مستمر على المجال (x_1, x_2). إن طريقة الاستيفاء للاغرانج هي طريقة بسيطة لحساب الجذر الحقيقي α للمعادلة $f(x) = o$ في المجال (x_1, x_2). هذه الطريقة تشتق من رسم التابع f(x) في المجال (x_1, x_i)،$(i = 2,3,4,...)$، ونرسم الخطوط المستقيمة (القواطع) بين النقاط : $(x_1, f(x_1))$ و $(x_i, f(x_i))$ ثم نحدد القيم x_{i+1} الموافقة لـ $y = o$ على الخط . إذن قيمة x ثم استيفاؤها بحدود تابعة لـ y ، هذه الطريقة تسمى طريقة الاستيفاء العكسي الخطي، مع ملاحظة أن شروط " فورييه " التالية:

$$f(x_1)f(x_2)<o$$
$$f(x_1)f''(x_1) > o$$
$$f''(x)\neq o \quad x_1 < x < x_2$$

كافية لضمان التقارب بهذه الطريقة وبالتالي وجود جذر وحيد α لـ $f(x)=o$ في المجال (x_1, x_2).

باستخدام علاقة نقطتين للخط المستقيم ، يمكن كتابة معادلة الوتر المار من النقطتين $(x_1, f(x_1)), (x_i, f(x_i))$ بالشكل:

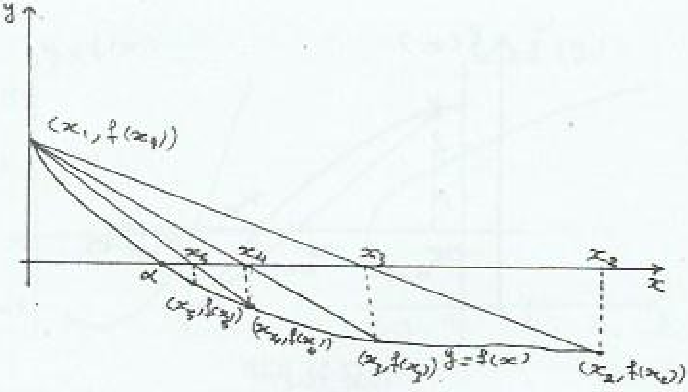
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_1)f(x_i)}{f(x_i) - f(x_1)} \qquad (2\text{-}26)$$

هذا الوتر يقطع المحور x في نقطة فاصلتها x_{i+1} داخل المجار (x_1, x_i) وهكذا:

$$x_1 < x_3 < x_2 \;,\; x_1 < x_4 < x_3 ,...,$$
$$x_1 < x_{i+1} < x_i \;,...$$

هذا يعني أن القيم $x_2, x_3, ..., x_i, x_{i+1}, ...$ تشكل مرتبة متناقصة محدودة من الأسفل بـ α كما في الشكل (4-2).

إن متتالية التقريبات المتتالية $x_2, x_3, ...$ تتقارب إلى قيمة (نهاية) ما α_o حيث $\alpha_o \geq \alpha$.



الشكل (2-4)

وبما أن هذه المتتالية متناقصة ومحدودة بـ α (وبأخذ نهاية العلاقة الأخيرة) نجد أن:

$$\alpha_o = \alpha_o - \frac{(\alpha_o - x_1)f(\alpha_o)}{f(\alpha_o) - f(x_1)} \tag{2-27}$$

وبما أن $\alpha_o \neq x_1$ ، ينتج أن $f(\alpha_o) = o$ ، وبالتالي $\alpha = \alpha_o$ وبالتالي α هو الجذر الوحيد لـ $f(x) = o$ وهذا يعني أن متتالية التقريبات التكرارية السابقة:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_1)f(x_i)}{f(x_i) - f(x_1)} \tag{2-28}$$

تتقارب من الجذر α.

كما يمكن استنتاج هذه العلاقة التكرارية بشكل آخر:

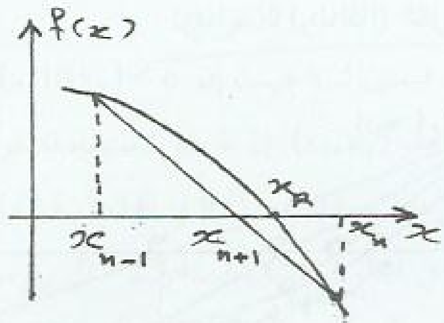
من الشكل (2-5) نستنتج x_{n+1} من x_n, x_{n-1} حيث إنه من نظرية تالس:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{o - f(x_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{2-29}$$

ومنه نجد أن:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (x_n - x_{n-1})\frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned} \tag{2-30}$$

وهي نفس علاقة التقريب التكرارية السابقة.



الشكل (2-5)

بشكل عام هذه الطريقة تتسارع بشكل أقل من طريقة نيوتن.

(2-5) استخدام الاستيفاء العكسي: محذوف

إن الاستيفاء يعني (سيدرس الاستيفاء بالتفصيل فيما بعد) إيجاد تابع f من أجل قيمة معطاة لـ x . أما البحث عن الجذور يعني إيجاد x من أجل قيمة محددة لـ f. (هنا $f(x) = o$).

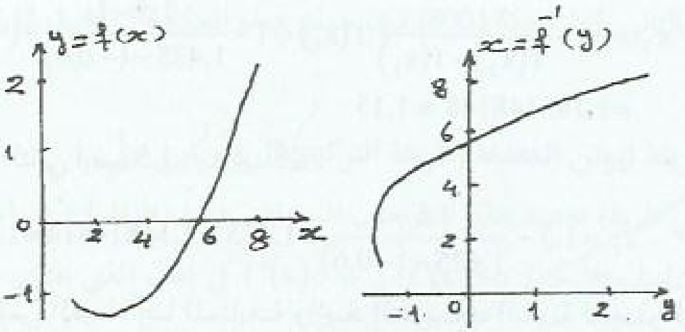
هذه إذن هي العملية المعاكسة للاستيفاء . نأخذ إذن $y = f(x)$ كمتحول ونعتبر x كتابع لـ y.

وهكذا بالنسبة للتابع $y = f(x)$ أعلاه، نعتبر $x = x(y)$ المعطى بالجدول التالي:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y=f(x)	-1.188	-1.358	-1.309	-1.107	-0.546	0.164	1.092	2.24

y	-1.188	-1.358	-1.309	-1.107	-0.546	0.164	1.092	2.24
x(y)	1	2	3	4	5	6	7	8

إن البحث عن الجذر x_R حيث $y = o$ يعني البحث عن $x\ (y = o)$ والذي يمكن الحصول عليه بالاستيفاء للاغرانج. (استيفاء لاغرانج سيدرس مستقبلاً بالتفصيل)، لأن المتحولات y_i بشكل عام غير منتظمة المسافة ولذلك أخذ استيفاء لاغرانج، ونوضح ذلك بالشكل (2-6).



الشكل (2-6)

هذه الطريقة تتوافق مع حالة f(x) أعطي بجدول بدلاً من إعطائه على شكل تعبير جبري.

مثال (11):

حسّن جذر المعادلة التالية: $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$ الواقع في المجال (1,1.5).

الحل: لدينا:

$$f(1) = -0.6 < 0$$
$$f(1.5) = 1.425 > 0$$

إذن يوجد جذر بين هاتين النقطتين.

لدينا:

$$f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2$$
$$f''(x) = 6x - 0.4$$

ومنه:

$$f''(1) = 6 - 0.4 = 5.6 > 0$$
$$f''(1.5) = 8.6 > 0$$

إذن المشتق الثاني دوماً موجب ولذلك إذا طبقنا الآن علاقة لاغرانج عند طرفي المجال فنجد:

في الطرف الأول $x = 1$:

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.f(x_1) = 1 - \frac{1.5-1}{1.425-(-0.6)} \times (-0.6)$$
$$=1.148148148 \approx 1.15$$

وعند الطرف الثاني أيضاً $x = 1.5$ نجد أن:

$$x_3 = 1.5 - \frac{1.5-1}{1.425-(-0.6)} \times 1.425 = 1.14814814 \approx 1.15$$

وهي نفس القيمة. أما للمتابعة وإيجاد التقريبات التالية للجذر فيجب التحقق من شروط "فورييه" السابقة لمعرفة الرأس الذي يجب تطبيق علاقة لاغرانج عنده.

مثال (12): مطلوب

1- استخدم طريقة القواطع للاغرانج لحل المعادلة:

$$f(x) = x^3 + 3x - 1 = o$$

الحل:

لدينا $f(o) = -1 < o$, $f(1) = 3 > o$ وبالتالي فإن لهذه المعادلة على الأقل جذر واحد في المجال $[0,1]$.

وبالتالي بتطبيق قانون القواطع على طرفي المجال السابق نجد أن:

$$x_1 = 1 - \frac{1-0}{3-(-1)} \times 3 = 0.25$$

يمكن التأكد من أن الجذر موجود في المجال $[0.25,1]$.

ومنه: $$x_2 = 1 - \frac{1-0.25}{3+0.23} \times 3 = 0.31 > o$$

وهكذا نجد أيضاً أن:

$$x_3 = 1 - \frac{1-0.31}{3+0.040} \times 3 = 0.319$$
$$x_4 = 1 - \frac{1-0.319}{3+0.010} \times 3 = 0.322$$
$$x_5 = 1 - \frac{1-0.322}{3+0.0006} \times 3 = 0.322$$

وبالتالي يأخذ الدقة 0.001 فإن جذر هذه المعادلة في المجال $[0,1]$ يكون 0.322 .

(2-6) طريقة نيوتن المعدلة (طريقة التركيب): حذفت جزؤ

هي طريقة تعتمد على الطريقتين السابقتين معاً، طريقة لاغرانج وطريقة نيوتن، لنأخذ مثلاً حالة $f'(x)>o$, $f''(x)>o$ في المجال الذي يحتوي على الجذر التقريبي، فيتم تطبيق طريقة لاغرانج ثم طريقة نيوتن بالتالي وبحيث نطبق طريقة لاغرانج في كل مرة على مجال جديد $[x_n,\overline{x}_n]$ وهذا يعني:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(\overline{x}_n-x)f(x_n)}{f(\overline{x}_n)-f(x_n)} \qquad (2\text{-}31)$$

$$\overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)} \qquad (2\text{-}32)$$

كما يفضل أخذ الجذر التقريبي x_o كوسط حسابي لآخر قيمتين محسوبتين، أي:

$$x_o=\frac{1}{2}(x_n+\overline{x}_n) \qquad (2\text{-}33)$$

مثال (13): احسب بدقة 0.0005 الجذر الموجب للمعادلة:

$$f(x)=x^5-x-0.2=o$$

الحل:

بما أن $f(1)<o$, $f(1,1)>o$ فإن الجذر ينتمي للمجال $(1\ ,1.1)$ ولدينا:

$$f'(x)=5x^4-1 \quad ; \quad f''(x)=20x^3$$

في المجال المختار $f'(x)>o$, $f''(x)>o$ وبالتالي نطبق طريقة نيوتن عند الطرف $x=1.1$ أولاً وطريقة لاغرانج (القواطع) عند النقطة $x=1$.

لدينا:

$$f(1)=-0.2 \quad ; \quad f(1.1)=0.3105$$
$$f'(1.1)=6.3205$$

ومنه لدينا:

$$x_1 = 1 + \frac{(0.1)(0.2)}{0.5105} \approx 1.039$$

$$\overline{x}_1 = 1.1 - \frac{0.31051}{6.3205} \approx 1.051$$

لدينا:

$$\overline{x} - x = 0.012$$

والدقة غير كافية، نتابع العمل للحصول على التقريب التالي:

$$x_2 = 1.039 + \frac{(0.012)\ .\ (0.0282)}{0.0595} \approx 1.04469$$

$$\overline{x}_2 = 1.051 - \frac{0.0313}{5.1005} \approx 1.04487$$

هنا لدينا: $\overline{x}_2 - x_2 = 0.00018$

وهذه الدقة كافية حسب المطلوب.

ويمكن أن نختار: $x_o = \frac{1}{2}(1.04469 + 1.04487) \approx 1.045$

مع خطأ مطلق أقل من: $\frac{1}{2}0.00018 + 0.00022 = 0.00031 < \frac{1}{2}.10^{-3}$

ملاحظات: مطلوب

1- يتم عزل جذور المعادلات عادة بالطريقة البيانية أو التحليلية ولكن الطريقة البيانية ليست دقيقة ولذلك نلجأ إلى الطريقة التحليلية بالشكل التالي:

إذا كان التابع $y = f(x)$ مستمر في المجال $[a,b]$ وكان $f(a)\ .\ f(b) < o$ عندئذ يوجد جذر واحد على الأقل للمعادلة $y = f(x) = o$ في المجال $[a,b]$ وقد يكون هناك أكثر من جذر فإذا تحقق الشرط $f(a)\ .\ f(b) > o$ فيكون عدد الجذور زوجياً ثم نقوم بتصغير المجالات ليكون فيها التابع وحيد النمط (متزايد تماماً أو متناقص تماماً) ويتحقق ذلك بأن لايغير المشتق الأول لهذا التابع إشارته ضمن المجال المصغر. طبعاً مع تحقق الشرط: $f(a).f(b) < o$ (وجود جذر).

2- عند تطبيق طريقة لاغرانج (القاطع) يطرح السؤال التالي : عند أي من طرفي المجال يتم تطبيق العلاقة التكرارية حتى يكون الحل متقارباً؟ والجواب: إذا كان كلاً من f' و f'' لايغيران إشارتيهما ضمن المجال المذكور وأن التابع وحيد النمط وليس له نقطة انعطاف فإن الحل يكون متقارب من الحل الدقيق، بمعنى آخر أن نختار الطرف الذي يحقق العلاقة : $f(x).f''(x) > 0$

3- يعتبر البعض أن طريقة نيوتن هي ناتجة عن طريقة لاغرانج (القاطع) وذلك باستبدال قوس المنحني بين طرفي المجال الذي يحوي الجذر بالمماس عند أحد طرفي المجال، وهذا ما قد نضطر لتطبيقه في حالة إعطائنا قيمة واحدة فقط قريبة من الجذر أي عند معرفة أحد طرفي المجال فقط. أي أن نستعيض عن القاطع بالمماس لجزء المنحني في إحدى نهايتيه.

وهنا يطرح أيضاً السؤال التالي: عند أي من طرفي المجال الذي يحوي الجذر نطبق علاقة التكرار لنيوتن؟

والإجابة: نختار الطرف الذي يتحقق فيه نفس الشرط في طريقة القواطع وهو أن يكون التابع ومشتقه الثاني من إشارته واحدة عند هذه النقطة.

مطلوب *

(2-7) طريقة بايلي Bailey's iterative method أسرع من نيوتن بأربع مرات

لنفرض أننا أعطينا تقريب أولي x_i للجذر الحقيقي للمعادلة: $f(x) = 0$

إن المعادلة الاهتزازية المكافئة لـ $f(x)$ عند النقطة $x = x_i$ (تسمى معادلة القطع المكافئ) $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ اهتزازية مكافئية للتابع $f(x)$ عند النقطة x_i إذا تحققت الشروط الثلاث التالية:

1) $y(x_i) = f(x_i)$
2) $y'(x_i) = f'(x_i)$
3) $y''(x_i) = f''(x_i)$

يمكن أن تكتب على شكل كثير حدود تايلور التربيعي التالي:

$$y(x)=f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{f''(x_i)}{2}(x-x_i)^2 \qquad (2\text{-}34)$$

إن طريقة تقريب " بايلي " تحسب (من التقريب الابتدائي x_0) المتتالية: $x_1,x_2,...$ من التقريبات المتتالية للجذر α وذلك بتقريب $f(x)$ بهذه المعادلة المكافئية الاهتزازية وتعين التقاطع (x_{i+1},o) لهذا القطع المكافئ مع المحور x.

لحساب نقطة التقاطع نضع $y(x)=o$ عندما $x=x_{i+1}$ في المعادلة الأخيرة. فنجد:

$$o=f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1}-x_i)^2$$
$$=f(x_i)+(x_{i+1}-x_i)\left[f'(x_i)+\frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1}-x_i)\right]$$

هذه المعادلة يمكن أن تكتب بالشكل:

$$x_{i+1}=x_i-\left[\frac{f(x_i)}{f'(x_i)+\frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1}-x_i)}\right] \qquad (2\text{-}35)$$

لنفرض الآن أننا فرضنا أن معامل $\frac{f''(x_i)}{2}$ قد حسبت بطريقة نيوتن من العلاقة:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

وهذا يؤدي إلى استبدال $x_{i+1}-x_i$ بـ $\frac{-f(x_i)}{f'(x_i)}$ في المقام وينتج لدينا العلاقة:

$$x_{i+1}=x_i-\left[\frac{f(x_i)}{f'(x_i)-\frac{f(x_i)f''(x_i)}{2f'(x_i)}}\right] \qquad (2\text{-}36)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة " بايلي " التقريبية.

لحساب التقريب (الأدق من تقريب نيوتن) x_{i+1} للجذر α اعتماداً على التقريب x_i .

إن برهان تقارب طريقة "بايلي" وحساب معدل التقارب يصبح بسيطاً إذا تم تعريف تابع التكرار بنفس الطريقة التي عرف بها $F(x)$ في طريقة نيوتن، ويمكن تعريفه لطريقة بايلي بالشكل:

$$F(x)=x-\left[\frac{f(x)}{f'(x)-\dfrac{f(x).f''(x)}{2f'(x)}}\right] \tag{2-37}$$

و $F(x)$ يتمتع بالخواص: $\quad F(\alpha)=\alpha \quad$ و $\quad F(x_i)=x_{i+1}$

(2-7-1) برهان التقارب:

إن برهان تقارب طريقة بايلي مشابه لبرهان التقارب لطريقة نيوتن مع الأخذ بعين الاعتبار فقط شكل التابع $F(x)$ لهذه الطريقة.

(2-7-2) معدل تقارب طريقة بايلي:

يحسب معدل تقارب طريقة بايلي بشكل مشابه له في طريقة نيوتن. حيث يتم نشر التابع $F(x)$ السابق (في طريقة بايلي) على شكل سلسلة تايلور حول النقطة $x=\alpha$ (حيث α جذر المعادلة $f(x)=o$) ، بالشكل:

$$\begin{aligned}F(x)&=F(\alpha)+F'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{F''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2\\&+\frac{F'''(\alpha)}{6}(x-\alpha)^3+\ldots\end{aligned} \tag{2-38}$$

ومن أجل طريقة " بايلي " يمكن أن نرى أن:

$$F'(\alpha)=F''(\alpha)=o,$$

$$F'''(\alpha)=\frac{3}{2}\frac{[f''(\alpha)]^2}{[f'(\alpha)]^2}-\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{2-39}$$

وبتعويض هذه القيم في عبارة F(x) في منشور تايلور السابق نجد أن (مع إهمال الحدود من مرتبة أكبر من 3)

$$F(x)-F(\alpha)=K(x-\alpha)^3$$

حيث $K\equiv f'''(\alpha)$

وبتعويض $x=x_{i+1}$ في هذه العبارة مع استخدام العلاقة : $F(x_i)=x_{i+1}$ و $F(\alpha)=\alpha$

نجد أن :

$$x_{i+1}-\alpha=K(x_i-\alpha)^3 \qquad (2\text{-}40)$$

هذه العلاقة تبين أن التقارب تكعيبي وهذا يبين أن طريقة بايلي تتقارب بشكل أسرع من طريقة نيوتن ، أي تحتاج إلى تكرار أقل باستخدام هذه العلاقة.

ولكن لاشك أنه عند استخدام هذه الطريقة يكون عدد العمليات الحسابية أكبر منه في طريقة نيوتن وهذا يحط قليلاً من مزايا هذه الطريقة.

مثال (14) احسب الجذر الموجب للمعادلة (في المثال السابق):

$$f(x)\equiv x^5-x-0.02=0$$

بطريقة بايلي وقارن مع طريقة نيوتن.

(2-8) طرائق جديدة: حذف من هنا إلى ص ٧٣ محذوف

2-8-1-الطريقة الهجينة ~~الجديدة~~

لتكن المعادلة الجبرية غير الخطية:

$$f(x)=0 \qquad (2\text{-}41)$$

لنكتب منشور تايلور لـ $f(x_{k+1})=0$ حول النقطة x_k، فنجد:

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\tfrac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2+ \\ +\tfrac{1}{6}f^{(3)}(x_k)(x_{k+1}-x_k)^3+0[(x_{k+1}-x_k)^4] \qquad (2-42)$$

وكذلك يمكننا الحصول على منشور تابع المشتق:

$$f'(x_{k+1}) = f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \tfrac{1}{2} f^{(3)}(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 + 0[(x_{k+1} - x_k)^3] \qquad (2-43)$$

وبتعـــويض المعادلـــة (2-43) في (2-42) وإهمـــال الحـــدود ذات القـــوى $(x_{k+1} - x_k)^4$ وكذلك الحدود ذات القوى الأكبر نحصل على:

$$f(x_{k+1}) = f''(x_k)x_{k+1}^2 + [4f'(x_k) - 2f''(x_k)x_k + 2f'(x_{k+1})]x_{k+1} + [6f(x_k) - 4f'(x_k)x_k + f''(x_k)x_k^2 - 2f'(x_{k+1})x_k] = 0 \qquad (2-44)$$

لنعتبر التقريب التالي: $f'(x_k) = f'(x_{k+1})$ عندئذ نجد:

$$f(x_{k+1}) = f''(x_k)x_{k+1}^2 + [6f'(x_k) - 2f''(x_k)x_k]x_{k+1} + [6f(x_k) - 6f'(x_k)x_k + f''(x_k)x_k^2] = 0$$

وبوضع $f(x_{k+1}) = 0$ أي فرضنا أن x_{k+1} جذر للمعادلة (1)، نحصل عندئذ على المعادلة التالية من الدرجة الثانية بالنسبة للمجهول x_{k+1}:

$$Ax_{k+1}^2 + Bx_{k+1} + C = 0 \qquad (2-45)$$

حيث:

$$A = f''(x_k), \quad B = 6f'(x_k) - 2f''(x_k)x_k, \quad \text{and} \quad C = 6f(x_k) - 6f'(x_k)x_k + f''(x_k)x_k^2 \qquad (2-46)$$

وبحل المعادلة (2-45) من أجل x_{k+1} نجد العلاقة التكرارية التالية:

$$x_{k+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4.A.C}}{2.A} \qquad (2-47)$$

وكما هو معلوم، للحصول على حل حقيقي واختيـار الجـذر المناسـب، الـذي يجب أن يحقق الشرط التالي:

$$B^2 - 4.A.C \geq 0 \qquad (2-48)$$

2-8-2- طريقة نيوتن المعدلة

لنعتبر أولاً المعادلة الجبرية غير الخطية

$$f(x) = 0 \qquad (2-49)$$

وباعتبار طريقة نيدزيبوف الشهيرة المعطاة من أجل النموذج التالي:

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{4f(x_n)}{f'(x_n) + 2f'\left(\frac{x_{n+1}^N + x_n}{2}\right) + f'(x_{n+1}^N)}\right] \qquad (2-50)$$

حيث:

$$x^{N}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2\text{-}51)$$

هو تكرار نيوتن.

وبالاستعاضة في العلاقة (2-50) كل $f'(\frac{x^{N}_{n+1}+x_n}{2})$ بالفرق: $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ حيث y_n معرفة بالعلاقة: $y_n = \frac{x^{N}_{n+1}+x_n}{2}$ عندئذ نحصل من (2-50) على علاقة جديدة نسميها علاقة نيوتن المعدلة :

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{4f(x_n)}{f'(x_n)+2\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}+f'(x^{N}_{n+1})}\right] \qquad (2\text{-}52)$$

(يمكن البرهان على تقارب هذه الطريقة).

مثال(15)

لنأخذ المعادلة : $f(x) = x^3 - e^{-x} = 0.$

لإيجاد الجذر الموجب بالقرب من النقطة $x=1$ نحصل بتقريبات قليلة على $x=0.7729$. إن النتائج التي حصل عليها حسب طريقة نيوتن وحسب الطريقة الجديدة الهجينة وحسب الطريقة الحالية -**طريقة نيوتن المعدلة** - تعطى على الترتيب من خلال الجداول الثلاث التالية :

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	1	0.63212055882855767000
2	0.81230903009738120	0.0921667715343129910(9.2E-2)
3	0.77427654898550025	0.0031448249786133354(3.1E-3)
4	0.77288475620962160	0.0000040500855474589(4.1E-6)
5	0.77288295915220184	0.0000000000067425483(6.7E-12)
6	0.77288295914921012	0.0000000000000000645(6.5E-17)

طريقة نيوتن

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	1	0.63212055882855767000
2	0.801305391412732989	0.0657676468308537 (6.5E-2)
3	0.773375282149371597	0.0011100665084369(1.1E-3)
4	0.772883108807313135	3.37288157491135E-7
5	0.772882959149223945	3.11745529564533E-14
6	0.772882959149210113	1.62630325872826E-19
7	0.772882959149210113	1.62630325872826E-19

الطريقة الهجينة الجديدة

n	x_n	$|f(x_n)|$
1	1	0.63212055882855767000
2	0.789594358848448270	0.0382509772245695 (3.8E-2)
3	0.772950673278041110	0.0001526185542451(1.5E-4)
4	0.772882960211331382	2.3937286E-9
5	0.772882959149210113	0.0000000000000000

الطريقة الحالية– طريقة نيوتن المعدلة–

مثال(16) لنأخذ المعادلة: $f(x) = \sin x = 0.$

إن النتائج التي حصلنا عليها حسب طريقة نيوتن التكرارية وحسب الطريقة الجديدة الهجينة وحسب الطريقة الحالية تعطى على الترتيب من خلال الجداول التالية:

n	x_n	$|f(x_n)|$
1	1.5	0.99749498660405445000
2	-12.601419947171719400	0.0350421571610179
3	-12.566356255118672700	0.0000143592404998
4	-12.566370614359173900	0.0000000000000010
5	-12.566370614359173000	0.0000000000000000

طريقة نيوتن

n	x_n	$|f(x_n)|$
1	-12.601419947171719	0.0000071772677701(7.1E-6)
2	-12.5663634370914028	0.0000000000000008(8.0E-16)

الطريقة الهجينة الجديدة

n	x_n	$|f(x_n)|$
1	1.5	0.99749498660405445000
2	-1.9296287714411738020	0.9363074853509102
3	-3.7534514114768295 80	0.5743899968181760
4	-3.1183795738545368 10	0.0232109950747530
5	-3.1415939564721844 70	0.0000013028823912
6	-3.1415926535897932 40	0.0000000000000000

الطريقة الحالية– طريقة نيوتن المعدلة–

مثال(17) لنأخذ المعادلة: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0.$

إن النتائج التي حصلنا عليها حسب طريقة نيوتن التكرارية وحسب الطريقة الحالية تعطى على الترتيب من خلال الجداول التالية:

n	x_n	$\|f(x_n)\|$
1	1.5	2.375000000000000000
2	1.333333333333333330	0.1343454814814815
3	1.365262014874626620	0.0005284611795157
4	1.365230013916146650	0.000000082905488
5	1.365230013414096850	0.000000000000000

طريقة نيوتن

n	x_n	$\|f(x_n)\|$
1	1.427841634738186460	1.0659129872799756
2	1.365742111478465810	0.0084586028868118
3	1.365230045574601760	0.0000005310792606
4	1.365230013414096970	0.0000000000000021
5	1.365230013414096850	0.0000000000000000

– طريقة نيوتن المعدلة–

مثال(18) لنأخذ المعادلة : $f(x) = \sin(x) - 0.5x = 0 = 0.$

إن النتائج التي حصل عليها حسب طريقة نيوتن التكرارية وحسب الطريقة الحالية تعطى على الترتيب من خلال الجداول التالية:

n	x_n	$\|f(x_n)\|$
1	1.977123551007066270	0.0699831389334367
2	1.898950910895084440	0.0028367290031999
3	1.895501147295299190	0.0000056351114238
4	1.895494267061369710	0.0000000000224320
5	1.895494267033980950	0.0000000000000000

طريقة نيوتن

n	x_n	$\|f(x_n)\|$
1	1.898940212004733730	0.0028279313958344
2	1.895495988900392730	0.0000014102487798
3	1.895494267033980950	0.0000000000000000

– طريقة نيوتن المعدلة–

2-8-3- طريقة تكرارية جديدة متقاربة تربيعياً

لتكن المعادلة الجبرية غير الخطية:

$$f(x) = 0 \qquad (2-53)$$

لنكتب منشور تايلور لـ $f(x_{k+1})=0$ حول النقطة x_k، كما في الطريقة الهجينة الجديدة فنجد:

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\tfrac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2+$$
$$+\tfrac{1}{6}f^{(3)}(x_k)(x_{k+1}-x_k)^3+0[(x_{k+1}-x_k)^4] \qquad (2-54)$$

وكذلك يمكننا الحصول على منشور تابع المشتق:

$$f'(x_{k+1})=f'(x_k)+f''(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\tfrac{1}{2}f^{(3)}(x_k)(x_{k+1}-x_k)^2+0[(x_{k+1}-x_k)^3] \qquad (2-55)$$

وبتعويض المعادلة (2-55) في (2-54) وإهمال الحدود ذات القوى $(x_{k+1}-x_k)^4$ وكذلك الحدود ذات القوى الأكبر نحصل على:

$$f(x_{k+1})=f''(x_k)x_{k+1}^2+[4f'(x_k)-2f''(x_k)x_k+2f'(x_{k+1})]x_{k+1}+$$
$$+[6f(x_k)-4f'(x_k)x_k+f''(x_k)x_k^2-2f'(x_{k+1})x_k]=0 \qquad (2-56)$$

لنعتبر التقريب التالي: $f'(x_k)=f'(x_{k+1})$ عندئذ نجد:

$$f(x_{k+1})=f''(x_k)x_{k+1}^2+[6f'(x_k)-2f''(x_k)x_k]x_{k+1}+$$
$$+[6f(x_k)-6f'(x_k)x_k+f''(x_k)x_k^2]=0$$

وبوضع $f(x_{k+1})=0$ أي فرضنا أن x_{k+1} جذر للمعادلة (2-53)، نحصل عندئذ على المعادلة التالية من الدرجة الثانية بالنسبة للمجهول x_{k+1}:

$$Ax_{k+1}^2+Bx_{k+1}+C=0 \qquad (2-57)$$

حيث:

$$A=f''(x_k),\quad B=6f'(x_k)-2f''(x_k)x_k,$$
$$\text{and}\quad C=6f(x_k)-6f'(x_k)x_k+f''(x_k)x_k^2 \qquad (2-58)$$

وبحل المعادلة (5) من أجل x_{k+1} نجد العلاقة التكرارية التالية:

$$x_{k+1}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4.A.C}}{2.A} \qquad (2-59)$$

وبتعويض القيم من المعادلة (2-58) في المعادلة (2-59) نجد النموذج التالي:

$$x_{k+1}=x_k-3\frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\mp\frac{1}{f''(x_k)}[\sqrt{9f'^2(x_k)-6f(x_k).f''(x_k)}] \qquad (2-60)$$

وكما هو معلوم، للحصول على حل حقيقي واختيار الجذر المناسب الذي يجب أن يحقق الشرط:

$$B^2\text{-}4.A.C \geq 0 \qquad (2\text{-}61)$$

وبحساب $B^2-4.A.C \geq 0$ نجد الشرط المكافئ التالي:

$$\frac{f(x_k).f''(x_k)}{f'^2(x_k)} \leq \frac{3}{2} \qquad (2-62)$$

2- دراسة التقارب:

لنعتبر التابع المساعد التالي:

$$F(x) = x - 3\frac{f'(x)}{f''(x)} \mp \frac{1}{f''(x)}[\sqrt{9f'^2(x) - 6f(x).f''(x)}] \qquad (2-63)$$

ومشتقه، التابع:

$$F'(x) = 1 - 3\left[1 - \frac{f'(x).f'''(x)}{f''^2(x)}\right] \mp \left[\frac{12f'(x)f''(x) - 6f(x)f'''(x)}{f''(x).\sqrt{9f'^2(x) - 6f(x)f''(x)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{9f'^2(x) - 6f(x).f''(x)}.f'''(x)}{f''\ (x)}\right] \qquad (2-64)$$

الذي يحقق الخواص التالية: $F(x_k) = x_{k+1}$ ، $F'(r)=0$, $F(r)=r$

حيث r هو جذر للمعادلة (2-53). إن أهمية استخدام التابع المساعد F(x) يوضح من خلال برهان النظرية التالية:

نظرية (1)

ليكن K هو أكبر قيمة لطويلة المشتق 'F للتابع F في المجال الذي يحوي على النقاط $x_0, x_1, x_2, ...$ and r. إذا كان K<1 ، عندئذ المتتالية $\{x_{k+1} = F(x_k)\}$ تتقارب من r حيث r هو جذر المعادلة (2-53) و حيث F(x) معطى بالمعادلة (2-63).

البرهان:

باستخدام علاقة التكرار $F(x_k) = x_{k+1}$ نحسب: $x_1 = F(x_0)$ عندئذ:

$$x_1 - r = F(x_0) - F(r) \qquad (2\text{-}65)$$

لأن: $F(r)=r$

وبالتالي نجد بتطبيق نظرية القيمة الوسطى:

$$F(x_0)-F(r)=(x_0-r)F'(\bar{x}_0) \qquad (2-66)$$

حيث: $\bar{x}_0 \in (x_0, r)$

وبالتالي باستخدام العلاقتين (2-65) و (2-66) نحصل على العلاقة:

$$x_1-r=(x_0-r)F'(\bar{x}_0) \qquad (2-67)$$

وبأخذ القيمة المطلقة واستخدام الفرض نجد:

$$|x_1-r|=|x_0-r||F'(\bar{x}_0)|\le|x_0-r|K \qquad (2-68)$$

وبنفس الطريقة نجد من المعادلة (2-68):

$$|x_2-r|=|x_1-r||F'(\bar{x}_1)|\le|x_1-r|K\le|x_0-r|K^2 \qquad (2-69)$$

وبالمتابعة نحصل على العلاقة التالية:

$$|x_{k+1}-r|=|x_1-r||F'(\bar{x}_1)|\le|x_1-r|K\le|x_0-r|K^{k+1} \qquad (2-70)$$

ومن العلاقة:

$$|x_{k+1}-r|\le|x_0-r|K^{k+1} \quad ; \quad K<1$$

نجد أن: $\lim_{k\to\infty}|x_{k+1}-r|=0$ وهذا يعني أن $\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=r$

وبالتالي فإن المتتالية $\{x_{k+1}\}$ تتقارب من الجذر r للمعادلة (2-53).

نظرية-(2)

بفرض أن التابع $f: I\subset R\to R$. قابل للاشتقاق في المجال I بشكل كاف، حيث I هو جوار للجذر البسيط r للمعادلة (2-53). عندئذ الطريقة المعرفة بالعلاقة (2-60) تكون من المرتبة (2) على المجال I; أي ان معدل تقاربها تربيعي.

البرهان:

بأخذ التوابع المعرفة في العلاقات (2-63) و (2-64) الذي يحقق الخواص التالية: $F(r)=r$, $F'(r)=0$ حيث r هو جذر المعادلة

$$F(x_k)=x_{k+1} \qquad (2-53)$$

وبنشر التابع $F(x)$ حسب سلسلة تايلور حول النقطة $x=r$ نجد:

$$F(x)=F(r)+F'(r)(x-r)+\tfrac{f''(r)}{2}(x-r)^2+..... \qquad (2\text{-}71)$$

لنأخذ الآن معدل التقارب الذي يعرف في الطرق التكرارية بالشكل: $e_k=x_k-r.$ وباستخدام العلاقة $x_{k+1}=F(x_k)$ ومن العلاقات (2-63) و (2-64) و (2-71) نجد أن:

$$e_{k+1}=\frac{F''(r)}{2}e_k^2 \qquad (2\text{-}72)$$

حيث: $F''(r)=\dfrac{4}{3}\dfrac{f''(r)}{f'(r)}$ (حيث تم إهمال الحدود من المرتبة اكبر من 2)

وبالتالي فإن الطريقة المعرفة بالعلاقة (2-60) تتقارب بمعدل تربيعي.

مثال (19): لنأخذ المثال التالي : $f(x)=x^3-e^{-x}=0.$

لإيجاد الجذر قرب النقطة $x=1$ حيث القيمة الابتدائية $x_0=1$ نحصل بعد عدد قليل من التقريبات على القيمة $x=0.7729$ وفيما يلي النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام لغة البرمجة تيربو باسكال بطريقة نيوتن والطريقة الحالية من خلال الجداول التالية :

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	1	0.63212055882855767000
2	0.81230903009738120	0.09216677153431299100(9.2E-2)
3	0.77427654898550025	0.00314482497861333540(3.1E-3)
4	0.77288475620962160	0.00000405008554745892(4.1E-6)
5	0.77288295915220184	0.00000000000674254836(6.7E-12)
6	0.77288295914921012	0.00000000000000006456(6.5E-17)

طريقة نيوتن

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	1	0.63212055882855767000
2	0.801305391412732990	0.065767646830853733 (6.5E-2)
3	0.773375282149371597	0.0011100665084369(1.1E-3)
4	0.772883108807313135	3.37288157491E-7
5	0.772882959149223945	3.1175E-14
6	0.772882959149210113	00000000000000000000

الطريقة الحالية– طريقة تكرارية جديدة متقاربة تربيعياً–

مثال (20): لنأخذ المثال التالي: $f(x)=\sin x=0.$

فيما يلي النتائج التي تم الحصول عليها باستخدام لغة البرمجة تيربو باسكال بطريقة نيوتن والطريقة الهجينة والطريقة الحالية من خلال الجداول الثلاث التالية:

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	-12.601419947171719	0.035042157161017259000(3.5E-2)
2	-12.566356255118672	0.000014359240500635l4(1.4-5)
3	-12.566370614359174	0.00000000000000128651(1.3E-15)

طريقة نيوتن

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
1	-12.601419947171719	0.035042157161017259000 (3.5E-2)
2	-12.566363437091402800	0.000007177267770079(7.1E-6)
3	-12.566370614359158200	0.00000000000000014701(1.4701E-14)

الطريقة الحالية- طريقة تكرارية جديدة متقاربة تربيعياً-

(2-9) حل جملة معادلات غير خطية:

يمكن تحديد طريقتي نيوتن وبايلي لحل جملة معادلات من المعادلات غير الخطية، مثل:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=o \\ g(x,y)&=o \end{aligned} \qquad (2\text{-}73)$$

يعتمد الحل على منشور تايلور لتابع لعدة متحولات ، وهنا من أجل متحولين x , y يعطى منشور تايلور بالشكل:

$$\begin{aligned} f(x_o+\delta x,y_o+\delta y)&=f(x_o,y_o)+f_x(x_o,y_o)\,\delta x+ \\ &+f_y(x_o,y_o)\,\delta y+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_o,y_o)\,\delta x^2+2f_{xy}(x_o,y_o)\,\delta x\delta y\right. \\ &\left.+f_{yy}(x_o,y_o)\,\delta y^2\right]+\dots \end{aligned}$$

(2-74)

$$\begin{aligned} g(x_o+\delta x,y_o+\delta y)&=g(x_o,y_o)+g_x(x_o,y_o)\delta x+ \\ &+g_y(x_o,y_o)\delta y+\frac{1}{2}\left[g_{xx}(x_o,y_o)\delta x^2+2g_{xy}(x_o,y_o)\,\delta x\delta y\right. \\ &\left.+g_{yy}(x_o,y_o)\,\delta y^2\right]+\dots \end{aligned}$$

إن تمديد طريقة نيوتن لحل جملة معادلات غير خطية تعتمد على تقريب التوابع ذات عدة متحولات إلى تابع خطي بكثيرات حدود تايلور ، على سبيل المثال، لحل الجملة:

$$f(x,y)=o$$
$$g(x,y)=o$$

التوابع $f(x,y)$, $g(x,y)$ تقرب إلى منشوري تايلور (2-74) بعد حذف الحدود بعد الدرجة الأولى منه. وبشكل مشابه يمكن أيضاً استخدام طريقة بايلي لحل هذه الجملة والذي يعتمد على تقريب التوابع بعدة متغيرات بكثيرات حدود تايلور التربيعية، مثل (2-74) بعد حذف الحدود من الدرجة الثانية في $\delta x , \delta y$.

إن استخدام طريقة بايلي ترجع لتعديل طريقة نيوتن .

إن استخدام هاتين الطريقتين يوضح فيما يلي ببعض الأمثلة العددية:

(2-10) طريقة نيوتن لحل جملة معادلات غير خطية: ضروري هام

لنفرض أن التقدير (x_o , y_o) لحل المعادلات معلوم. وإذا أخذ هذا التقدير زيادة مقدارها $\delta x, \delta y$ (على الترتيب) عندئذ تقريبات المرتبة الأولى لنتيجة تغير $f(x,y)$ و $g(x,y)$ تعطى بالتفاضلات الكلية التالية:

$$\begin{aligned} \delta f &= f_x(x_o , y_o)\delta x + f_y(x_o , y_o)\delta y \\ \delta g &= g_x(x_o , y_o)\delta x + g_y(x_o , y_o)\delta y \end{aligned} \qquad (2\text{-}75)$$

إن حل الجملة (2-73) يحصل عليه بتحديد $\delta x, \delta y$ بحيث إن التفاضل الكلي لـ $\delta f, \delta g$ يحقق الشرطية:

$$\begin{aligned} \delta f &= -f(x_o , y_o) \\ \delta g &= -g(x_o , y_o) \end{aligned} \qquad (2\text{-}76)$$

ومنه نجد أن من (2-43): هذه العلاقة هي منشور تايلور

$$\begin{aligned} -f(x_o , y_o) &= f_x(x_o , y_o)\delta x + f_y(x_o , y_o)\delta y \\ -g(x_o , y_o) &= g_x(x_o , y_o)\delta x + g_y(x_o , y_o)\delta y \end{aligned} \qquad (2\text{-}77)$$

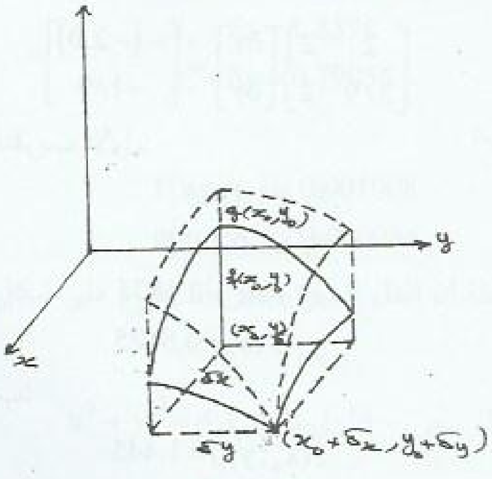
وهاتان المعادلتان الخطيتان يمكن حلهما بالنسبة لـ $\delta x, \delta y$.

وإذا قدر كل من f و g عند $(x_o+\delta x, y_o+\delta y)$ وكتبا على شكل منشور تايلور، ينتج من (2-45) أن الطرف الأيمن للمعادلات الناتجة يكون معدوماً، أي:

$$f(x_o+\delta x, y_o+\delta y)=f(x_o,y_o)+f_x(x_o,y_o)\delta x+f_y(x_o,y_o)\delta y=o$$
$$g(x_o+\delta x, y_o+\delta y)=g(x_o,y_o)+g_x(x_o,y_o)\delta x+g_y(x_o,y_o)\delta y=o$$

(2-78)

إذا كان هذا المنشور لتايلور دقيقاً بشكل كاف، فإنه من الواضح أن $(x_o+\delta x, y_o+\delta y)$ يكون تقريباً لحل المعادلات (2-73) ، إذا كان $|\delta x|>\varepsilon$ أو $|\delta y|>\varepsilon$، حيث تكون ε كمية صغيرة موجبة فإنه من الضروري استبدال x_o بـ $x_o+\delta x$ و y_o بـ $y_o+\delta y$ وتكرار المعالجة. غالباً، عدد قليل من التكرارات لهذه المعالجة تعطي قيماً دقيقة للجذور لـ (2-73). يبرهن أن التقديرات الأصلية (x_o,y_o) كافية لإحكام الحل الحقيقي. (الشكل (2-7)).



الشكل (2-7)

مثال (21):-

ليكن الحل التقديري $(x_o,y_o)=(1,1)$ عيّن الحل للمعادلات غير الخطية :

$$f(x,y)\equiv x^2+y^2-4=o$$

$$g(x,y)\equiv \frac{x^2}{9}+y^2-1=o$$

في كل تكرار ، احسب التصحيح التفاضلي $\delta y, \delta x$، بحل المعادلات الخطية:

$$\begin{bmatrix} f_x(x_o,y_o) & f_y(x_o,y_o) \\ g_x(x_o,y_o) & g_y(x_o,y_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_o,y_o) \\ -g(x_o,y_o) \end{bmatrix}$$

استمر بالتكرار حتى يصبح التصحيحين التفاضليين مهملين.

الحل:

$$f_x = 2x \quad ; \quad f_y = 2y$$

$$g_x = \frac{2}{g}x \ ; \quad g_y = 2y$$

بما أن $(x_o, y_o) = (1,1)$

فإننا نجد أن:

$$f(x_o, y_o) = -2.0$$

$$g(x_o, y_o) = \frac{1}{9}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2/9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-2.0) \\ -1/9 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الأول:

$$\delta x = 1.1875$$
$$\delta y = -0.1875$$
$$x_o + \delta x = 2.1875$$
$$y_o + \delta y = 0.8125$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$f(x_o, y_o) = 1.445$$
$$g(x_o, y_o) = 0.192$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} 4.375 & 1.625 \\ 0.486 & 1.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.445 \\ -0.192 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الثاني للحل:

$$\delta x = -0.322$$
$$\delta y = -0.0218$$
$$x_o + \delta x = 1.8655$$
$$y_o + \delta y = 0.7907$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$f(x_o, y_o) = 0.1052$$
$$g(x_o, y_o) = 0.0119$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} 3.731 & 1.5818 \\ 0.4146 & 1.5818 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1052 \\ -0.0119 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الثالث للحل :

$$\delta x = -0.0281$$
$$\delta y = -0.00015$$
$$x_o + \delta x = 1.8374$$
$$y_o + \delta y = 0.79055$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$f(x_o, y_o) = 0.001008$$
$$g(x_o, y_o) = 0.000084$$

من الممتع ملاحظة أن المثال السابق يمكن أن يطرح على شكل مسألة هندسية بالشكل:

أوجد التقاطع التربيعي – الأولى للدائرة $x^2 + y^2 = 4$

والقطع الناقص: $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(2-11) طريقة نيوتن المعدلة، باستخدام منشور تايلور التربيعي:

من هنا الى ص ٨٧ محذوف

يمكن تعديل طريقة نيوتن وذلك بأخذ المشتقات من المرتبة الثانية بالاعتبار، هذا يعني أنه إذا أخذنا التقدير x_o, y_o مع ازدياد $\delta x, \delta y$ على الترتيب، عندئذ التقريب من المرتبة الثانية لـ $f(x,y)$ و $g(x,y)$ يعطى بالعبارات :

$$\delta f = f_x\delta x + f_y\delta y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}\delta x^2 + 2f_{xy}\delta x\delta y + f_{yy}\delta y^2\right]$$
$$\delta g = g_x\delta x + g_y\delta y + \frac{1}{2}\left[g_{xx}\delta x^2 + 2g_{xy}\delta x\delta y + g_{yy}\delta y^2\right] \qquad (2\text{-}79)$$

إن حلاً للمجموعة (2-73) نحصل عليه بتعيين $\delta x, \delta y$ بحيث إن $\delta g, \delta f$ يحققان الشرطين:

$$\delta f = -f(x_o, y_o)$$
$$\delta g = -g(x_o, y_o)$$

وهذا يعطي:

$$-f(x_o,y_o) = \left[f_x + \frac{f_{xx}\delta x}{2} + \frac{f_{yy}\delta y}{2}\right]\delta x + \left[f_y + \frac{f_{yy}\delta y}{2} + \frac{f_{xy}\delta x}{2}\right]\delta y$$
$$-g(x_o,y_o) = \left[g_x + \frac{g_{xx}\delta x}{2} + \frac{g_{yy}\delta y}{2}\right]\delta x + \left[g_y + \frac{g_{yy}\delta y}{2} + \frac{g_{xy}\delta x}{2}\right]\delta y \qquad (2\text{-}80)$$

الآن إذا كان $\delta y, \delta x$ داخل الأقواس مقربة على الترتيب

بـ $-f/f_x$ و $-f/f_y$ في المعادلة الأولى

وبـ $-g/g_x$ و $-g/g_y$ في المعادلة الثانية

فإن الجملة (2-49) تكتب على شكل جملة معادلات خطية لـ $\delta y, \delta x$:

$$-f(x_o,y_o) = \left[f_x - \frac{f_{xx}f}{2f_x} - \frac{f_{xy}f}{2f_y}\right]\delta x + \left[f_y - \frac{f_{yy}f}{2.f_y} - \frac{f_{xy}f}{2f_x}\right]\delta y$$
$$-g(x_o,y_o) = \left[g_x - \frac{g_{xx}g}{2g_x} - \frac{g_{xy}g}{2g_y}\right]\delta x + \left[g_y - \frac{g_{yy}g}{2.f_y} - \frac{g_{xy}g}{2g_x}\right]\delta y \qquad (2\text{-}81)$$

بحل هذه المعادلات نحصل على $\delta y, \delta x$، والتي نحصل منها على $(x_o + \delta x, y_o + \delta y)$ وهي تقدير محسن لحل الجملة (2-73)، يعتمد على دقة منشور تايلور التربيعي على تقريب $\delta y, \delta x$ المستخدم في (2-81). إذا كان $|\delta x| > \varepsilon$ أو $|\delta y| > \varepsilon$.فإن الإجراءات الكلية تكرر بعد استبدال القيم لـ y_o, x_o بـ $x_o + \delta x$ و $y_o + \delta y$.

"نحن مطالبون بالمشتق الأول فقط"

غير مطلوب لوجود المشتق الثاني

مثال (22) (لطريقة نيوتن المعدلة):

ليكن الحل التقديري $(x_o, y_o) = (1,1)$ ، عيّن الحل للمعادلتين غير الخطيتين التاليتين:

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$g(x,y) \equiv \frac{x^2}{9} + y^2 - 1 = 0$$

في كل تكرار، احسب التصحيح التفاضلي $\delta y, \delta x$ بحل المعادلات الخطية:

$$\begin{bmatrix} f_x - \dfrac{f_{xx}f}{2f_x} - \dfrac{f_{xy}f}{2f_y} & f_y - \dfrac{f_{yy}f}{2f_y} - \dfrac{f_{xy}f}{2f_x} \\ g_x - \dfrac{g_{xx}g}{2g_x} - \dfrac{g_{xy}g}{2g_y} & g_y - \dfrac{g_{yy}g}{2g_y} - \dfrac{g_{xy}g}{2g_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_o, y_o) \\ -g(x_o, y_o) \end{bmatrix}$$

الحل:

$$f_x = 2x \quad ; \quad f_{xx} = 2 \quad ; \quad f_{xy} = 0$$

$$f_y = 2y \quad ; \quad f_{yy} = 2$$

$$g_x = \frac{2}{9}x \quad ; \quad g_{xx} = \frac{2}{9} \quad ; \quad g_{xy} = 0$$

$$g_y = 2y \quad ; \quad g_{yy} = 2$$

بما أن: $(x_o, y_o) = (1,1)$

فإننا نجد أن:

$$f(x_o, y_o) = -2$$

$$g(x_o, y_o) = \frac{1}{9}$$

ومنه:

$$\begin{bmatrix} 2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)\left(-\dfrac{-2}{2}\right) - 0 & 2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)\left(\dfrac{-2}{2}\right) - 0 \\ \dfrac{2}{9} - \left(\dfrac{2/9}{2}\right)\left(\dfrac{1/9}{2/9}\right) - 0 & 2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)\dfrac{(1/9)}{2} - 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-2) \\ -1/9 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الأول:

$$\delta x = 0.7916$$
$$\delta y = -0.125$$
$$x_o + \delta x = 1.7916$$
$$y_o + \delta y = 0.8750$$

ومن ثم يمكن أن نكتب:

$$f(x_o, y_o) = -0.0246;$$
$$g(x_o, y_o) = 0.12222$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix} 3.5832 - \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{-0.0246}{3.5832}\right) - o & 1.75 - \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{-0.0246}{1.75}\right) \\ 0.3981 - \left(\frac{2/9}{2}\right)\left(\frac{0.1222}{0.3981}\right) - o & 1.75 - \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1.222}{1.75}\right) - o \end{bmatrix}.$$
$$.\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\begin{pmatrix} -0.0246 \\ -0.1222 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على التقريب الثاني للحل:

$$\delta x = 0.0477$$
$$\delta y = -0.0831$$
$$x_o + \delta x = 1.8393$$
$$y_o + \delta y = 7919$$

وهكذا نكرر العمل السابق لنكتب:

$$f(x_o, y_o) = -0.0101;$$
$$g(x_o, y_o) = 0.0030$$

لقد حصلنا على هذا الجواب بتكرارين من الطريقة المعدلة فقط بينما في الغالب نحتاج لثلاثة تكرارات في طريقة نيوتن العادية للحصول على تلك الأجوبة.

(2-11-1) تعميم – طريقة نيوتن في حل جملة معادلات غير خطية:

بشكل عام لنأخذ الآن جملة المعادلات غير الخطية التالية:

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (2\text{-}82)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

يمكن كتابة هذه الجملة على شكل جبري: $f(x) = 0$

حيث:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}83)$$

ولحل الجملة (2-83) سنستخدم طريقة نيوتن للتقريبات المتتالية، وبفرض أن لـــدينا التقريـــب k : $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$ لأحـــد الجـــذور المعزولـــة $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ للمعادلة الشعاعية (2-83). الحل الـدقيق لـ (2-83) عندئذ يكتب بالشكل:

$$x = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)} \qquad (2\text{-}84)$$

حيث: $\varepsilon^{(k)} = \left(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, ..., \varepsilon_n^{(k)}\right)$ هو تصحيح (خطأ الحل) أو خطأ التقريب لنعوض (2-84) في (2-83) فنجد:

$$f\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = 0 \qquad (2\text{-}85)$$

لنفرض أن التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق ومشتقاته مستمرة في ساحة محدبة مـا تحتوي على x و $x^{(k)}$ ولنفرض الطرف الأول للمعادلة (2-85) بالنسبة لقوى المتجه الصغير $\varepsilon^{(k)}$ مكتفين بالحدود الخطية فقط فنجد :

$$f\left(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\varepsilon^{(k)} = 0 \qquad (2\text{-}86)$$

أو بشكل مفصل (منشور):

$$f_1\left(x_1^{(k)}+\varepsilon_1^{(k)}\ ,\ x_2^{(k)}+\varepsilon_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}+\varepsilon_n^{(k)}\right)=$$

$$=f_1\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)+f'_{1x_1}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_1^{(k)}+$$

$$+\ f'_{1x_2}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_2^{(k)}+\dots$$

$$\dots+\ f'_{1x_n}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_n^{(k)}=o\ ,$$

$$f_2\left(x_1^{(k)}+\ \varepsilon_1^{(k)}\ ,\ x_2^{(k)}+\varepsilon_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}+\varepsilon_n^{(k)}\right)=$$

$$=f_2\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ +f'_{2x_1}\ \left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_1^{(k)}+$$

$$+\ f'_{2x_2}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_2^{(k)}+\dots$$

$$\dots+\ f'_{2x_n}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_n^{(k)}=o\ ,$$

....

$$f_n\left(x_1^{(k)}+\varepsilon_1^{(k)}\ ,\ x_2^{(k)}+\varepsilon_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}+\varepsilon_n^{(k)}\right)=$$

$$=f_n\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ +f'_{nx_1}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_1^{(k)}+$$

$$+\ f'_{nx_2}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_2^{(k)}+\dots \qquad (2\text{-}87)$$

$$\dots+\ f'_{nx_n}\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\ \varepsilon_n^{(k)}=o$$

العلاقات (2-87) تؤدي إلى أن المشتق $f'(x)$ كمصفوفة المشتقات الجزئية ومن المرتبة الأولى للتوابع $f_1,f_2,\dots,f_n$ للمتحولات $x_1,x_2,\dots,x_n$ على الترتيب:

$$f'(X)=W(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & & \dots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix},$$

هذه المصفوفة تكتب بالشكل المكافئ المختصر التالي:

$$f'(X)=\ W(X)\ =\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\ ;\quad (i,j=1,2,\dots,n)$$

إن جملة المعادلات (2-87) هي جملة معـادلات خطيـة بالنسبة إلى $\varepsilon_i^{(k)}$ حيث $(i=1,2,\ldots,n)$ ذات مصفوفة $W(X)$ وبالتالي يمكن كتابة (2-86) بالشكل:

$$f\left(x^{(k)}\right)+W\left(X^{(k)}\right)\varepsilon^{(k)}=0$$

وبفرض أن المصفوفة $W\left(X^{(k)}\right)$ نظامية (محددها $\neq 0$) نحصل على:

$$\varepsilon^{(k)}=-W^{-1}\left(X^{(k)}\right)f\left(X^{(k)}\right)$$

وبالنتيجة:

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-W^{-1}\left(X^{(k)}\right)f\left(X^{(k)}\right)\ ;\ (k=0,1,2,\ldots) \qquad (2\text{-}88)$$

لنأخذ التقريب الابتدائي $X^{(0)}$ لإيجاد بقية التقريبات المتتالية.

مثال (23): أوجد الحلول التقريبية الموجبة لجملة المعادلات:

$$f_1(x_1,x_2) \equiv x_1+3\log x_1-x_2^2=0$$

$$f_2(x_1,x_2) \equiv 2x_1^2 x_1 x_2-5x_1+1=0$$

الحل: إن المنحنيات لهاتين المعادلتين تتقاطعان تقريباً في النقـاط $M_1(1.4;-1.5)$ و $M_2(3.4;2.2)$.

لننطلق من التقريب الابتدائي: $X^{(0)}=\begin{bmatrix}3.4\\2.2\end{bmatrix}$

لنحسب التقريب التالي بأربعة أرقام عشرية، ونأخذ:

$$f(X)=\begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2)\\f_2(x_1,x_2)\end{bmatrix}$$

لدينا:

$$f\left(X^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}3.4+3\log 3.4-2.2^2\\(2).(3.4)^2-(3.4).(2.2)-(5).(3.4)+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1544\\-0.3600\end{bmatrix}$$

لنوجد مصفوفة الجاكوبيان:

$$W(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{3M}{x_1} & -2x_2\\ 4x_1-x_2-5 & -x_1\end{bmatrix}$$

حيث $M = 0.43429$ ومنه:

$$W\left(X^{(o)}\right)=\begin{bmatrix}1+\dfrac{(3)\ .\ (0.43429)}{3.4} & (-2)\ (2.2)\\ (4)\ (3.4)\ -2.2-5 & -3.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.3832 & -4.4\\ 6.4 & -3.4\end{bmatrix}$$

وكذلك:

$$\Delta=\det W\left(X^{(o)}\right)=23.4571\neq o$$

المصفوفة $W\left(X^{(o)}\right)$ إذن هي مصفوفة نظامية، لنأخذ مقلوبها:

$$W^{-1}\left(X^{(o)}\right)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-3.4 & 4.4\\ -6.4 & 1.3832\end{bmatrix}$$

العلاقة (2-88) تعطي:

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}3.4\\ 2.2\end{bmatrix}-\frac{1}{23.4571}\begin{bmatrix}-3.4 & 4.4\\ -6.4 & 1.3832\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1544\\ -0.3600\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3.4\\ 2.2\end{bmatrix}-\frac{1}{23.4571}\begin{bmatrix}-2.10896\\ -1.48604\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3.4\\ 2.2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0899\\ 0.0633\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.4899\\ 2.2633\end{bmatrix}$$

التقريبات التالية تحسب بشكل مشابه وتعطى بالجدول التالي:

i	x_1	$\varepsilon_1=\Delta x_1$	x_2	$\varepsilon_2=\Delta x_2$
0	3.4	0.0899	2.2	0.0633
1	3.4899	-0.0008	2.2633	-0.0012
2	3.4891	-0.0016	2.2621	-0.0005
3	3.4875		2.2616	

إذا توقفنا عند التقريب $X^{(3)}$ كان لدينا:

$$x_1 = 3.4875 \quad , \quad x_2 = 2.2616$$

و:

$$f\left(x^{(3)}\right)=\begin{bmatrix}0.0002\\ 0.0000\end{bmatrix}$$

مثال (24):

باستخدام طريقة نيوتن أوجد الحل الموجب التقريبي لجملة المعادلات:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+y^2-4z=o \\ 3x^2-4y+z^2=o \end{array}\right\}$$

بأخذ الحل الابتدائي $x_o = y_o = z_o = 0.5$

الحل: لدينا:

$$f(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$f\left(x^{(o)}\right)=\begin{bmatrix} 0.25+0.25+0.25-1 \\ 0.50+0.25-2.00 \\ 0.75-2.00+0.25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix}$$

لنكتب مصفوفة الجاكوبيان:

$$W(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$W\left(X^{(o)}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\ W\left(X^{(o)}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-40\neq o$$

لنبحث عن مصفوفة المقلوب:

$$W^{-1}\left(X^{(o)}\right)=-\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

حسب العلاقة (2-88) التقريب الأول يكون:

$$X^{(1)} = X^{(o)} - W^{-1}\left(X^{(o)}\right)f\left(X^{(o)}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.25 \\ -1.00 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0 \\ -0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

لنحسب بعد ذلك التقريب الثاني $X^{(2)}$ ، لدينا:

$$f\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix} (0.875)^2 + (0.500)^2 + (0.375)^2 - 1 \\ (2)(0.875)^2 + (0.500)^2 - (4)(0.375) \\ (3)(0.875)^2 - (4).(0.500) + (0.375)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix}$$

$$W\left(X^{(1)}\right)=\begin{bmatrix} (2).(0.875) & (2)(0.500) & (2).(0.375) \\ (4)(0.875) & (2)(0.500) & -4 \\ (6).(0.875) & -4 & (2)(0.375) \end{bmatrix} =;$$

$$=\begin{bmatrix} 1.750 & 1 & 0.750 \\ 3.500 & 1 & -4 \\ 2.250 & -4 & 0.750 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$W\left(X^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 1.750 & 1 & 0.750 \\ 3.500 & 1 & -4 \\ 5.250 & -4 & 0.750 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1.750 & 1 & 0.750 \\ 1.750 & 0 & -4.750 \\ 12.250 & 0 & 3.750 \end{vmatrix} = -64.75 \neq 0$$

ومنه:

$$W^{-1}\left(X^{(1)}\right) = -\frac{1}{64.75}\begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.6250 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix}$$

وبتطبيق العلاقة (2-88) نجد أن:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - W^{-1}\left(X^{(1)}\right)f\left(X^{(1)}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix} + \frac{1}{64.75}\begin{bmatrix} -15.25 & -3.75 & -4.75 \\ -23.625 & -2.6250 & 9.625 \\ -19.25 & 12.25 & -1.75 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.15625 \\ 0.28125 \\ 0.43750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.875 \\ 0.500 \\ 0.375 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.08519 \\ 0.00338 \\ 0.00507 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.78981 \\ 0.49662 \\ 0.36993 \end{bmatrix}$$

وبشكل مشابه نحسب التقريبات التالية:

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.78521 \\ 0.49662 \\ 0.36992 \end{bmatrix} \quad ; \quad f\left(X^{(3)}\right) = \begin{bmatrix} 0.00001 \\ 0.00004 \\ 0.00005 \end{bmatrix}$$

الخ ... وبالتوقف عند التقريب الثالث، نجد:

$$x = 0.7852 \quad , \quad y = 0.4966 \quad , \quad z = 0.3699$$

(لدراسة تسارع تقارب الحل واستقراره ووحدانية ووجود الحل كذلك دراسة الحل بطرق أخرى مثل التقريب المتتالي وطريقة الانحدار وغيرها يمكن العودة إلى المراجع).

(2-12) أصفار كثيرات الحدود: مطلوب

مقدمة: ليكن كثير الحدود من الدرجة n :

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_o$$

إن حساب جذور (أصفار) معادلات كثير الحدود السابق من الدرجة 4,3,2,1 يمكن حسابها بطرق كلاسيكية ولحساب هذه الجذور لدرجات أكبر نستخدم طرق عددية تقريبية تكرارية . سنقدم طريقة هورنر لحساب قيمة كثير حدود من الدرجة n في نقطة $x = a$.

(1-2-12) حساب قيمة كثيرة حدود في نقطة – طريقة هورنر Horner method

هناك طرق كثيرة، مثل طريقة بيرستون وغيره، لحساب قيمة كثيرة حدود في نقطة وقد اخترنا هنا طريقة هورنر التالية : ليكن $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n معلوم والمطلوب قيمة $P_n(x)$ في النقطة ، ليكن $P_n(x)$ معطى بالشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o \qquad (2\text{-}89)$$

لقد كتب هورنر كثيرة الحدود هذه بالشكل:

$$P_n(x) = (\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_o \qquad (2\text{-}90)$$

وهذا يعطي الخوارزمية التراجعية التالية لهورنر :

$$\begin{cases} P_o(x) = a_n \\ P_x(x) = x.P_{k-1}(x) + a_{n-k} \\ \qquad k = 1,\ldots,n \end{cases} \qquad (2\text{-}91)$$

وهذا يستدعي فقط n عملية ضرب و n عملية جمع خلافاً للطريقة الكلاسيكية التي تستدعي (2n-1) عملية ضرب فقط.

لنأخذ مثلاً حالة $P_3(x)$:

$$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

نحتاج هنا إلى خمسة عمليات ضرب.

بينما عندما نكتب $P_3(x)$ بالشكل (2-90):

$$((a_3x+a_2)x+a_1)x+a_o$$

فنحتاج فقط إلى 3 عمليات ضرب فقط و3 عمليات جمع طبعاً.

مثال (25):

ليكن كثير الحدود:

$$P_4(x)=2x^4-5x^3+x^2-7x+6$$

احسب: $P_4(x=2)$ ؟

الحل:

نرتب a_k بشكل تنازلي، عندئذ P_k

ترتب بشكل تصاعدي بالشكل :

$$\begin{array}{llccccc}
(\text{تنازلي})a_k: & & 2 & -5 & 1 & -7 & 6\\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\
(\text{تصاعدي})P_k & & 2 \to & -1 \to & -1 \to & -9 \to & -12
\end{array}$$

ومنه: $P_4(x=2)=-12$

يمكن ترتيب ما سبق أيضاً بجدول والحصول على النتائج السابقة بشكل آلي

كما يلي:

أمثال $P(x)$ تنازلياً :	2	-5	1	-7	6
$X=2$:	_	4	-2	-2	-18
تضرب الناتج	2	-1	-1	-9	$-12=P_4(2)$

حيث قمنا بتنزيل $a_4=2$ كما هي تحت السطر أولاً ثم ضربنا $a_4=2$ بـ $X=2$ ووضعنا الناتج 4 تحت $a_3=-5$ ثم جمعنا $a_3=-5$ مع الناتج السابق 4 وهكذا نتابع بنفس الطريقة.

بشكل عام يمكن ترتيب الجدول السابق كما يلي:

$$
\begin{array}{l|cccccccc}
P(x): & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_o & \\
x=a: & & aa'_n & aa'_{n-1} & \cdots & aa'_2 & aa'_1 & aa' & \\
\hline
 & a'_n & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \cdots & a'_2 & a'_1 & \boxed{a'_o = A_o = P(a)} &
\end{array}
$$

حيث:

$$
\begin{aligned}
a'_n &= a_n \\
a'_{n-1} &= a_{n-1} + aa'_n \\
a'_{n-2} &= a_{n-2} + aa'_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a'_2 &= a_2 + aa'_2 \\
a'_1 &= a_1 + aa'_1 \\
a'_o &= a_o + aa'_1
\end{aligned}
$$

وبمتابعة الجدول السابق بنفس الطريقة، نجد الشكل :

$$
\begin{array}{l|ccccccc}
 & a'_n & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \cdots & a'_2 & a'_1 & \boxed{a'_o = A_o} \\
x=a-- & & aa''_n & aa''_{n-1} & \cdots & aa''_{n-2} & aa''_2 & \\
\hline
 & a''_n & a''_{n-1} & a''_{n-2} & \cdots & a''_2 & \boxed{a''_1 = A_1} &
\end{array}
$$

حيث إن:

$$
\begin{aligned}
a''_n &= a'_n \\
a''_{n-1} &= a'_{n-1} + aa''_n \\
a''_{n-2} &= a'_{n-2} + aa''_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a''_2 &= a'_2 + aa''_{n-2} \\
a''_1 &= a'_1 + aa''_2
\end{aligned}
$$

يمكن البرهان على أنه لدينا:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= P_1(x).(x-a) + A_o \\
P_1(x) &= P_2(x).(x-a) + A_1 \\
P_2(x) &= P_3(x).(x-a) + A_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{n-1}(x) &= P_n(x)(x-a) + A_{n-1} \\
P_n(x) &= A_n
\end{aligned}
$$

وبالتالي :

$$P(x) = A_o + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + \\ + A_n(x-a)^n \qquad (2\text{-}92)$$

يسمى الشكل (2-92) نشر كثير الحدود $P(x)$ حسب طريقة هورنر.

حيث: $A_n, A_{n-1}, \ldots$ يحصل عليها من الجدول السابق (جدول هورنر) بمتابعة العمل بنفس الطريقة التي حصلنا فيها على $A_o, A_1, \ldots$.

الآن بنشر $P(x)$ حسب منشور تايلور في جوار النقطة $x = a$ لدينا:

$$P(x) = P(a) + \frac{(x-a)}{1!}P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a) \quad (2\text{-}93)$$

وبمقارنة نشر هورنر مع منشور تايلور نجد الدستور الرئيسي التالي، الذي يعطي قيمة كثيرة الحدود لـ $P(x)$ ومشتقاتها المتتالية في النقطة $x = a$.

$$A_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(a) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2\text{-}94)$$

أو:

$$P^{(n)}(a) = n!.A_n \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2\text{-}95)$$

مثال (26): في المثال السابق (25) أوجد قيمة كثيرة الحدود ومشتقاته المتتالية في النقطة $x=2$ ؟

$P(x)$:	2	-5	1	-7	6
$x = 2$:	-	4	-2	-2	-18
	2	-1	-1	-9	$-12 = P_4(2) = A_o$
	-	4	6	10	
	2	3	5	$1 = A_1$	
	-	4	14		
	2	7	$19 = A_2$		
	-	4			
	2	$11 = A_3$			
	-				
	$2 = A_4$				

وبإجراء الحسابات على المشتقات المتتالية لـ $P(x)$ نجد أن:

$$P'(2)=1=A_1$$
$$P''(2)=38=2!.A_2$$
$$P^{(3)}(2)=66=3!.A_3$$
$$P^{(4)}(2)=48=4!.A_4$$

مثال (27) باستخدام طريقة هورنر، احسب قيمة $P(x)$ والمشتقات المتتالية لـــ $P(x)$ في النقطة (2-) حيث:

$$P(x)=2x^4-3x^2+3x-4$$

الحل : نرتب جدول هورنر التالي:

	2	0	-3	3	-4
$x_0=-2$	-	-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$\boxed{10=A_0}$
	-	-4	16	-42	
	2	-8	21	$\boxed{-49=A_1}$	
	-	-4	+24		
	2	-12	$\boxed{45=A_2}$		
	-	-4			
	-	$\boxed{-16=A_3}$			
	$\boxed{2=A_4}$				

ومنه:

$$P(-2)=10$$
$$P'(-2)=1!\times A_1=-49$$
$$P''(-2)=2!\times A_2=2\times 45=90$$
$$P^{(3)}(-2)=3!\times A_3=6\times(-16)=-96$$
$$P^{(4)}(-3)=4!\times A_4=24(2)=48$$

مثال (28) : مطلوب

طبق طريقة هورنر لتحويل كثيرة الحدود التالية:

$$P(x)=4x^5+2x^3-3x+4$$

إلى كثيرة حدود بدلالة (x – 2) ثم أوجد قيمة P(x) ومشتقاتها المتتالية من أجل x = 2.

الحل:

لنشكل جدول هورنر أولاً:

P(x) :	4	0	2	0	-3	4
x = 2	-	8	16	36	72	138
	4	8	18	36	69	$142 = A_o$
	-	8	32	100	272	
	4	16	50	136	$341 = A_1$	
	-	8	48	196		
	4	24	98	$332 = A_2$		
	-	8	64			
	4	32	$162 = A_3$			
	-	8				
	4	$40 = A_4$				
	-					
	$4 = A_5$					

ومن هذا الجدول يمكن أن نكتب:

$$P(x)= A_o + A_1(x-2)+ A_2(x-2)^2 + A_3(x-2)^3 +$$
$$+ A_4(x-2)^4 + A_5(x-2)^5 =$$

لدينا أيضاً من دستور المشتقات:

$$P(2)= A_o \times 0!=142\times 1=-142$$
$$P'(2)=A_1 \times 1!= 341\times 1=341$$
$$P''(2)= A_2 \times 2! =332\times 2=664$$
$$P^{(3)}(2)= A_3 \times 3! \;=130\times 6=780$$
$$P^{(4)}(2)= A_4 \times 4! = 40\times 24=960$$
$$P^{(5)}(2)=A_5 \times 5!=4\times 120=480$$

تمارين غير محلولة

1- احسب $\sqrt{43}$ بحل المعادلة $f(x)\equiv x^2-43=0$ مع استخدام: $x_2=43, x_1=0$

وذلك بطريقة التنصيف ثم بطريقة الاستيفاء للاغرانج (القاطع) .

2- احسب $\sqrt{43}$ بحل المعادلة $f(x)\equiv x^2-43=0$ مع $x_0=43$ مستخدماً طريقة نيوتن ثم طريقة بايلي.

3- احسب جذور المعادلة $f(x)=x^3-2x-5=0$ الواقعة ضمن المجال $(2,3)$ وذلك باستخدام طريقة التنصيف ثم بطريقة الاستيفاء.

4- احسب الجذر الحقيقي للمعادلة $f(x)=1-x-2\cos x=0$ مع $x_0=0$ مستخدماً طريقة نيوتن ثم طريقة بايلي.

5- احسب الجذر الحقيقي للمعادلة $f(x)\equiv x^2-e^x-3=0$ مع أخذ $x_0=0$ مستخدماً طريقة نيوتن ثم طريقة بايلي.

6- احسب جذور المعادلة $f(x)\equiv x^3-18=0$ مستخدماً طريقة نيوتن .

7- أوجد التقاطع التربيعي الأول للشكل المعطى بالمعادلتين:

$$f(x,y)=x^2+y^2-9$$

$$g(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-1$$

مستخدماً طريقة نيوتن ثم طريقة نيوتن المعدلة ؟

8- استخدم طريقة نيوتن بدقة 10^{-4} لتقريب الجذور للمعادلات التالية وضمن المجالات المجاورة لكل منها:

a) $x^3-2x^2-5=0 \quad ; \quad [1,4]$

b) $x^3+3x^2-1=0 \quad ; \quad [-4,0]$

c) $x-\cos x=0 \quad ; \quad \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d) $x-0.8-0.2\sin x=0 \quad ; \quad \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

9- أعد المثال السابق من أجل طريقة القواطع للاغرانج.

10- أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $x^3-x-1=o$ في المجال [1,2] بدقة 10^{-5} وذلك بطريقة نيوتن ثم بطريقة القواطع للاغرانج.

11- استخدم طريقة نيوتن ثم طريقة لاغرانج (القواطع) لتقريب الحل، بدقة 10^{-5} للمعادلات:

$$x=\frac{2-e^x+x^2}{3} \quad ; \quad e^x+e^{-x}+2\cos x-6=o$$

$$3x^2-e^x=o \quad ; \quad x^2+10\cos x=o$$

12- اكتب برنامج تيربو باسكال لحساب الجذر التكعيبي لعدد موجب N مستخدماً طريقة نيوتن التقريبية (التكرارية) مع أخذ $x_o=N$ كتقريبي ابتدائي.

13- اكتب برنامج تيربو باسكال لحساب الجذر التكعيبي لعدد موجب N مستخدماً تقريب بايلي التقريبي مع أخذ $x_o=N$ كتقريب ابتدائي.

14- اكتب برنامج لحساب الجذر للمعادلة $f(x) = o$ مستخدماً طريقة التنصيف التكرارية، لاحظ أن الشكل الصريح لـ $f(x)$ يجب أن يعرف في البرنامج.

15- اكتب برنامج تيربو باسكال بطريقة الاستيفاء الخطي العكسي (للاغرانج) لحل المعادلة $f(x) = o$ ، لاحظ أيضاً أن الشكل الصريح لـ $f(x)$ يجب أن يعرف في البرنامج.

16- ابحث عن الجذر الحقيقي لجملة المعادلات:

$$f(x,y)=2x^3-y^2-1=o$$

$$g(x,y)=xg^3-y-4=o$$

$$(x_o,y_o)=(1.2,1.7) \text{ من اجل}$$

18- أوجد جذري جملة المعادلتين الجبريتين التاليتين باستخدام طريقة نيوتن:

$$f(x,y)=x^2+y^2-4=o$$

$$g(x,y)=x.y-1=o$$

$$(x_o,y_o)=(2,o) \text{ من اجل}$$

19- طبق طريقة نيوتن التكرارية لحل المعادلتين غير الخطيتين التاليتين:

$$f(x,y)=x^3y-2x+1=0$$
$$g(x,y)=2xy^2+xy-3=0$$

حيث : $(x_0,y_0)=(1.5,0.75)$

20- أوجد حل الجملة:

$$x+x^2-2yz=0.1$$
$$y-y^2+3xz=-0.2$$
$$z+z^2+2xy=0.3$$

مع أخذ: $X^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

21- حل جملة المعادلات:

$$x^2+y-11=0$$
$$y^2+x-7=0$$

22- حل الجملة:

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$
$$2x^2+y^2-4z=0$$
$$3x^2-4y+z^2=0$$

23- حل الجملة :

$$\sin x-y-0.25=0$$
$$\cos x-x+2.5=0$$

24- حل الجملة:

$$3x-\cos(yz)-\frac{1}{2}=0$$
$$x^2-81(y+0.1)^2+\sin z+1.06=0$$
$$e^{-xy}+20z+\frac{10\pi-3}{3}=0$$

25- حل جملة المعادلات:

$$x_1^2-10x_1+x_2^2+8=0$$
$$x_1x_2+x_1-10x_2+8=0$$

26- حل جملة المعادلات:

$$5x_1^2-x_2^2=0$$
$$x_2-0.25(\sin x_1+\cos x_2)=0$$

27- حل جملة المعادلات:

$$x_1^2+x_2-37=0$$
$$x_1-x_2^2=5$$
$$x_1+x_2+x_3-3=0$$

28- حل جملة المعادلات:

$$2x_1+x_2+x_3-4=0$$
$$x_1+2x_2+x_3-4=0$$
$$x_1x_2x_3-1=0$$

29- حل جملة المعادلات:

$$15x_1+x_2^2-4x_3=13$$
$$x_1^2+10x_2-x_3=11$$
$$x_2^2-25x_3=-22$$

30- أوجد نشر كثيرة الحدود التالية باستخدام طريقة هورنر ثم أوجد قيمتها وقيم مشتقاتها المتتالية من أجل $x = 3$:

$$P(x)=x^5-5x^3+8x-12$$

31- باستخدام طريقة هورنر، حول كثيرة الحدود المتتالية:

$$P(x)=3x^4+2x^2-3x+2$$

إلى كثيرة حدود بدلالة $x-3$ ثم أوجد قيم كثيرة الحدود ومشتقاتها المتتالية في النقطة

32- احسب قيمة كثيرة الحدود التالية: $P(x)=x^5-3x^4+4x^3+2x^2-10x-4$

باستخدام طريقة هورنر وذلك في النقطة $x = 3$ ثم احسب قيم التابع ومشتقاته المتتالية في تلك النقطة.

أمثلة تمارين محلولة

طريقة التنصيف – طريقة نيوتن (المماسات) – طريقة لاغرانج (القاطع)

(1) – بين أن التابع التالي يملك جذراً واحداً في المجال [1,2] ثم قرب هذا الجذر بدقة 10^{-2} مستخدماً طريقة التنصيف:

$$f(x)=x^3-x-1$$

الحل: $x=1.3203125$

(2) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر بدقة 10^{-2} ، للتابع:

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x+4=0$$

على المجالات التالية:

a) [-2,-1] b) [0,2] c) [2,3] d) [-1,0]

(3) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر بدقة 10^{-2} ، للتابع:

$x=\tan x$ في المجال : [4,4.5]

الحل: 4.4921875

(4) : استخدم طريقة التنصيف لحساب جذور المعادلة التالية بدقة 10^{-3}:

$$x^3-7x^2+14x-6=0$$

(5) – استخدم طريقة التنصيف لحساب جذور المعادلات التالية بدقة 10^{-5}:

a) $x-2^{-x}=0 \quad for: \quad 0\le x\le 1$

b) $e^x+2^{-x}+2\cos x-6=0 \quad for: \quad 1\le x\le 2$

c) $e^x-x^2+3x-2=0 \quad for: \quad 0\le x\le 1$

الحل: a) 0.641181946 b) 1.82938385 c) 0.257530212

(6) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر بدقة 10^{-2} ، للمعادلة:

$$x+0.5+2.\cos \pi x=0 \qquad for: \quad 0.5\le x\le 1.5$$

(7) – استخدم طريقة التنصيف لحساب جذور المعادلة التالية بدقة 10^{-4} لحساب $\sqrt[3]{25}$ (اعتبر التابع $f(x)=x^3-25$)

الحل: 2.924011

(8) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر التقريبي لـ $\sqrt{25}$ بدقة 10^{-4}.

(9)– استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر التقريبي الثالث للمعادلة :

$f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ في المجال $[0, 1]$.

الحل: $P_3=0.625$

(10)– استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر بدقة 10^{-2} ، للمعادلة:

$$f(x)=x^3-7x^2+14x-6=0$$

في كل من المجالات الآتية:

a) [0,1]
b) [1,3.2]
c) [3.2,4]

الحل:

a) $P_7=0.5859$
b) $P_8=3.002$
c) $P_7=3.419$

(11) – كم عدد التقريبات المطلوبة لحل المعادلة التالية بدقة 10^{-4} (احسب هذه التقريبات). $x^3-x-1=0 \qquad for: \quad 1\le x\le 2$

الحل : 14 تقريب والحل هو: 1.324768

(12) – استخدم طريقة التنصيف لحل المعادلة:

$$f(x)=\frac{4x-7}{(x-2)^2}=0 \qquad for: \quad 1\le x\le 2$$

في المجال: [1.2,2.2] وكذلك في المجال [1.5,2.5]

(13) – استخدم طريقة القاطع (لاغرانج) لحل المعادلة:

$$f(x)=\cos x-x=0$$

حيث: $x_0=0.5$ و كذلك من أجل: $x_0=\pi/4$

(14) - استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-4} لحساب جذور المعادلات التالية:

a) $x^3-2x^2-5=0 \quad for: \ [1,4]$

b) $x^3+3x^2-1=0 \quad for: \ [-4,0]$

c) $x-\cos x=0 \quad for: \ [0,\pi/2]$

d) $x-0.8-0.2\sin x=0 \quad for: \ [0,\pi/2]$

الحل:

a) $x_0=2.5 \quad : \quad x_3=2.6906475$

b) $x_0=-1 \quad : \quad x_3=-0.65270365$

$x_0=-4 \quad : \quad x_3=-2.8793852$

c) $x_0=0.7854 \quad : \quad x_2=0.7390851$

d) $x_0=0.7854 \quad : \quad x_2=0.9643339$

(15) - أعد السؤال السابق مستخدماً طريقة القاطع للاغرانج.

(16) - استخدم طريقة نيوتن (المماسات) ثم طريقة لاغرانج (القاطع) بدقة 10^{-5} لحساب جذور المعادلات التالية: $x^3-x-1=0$ على المجال $[1,2]$.

الحل :

طريقة نيوتن: $x_0=1 \quad : \quad x_4=1.324718$

طريقة لاغرانج: $x_0=1 \quad : \quad x^1=2, \quad x_7=1.324717$

(17) - استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-5} لحساب جذور المعادلات التالية:

a) $x=\dfrac{2-e^x+x^2}{3}$; c) $e^x+e^{-x}+2\cos x-6=o$

b) $3x^2-e^x=o$; d) $x^2+10\cos x=o$

(18) - أعد السؤال السابق مستخدماً طريقة القاطع للاغرانج.

الحل :

a) $x_0=0 \quad : \quad x_1=1 \quad : \quad x_4=0.2575305$

b) $x_0 = 1.5$: $x_1 = 2$: $x_6 = 0.910076$

$x_0 = -1$: $x_1 = 0$: $x_7 = -0.4589622$

c) $x_0 = 1.5$: $x_1 = 2$: $x_6 = 1.829384$

d) $x_0 = 1.5$: $x_1 = 2$: $x_5 = 1.968873$

$x_0 = 3$: $x_1 = 4$: $x_7 = 3.16195$

(19) – استخدم طريقة نيوتن (المماسات) ثم طريقة لاغرانج (القاطع) بدقة 10^{-4}

لحساب جذور المعادلة التالية: $4\cos x = e^x$ مستخدماً:

– في طريقة نيوتن القيمة: $x_0 = 0$

– في طريقة لاغرانج: $x_1 = \pi/2$; $x_0 = \pi/4$

(20) – استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-5} لحل المعادلة التالية:

$(\sin x - \frac{x}{2})^2 = 0$ حيث $x_0 = \pi/2$.

الحل:

$x_0 = \frac{\pi}{2}$: $x_{15} = 1.895486$: $x_{19} = 1.895487$

(21) – استخدم طريقة نيوتن ثم طريقة القواطع لحساب الجذر التقريبي لـ $\sqrt{3}$

بدقة 10^{-4}. استخدم في طريقة نيوتن $x_0 = 2$.

(22) – التابع التالي: $f(x) = (4x-7)(x-2)$ يملك صفراً عند النقطة $x = 1.75$

استخدم طريقة نيوتن لحل هذه المعادلة من أجل الحالات الآتية:

$a)$ $x_0 = 1.625$: $b)$ $x_0 = 1.875$

$d)$ $x_0 = 1.95$: $c)$ $x_0 = 1.5$

الحل:

a) $x_5 = 1.75$: b) $x_5 = 1.75$: c) $x_1 = 2$: d) $x_7 = 1.75$

(23) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر التقريبي الثالث للمعادلة:

$f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ في المجال $[0,1]$.

الحل: $P_3 = 0.625$.

(24) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر التقريبي الثالث للمعادلة:

$$f(x)=3(x+1)+(x-\tfrac{1}{2})(x-1)=0$$

في كل من المجالات الآتية :

a) [-2,1.5]   :   b) [-1.25,2.5]

(25) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر التقريبي بدقة 10^{-2} للمعادلة:

$$f(x)=x^3-7x^2+14x-6=0$$

في كل من المجالات الآتية :

a) [0,1]   :   b) [1,3.2] :   c) [3.2,4]

الحل: $a)\quad p_7=0.5859 \qquad b)\quad p_8=3.002 \qquad c)\quad p_7=3.419$

(26) – استخدم طريقة التنصيف لحساب الجذر بدقة 10^{-3} ، للمعادلة:

$$f(x)=2+\cos(e^x-2)-e^x=0$$

على المجال:[0.5,1.5] .

(27) – أوجد باستخدام طريقة نيوتن x_2 للمعادلة $f(x)=x^2-6=0$ حيث $x_0=1$.

الحل: $x_2=2.60714$

(28) – أوجد باستخدام طريقة نيوتن x_2 للمعادلة $f(x)=-x^3-\cos x=0$ حيث $x_0=-1$.

(29) – أوجد باستخدام طريقة القاطع للاغرانج x_3 للمعادلة

$f(x)=-x^3-\cos x=0$ حيث $x_1=2$: $x_0=3$.

الحل: $x_3=2.45454$

(30) – استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-4} لحساب جذور المعادلات التالية في المجالات المجاورة لكل منها:

a) $x^3-2x^2-5=0 \qquad for:\ [1,4]$

b) $x^3+3x^2-1=0 \qquad for:\ [-3,-2]$

c) $x - \cos x = 0 \qquad for: \quad [0, \pi/2]$

d) $x - 0.8 - 0.2\sin x = 0 \qquad for: \quad [0, \pi/2]$

الحل:

a) $x_0 = 2 \quad : \quad x_5 = 2.69065$

b) $x_0 = -3 \quad : \quad x_3 = -2.87939$

c) $x_0 = 0 \quad : \quad x_4 = 0.73909$

d) $x_0 = 0 \quad : \quad x_3 = 0.96434$

(31) – أعد السؤال السابق باستخدام طريقة القاطع للاغرانج.

الحل:

a) $x_{11} = 2.69065$

b) $x_7 = -2.87939$

c) $x_6 = 0.73909$

d) $x_5 = 0.96433$

(32)-استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-5} لحساب جذور المعادلات التالية في المجالات المجاورة لكل منها:

a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0 \qquad for: \quad [1,3]$

b) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0 \qquad for: \quad [1.3,2]$

c) $2x\cos 2x - (x-2)^2 = 0 \qquad for: \quad 2 \le x \le 3 \quad and \quad 3 \le x \le 4$

d) $(x-2)^2 - \ln(x) = 0 \qquad for: \quad 1 \le x \le 2] \quad and \quad e \le x \le 4$

e) $e^x - 3x^2 = 0 \qquad for: \quad [0,1] \quad and \quad [3,5]$

f) $\sin x - e^{-x} = 0 \qquad for: \quad [0,1] \quad , \quad [3,5] \quad and \quad [6,7]$

(33) – أعد السؤال السابق باستخدام طريقة القاطع للاغرانج.

(34)-استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-5} لحل المعادلة التالية، حيث

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x^2 - x\sin x - \tfrac{1}{2}\cos 2x = 0 \qquad : x_0 = \pi/2$$

(35)- حل التمرين السابق من أجل : $x_0 = 5\pi$ و $x_0 = 10\pi$.

(36) – استخدم طريقة نيوتن ثم طريقة القواطع لحساب الجذر التقريبي بدقة 10^{-6} في المجالين [0,1-],[0,1].

الحل: طريقة القاطع –

$x_1 = 0, \quad x_0 = -1 \quad : \quad x_5 = -0.04065929$

ومن أجل: $x_1 = 1, \quad x_0 = 0$ لدينا: $x_{12} = -0.04065929$

طريقة نيوتن –

من أجل: $x_0 = -0.5$ لدينا: $x_5 = -0.04065929$

ومن أجل: $x_0 = 0.5$ لدينا: $x_{21} = 0.9623989$

(37) – التابع $f(x) = \tan \pi x - 6$ يملك جذراً عند النقطة $\frac{1}{\pi}\arctan 6 \approx 0.447431543$ لتكن $x_1 = 0.48, \quad x_0 = 0$. استخدم طريقة التنصيف وطريقة القاطع لتقريب الجذر.

(38)-المعادلة التالية $x^2 - 10\cos x = 0$ تملك صفران : ± 1.3793646 استخدم طريقة نيوتن (المماسات) لتقريب الحل بدقة 10^{-5} مع أخذ القيم الابتدائية كما هو مبين بجوار كل منها:

$a) \quad x_0 = -100 \quad : \quad b) \quad x_0 = -50$

$c) \quad x_0 = -25 \quad : \quad d) \quad x_0 = 25$

$e) \quad x_0 = 50 \quad : \quad f) \quad x_0 = 100$

(39)- أعد التمرين السابق بطريقة لاغرانج من أجل: $x_1 = \pi/4 \quad : \quad x_0 = 1/2$

(40) – استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-4} لحساب جذور المعادلات التالية في المجالات المجاورة لكل منها:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

c) $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

d) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

e) $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

f) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$

الحل:

$$\begin{aligned}
&a) \quad x_0 = 1 &&: \quad x_{22} = 2.69065\\
&b) \quad x_0 = 1 &&: \quad x_5 = 0.53209\\
&\quad\;\; x_0 = -1 &&: \quad x_3 = -0.65270\\
&\quad\;\; x_0 = -3 &&: \quad x_3 = -2.87939\\
&c) \quad x_0 = 1 &&: \quad x_5 = 1.32472\\
&d) \quad x_0 = 1 &&: \quad x_4 = 1.12412\\
&\quad\;\; x_0 = 0 &&: \quad x_8 = -0.87605\\
&e) \quad x_0 = 0 &&: \quad x_4 = 1.12412\\
&\quad\;\; x_0 = 0 &&: \quad x_8 = -0.87605\\
&f) \quad x_0 = 0 &&: \quad x_6 = 0.47006\\
&\quad\;\; x_0 = -1 &&: \quad x_4 = -0.88533\\
&\quad\;\; x_0 = -3 &&: \quad x_4 = -2.64561
\end{aligned}$$

(41) - استخدم طريقة نيوتن (المماسات) بدقة 10^{-5} لحساب جذور المعادلات التالية:

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136 = 0$

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40 = 0$

c) $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$

d) $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5 = 0$

e) $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240 = 0$

f) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$

g) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$

h) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$

(42) - استخدم طريقة التنصيف ثم طريقة نيوتن ثم طريقة القاطع لحل المعادلة:

$$f(x) = 600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0$$

وذلك بدقة 10^{-4} في المجال $[0.1,1]$.

الحل: جميع الطرق الإجابة 0.23235

(43) : استخدم طريقة نيوتن (المماسات) لحل المعادلة :

$$f(x)=x^3-3x-5=o$$

بدقة 0.001 مع أخذ التقريب الأول $x_1=3$.

الحل:

لدينا: $$f'(x)=3x^2-3$$

وبالتالي العلاقة: $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

تأخذ الشكل: $$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-3x_n-5}{3x_n^2-3}$$

ومنه نجد :

$$x_2=3-\frac{27-9-5}{27-3}=3-\frac{13}{24}=2.46$$

$$x_3=2.46-\frac{14.89-7.38-5}{18.16-}=2.46-0.165=2.295$$

$$x_4=2.95-\frac{12.088-6.885^{-5}}{15.801-3}=2.295-0.016=2.279$$

$$x_5=2.279-\frac{11.837-6.807-5}{15.582-3}=2.279$$

وبالتالي نجد أنه بدقة 0.001 فإن $x_4=x_5$.

إذن جذر هذه المعادلة هو 2.279 بدقة 0.001 .

الجدول التالي يبين خطوات الحل – التقريبات المتتالية للحل:

x_i	$f(x_i)$
5.0	120.0
3.400	34.304
2.4108	9.011466
1.89365	1.793848
1.727271	0.153253
1.710149	0.001519
1.7099759	- 0.00000041
1.7099759	- 0.00000041

الفصل الثالث

الطرائق العددية لحل جملة المعادلات الجبرية الخطية وتعيين القيم الذاتية (الخاصة)

من هنا إلى ص ١١٩ محذوف

مقدمة:

إن جمل المعادلات الخطية الموافقة لعدد من المسائل في العلوم التطبيقية والهندسية وكذلك في العلوم الاجتماعية والعلوم الاقتصادية تعطى كما هو معلوم بشكل عام بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$A.X = B \tag{3-1}$$

في هذا الفصل سيتم دراسة جمل المعادلات الخطية ذات الشكل العام السابق والتي تكتب بشكل مفصل كما يلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3-2}$$

من أجل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجهول ، تكون الثوابت b_i, a_{ij} معلومة ، حيث: $i, j = 1,2,\ldots,n$.

هناك طرائق جبرية مباشرة لحل هذه المجموعة من المعادلات ، مثل طريقة كرامر وغيرها من الطرائق المباشرة التي تستخدم مقلوب المصفوفات في الحل والتي درست في مقررات أخرى، وهذه الطرق عادة طويلة ولذلك تم إدخال طرائق تقريبية أخرى للحل مثل طريقة الحذف لغوص وطريقة غوص – جوردان وهي طرائق لاتحتاج لتكرارات لإيجاد الحل (ولذلك تسمى طرائق عددية مباشرة) وهناك طرائق (تعرف باسم طرائق تقريبية غير مباشرة) تحتاج لتكرارات عديدة للوصول إلى الحل التقريبي مثل طريقة جاكوبي، وطريقة غوص – سايدل وطريقة الاسترخاء وغيرها من الطرائق العددية.

وسنبدأ قبل دراسة الطرائق العددية التكرارية (غير المباشرة) بالتذكير ببعض من هذه الطرائق (المباشرة):

(3-1) طريقة المحور Pivot أو طريقة غوص – جوردان Gauss – Jordan

هذه إحدى الطرائق المباشرة المستخدمة بكثرة، وسيتم عرضها من خلال مجموعة أربعة معادلات خطية بأربعة مجاهيل:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= y_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= y_4 \end{aligned} \tag{3-3}$$

والتي تكتب بشكل مصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

إن طريقة كرامر تستخدم عادة المحددات $x_j = \Delta j / \Delta$

حيث Δ هو المحدد للمصفوفة السابقة و Δi هو محدد المصفوفة السابقة بعد استبدال العمود j بعمود الطرف الأيمن في (3-4).

إن عدد العمليات اللازمة بهذه الطريقة هو من مرتبة n^4 حيث n هو رتبة مصفوفة جملة المعادلات.

إن طريقة المحور ، تسمى أيضاً طريقة غوص – جوردان Gauss – Jordan توضح كما يلي:

نختار بشكل متتالي كل سطر كسطر محور ، المحور يكون هو أول عنصر غير معدوم من السطر وبالتالي:

1- نقسم السطر الأول من (3-4) على a_{11} وهذا يعطي:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}5)$$

لنعدم الحد الأول لكل من السطور الأخرى :

في السطر الثاني ، لنطرح السطر الأول مضروباً بـ a_{21}

في السطر الثالث ، لنطرح السطر الأول مضروباً بـ a_{31}

في السطر الرابع ، لنطرح السطر الأول مضروباً بـ a_{41}

وهذا يعطي:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}6)$$

2- لنأخذ الآن السطر الثاني كسطر محور و a'_{22} عنصر المحور. ونكرر على السطر الثاني العمليات السابقة التي أجريت على السطر الأول، أي لنقسم السطر الثاني على a'_{22} وهذا يعطي:

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y''_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}7)$$

ولنعدم بقية الحدود من العمود الثاني، ولذلك:

في السطر الأول ، لنطرح منه السطر الثاني بعد ضربه بـ a'_{12}

في السطر الثالث ، لنطرح منه السطر الثاني بعد ضربه بـ a'_{32}

في السطر الرابع ، لنطرح منه السطر الثاني بعد ضربه بـ a'_{42}

وهذا يعطي الجملة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & a''_{14} \\ 0 & 1 & a''_{23} & a''_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{bmatrix} \tag{3-8}$$

3- لنأخذ بعد ذلك السطر الثالث كمحور ثم الرابع فنحصل أخيراً على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{IV} \\ y_2^{IV} \\ y_3^{IV} \\ y_4^{IV} \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

ومنه نجد:

$$x_1 = y_1^{IV}$$

$$x_2 = y_2^{IV} \quad , \quad x_3 = y_3^{IV} \quad , \quad x_4 = y_4^{IV}$$

والآن سنقوم بتفصيل هذه الطريقة بالشكل التالي:

(3-1-1) إجراءات – طريقة غوص – جوردان:

لنفرض أن لدينا بشكل عام جملة المعادلات الخطية مكتوبة بشكل مصفوفات:

$$Ax = y \tag{3-10}$$

ولنطبق الطريقة السابقة فنحصل في الخطوة الأولى على المصفوفة A_1 تحتوي على أصفار "0" وواحدات "1" في عمودها الأول، وفي الخطوة الثانية نحصل على المصفوفة A_2 تحوي على أصفار وواحدات أيضاً في عموديها الأول والثاني وهكذا ... في الخطوة رقم K نحصل على الجملة:

$$A^{(K)} X = Y^{(K)} \tag{3-11}$$

حيث: $A^{(K)} = \left[a_{ij}^{(K)}\right]$

ومصفوفة العمود $= Y^{(K)}$

ذات العناصر $y_i^{(K)}$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(K)} = 1 \quad \text{if} : i = j \le K \\ a_{ij}^{(K)} = o \quad \text{if} : i \ne j \, ; \, j \le K \\ Y^{(K)} = \end{cases}$$

(K أول عنصر قطري)

(عمود 1 إلى K عناصر غير قطرية)

(شعاع مركبته رقم i هي $y_i^{(K)}$)

الخطوة التالية تعتمد على أخذ العنصر $a^{(K)}_{K+1,K+1}$ كعنصر محور: نقسم السطر رقم K+1 على هذا العنصر ، وهذا يعطي من أجل $j = K+1,\dots,n$

$$\begin{cases} a'_{ij} = a^{(K)}_{ij} \quad , \quad y'_i = y^{(K)}_i \qquad \text{if} \ : \ i \neq K+1 \\ a'_{K+1,j} = a^{(K)}_{K+1,j} \ \ / \ \ a^{(K)}_{K+1,K+1}, \quad y'_{K+1} = y^{(K)}_{K+1} \ \ / \ \ a^{(K)}_{K+1,K+1} \end{cases} \tag{3-12}$$

بعد ذلك من أجل كل سطر $i \neq K+1$ نطرح السطر رقم $K+1$ بعد ضربه بـ $a^{(K)}_{i,K+1}$ وهذا يعطي:

$$\begin{cases} a^{(K+1)}_{i,j} = a^{(K)}_{ij} - a^{(K)}_{i,K+1}\, a'_{K+1,j} & (3-13a) \\ y^{(K+1)}_i = y^{(K)}_i - a^{(K)}_{i,K+1}\, y'_{K+1} & (3-13b) \end{cases}$$

نلاحظ من العلاقات السابقة (3-12) و (3-13b) أن العلاقات بالنسبة لـ y هي نفسها بالنسبة لـ a : وبالتالي نحصل على العلاقات بالنسبة لـ y بوضع:

$$y^{(K)}_i = a^{(K)}_{i,n+1}$$

إذاً بالنسبة لـ a يكفي لجعل j يتغير من $K+1$ إلى $n+1$ بدلاً من $K+1$ إلى n.

ولنعوض في (3-13a) قيم الـ a' من (3-12) فنحصل أخيراً على الإجراء التالي:

$$A^{(o)} = A \ , \ a^{(o)}_{i,n+1} = y_i$$

من أجل: $K = o \ , \dots, n-1$

$$\left.\begin{array}{l} i = K+1 \\ j = K+1 \rightarrow n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{(K+1)}_{k+1,j} = a^{(K)}_{K+1,j} \ / \ a^{(K)}_{K+1,K+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} i = 1 \rightarrow 1 \\ i \neq K+1 \\ j = K+1 \rightarrow n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{(K+1)}_{i,j} = a^{(K)}_{ij} - a^{(K)}_{i,K+1} . a^{(K+1)}_{K+1,j} \tag{3-14}$$

$$x_i = a^{(n)}_{i,n+1}$$

إن صعوبة هذه الطريقة تكمن في أنه في كل خطوة نقسم السطر على عنصر المحور. وهذا غير ممكن إذا كان العنصر معدوماً وكذلك عندما يكون عنصر المحور صغيراً جداً لأن خطأ التدوير سيكون نسبياً كبيراً ويؤثر في كل الخطوات اللاحقة.

يمكننا كتابة خطوات خوارزمية طريقة غوص – جوردان بالشكل:

1- إدخال بعدي المصفوفة الموسعة M , N

2- قراءة عناصر المصفوفة الموسعة.

3- ضمن حلقة من $k = 1(1)\, n$

- البحث عن عنصر الـ Pivot
- في حالة وجوده في أحد الأسطر يجب مبادلة السطرين بكاملهما.
- تنظيم سطر الـ Pivot
- تطبيق خطوات الحذف الغوصي.

4- ضمن حلقة من $i = 1(1)n$ ضع $X[i] := a[I,M]$

(3-2) طريقة غوص:

تعتمد على جعل المصفوفة A مثلثية بدلاً من قطرية (كما هي في الطريقة السابقة لغوص – جوردان) . في كل خطوة بدلاً من إظهار الأصفار في كل عمود لاتظهرها إلا تحت القطر وهذا يلغي كثير من الحسابات من الطريقة السابقة . ينتج تعديلين على المعادلات (3-14):

i يتغير من $n \leftarrow K+1$

وليس من $n \leftarrow 1$

وكون $A^{(n)}$ مثلثية يستدعي خطوة إضافية للحصول على الـ x_i :

1- الخطوة الأولى: تثليث المصفوفة A:

$$A^{(o)} = A \quad , \quad a^{(o)}_{i,n+1} = y_i$$

من أجل $n-1 \leftarrow K = o$

$$\left.\begin{array}{l} i = K+1 \\ j = K+1 \rightarrow n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{(K+1)}_{K+1,j} = a^{(K)}_{K+1,j} / a^{(K)}_{K+1,K+1} \qquad (3\text{-}15)$$

$$\left.\begin{array}{l} i=K+2\rightarrow n \\ j=K+1\rightarrow n+1 \end{array}\right\}\Rightarrow a_{ij}^{(K+1)}=a_{ij}^{(K)}-a_{i,K+1}^{(K)}.a_{K+1,j}^{(K+1)}$$

الخطوة الثانية:

حل الجملة المثلثية : في نهاية الخطوة الأولى ، نحصل على مصفوفة مثلثية نكتبها (لتبسيط الرموز) بالشكل: $A^{(n)}=R=\left[r_{ij}\right]$

يجب إذن حل الجملة:

$$\begin{aligned} x_1+r_{12}x_2+\ldots+r_{1,n-1}x_{n-1}+r_{1n}x_n&=z_1 \\ x_2+\ldots+r_{2,n-1}x_{n-1}+r_{2n}x_n&=z_2 \\ x_{n-1}+r_{n-1,n}x_n&=z_{n-1} \\ x_n&=z_n \end{aligned} \tag{3-16}$$

حيث $z_i=a_{i,n+1}^{(n)}$

ونحصل بشكل متتالي على:

$$x_n, x_{n-1},\ldots,x_1 Z$$

$$x_n=z_n$$

$$x_j=z_j-\sum_{K=j+1}^{n}\left(r_{jk}x_k\right) \tag{3-17}$$

$$j=n-1\rightarrow 1$$

عدد العمليات اللازم لطريقة غوص، مع عدد العمليات اللازمة لحل الجملة المثلثية، هو $n^3/3$ (إذا $n\geq 10$).

ومن أجل جمل المعادلات الكبيرة فإن سرعته تتضاعف 1.5 مرة عن طريقة غوص – جوردان.

وبالتالي فهي أفضل في الاستخدام ويمكن استخدام طريقة غوص – جوردان عندما يكون عدد معادلات الجملة ليس كبيراً جداً.

إن طريقة غوص لها نفس المصاعب في طريقة غوص – جوردان عندما يكون المحور معدوماً أو صغيراً جدا ، وهنا نعود لإجراء تبديل في الأسطر.

(3-3) **حالة المصفوفات الحزمية:**

لنعتبر كمثال مصفوفة مثلثية بثلاثة عناصر:

نكتب مجموعة المعادلات بالشكل المصفوفاتي:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & . & \cdots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}18)$$

إن المرور من ترميز بدليل مضاعف إلى ترميز بدليل واحد بسيط يبين أن المصفوفة توصف بـ 3n معطيات: $\{a_1, a_2, ..., a_n\}, \{b_1, b_2, ..., b_n\}, \{c_1, c_2, ..., c_n\}$

حيث $a_1 = c_n = o$

إن المزية الرئيسية للمصفوفات الحزمية هي إشغال مكان في الذاكرة مخفض أكثر منه للمصفوفات العادية . وهذا يعد كسباً معتبراً لجملة المعادلات ذات الحجم الكبير (العدد الكبير).

لنحل هذه المجموعة باستخدام طريقة غوص (ثلاثية القطر) وليس لـ غوص – جوردان لأن هذه الأخيرة تعمل لإظهار عناصر غير معدومة، في خطوات العمل ، وأماكن حيث توجد أصفار في المصفوفة الابتدائية: يجب في هذه الحالة إذن استخدام جدول n × n ، وفقدان محاسن أساسية للمصفوفات الحزمية.

مثال-1- : حل الجملة التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \qquad &= -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_3 - 3x_4 &= 13 \end{aligned} \qquad (3\text{-}19)$$

أعطينا أعلاه المصفوفات:

$$A^{(K)}=\{a_{ij}^{(K)}\}(i=1\rightarrow n\,,\,j=1\rightarrow n+1)$$

مجملين معه حدود الطرف الثاني $a_{i,n+1}^{(K)}$ التي نحصل عليها بالطريقتين :

1- طريقة غوص:

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0 & 7/2\\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2\\ 0 & 6 & -2 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0 & 7/2\\ 0 & 1 & -6 & 0 & -27\\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13\end{bmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0 & 7/2\\ 0 & 1 & -6 & 0 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 1/34 & 169/34\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=3\\ x_3=5\\ x_4=-1\end{cases}\qquad (3\text{-}20)$$

2- طريقة غوص – جوردان:

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0 & 0 & 7/2\\ 0 & 1/2 & -3 & 0 & -27/2\\ 0 & 6 & -2 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13\end{bmatrix},\;A^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0 & 7/2\\ 0 & 1 & -6 & 0 & -27\\ 0 & 0 & 34 & 1 & 169\\ 0 & 0 & 2 & -3 & 13\end{bmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -3/34 & 71/34\\ 0 & 1 & 0 & 3/17 & 48/17\\ 0 & 0 & 1 & 1/34 & 169/34\\ 0 & 0 & 0 & -52/17 & 52/17\end{bmatrix}$$

$$A^{(4)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه في المصفوفة $A^{(2)}$ تظهر طريقة غوص – جوردان عناصر غير معدومة حيث كانت في الأصل معدومة.

ملاحظة-I- :

يمكن استخدام جدول يبسط طريقة غوص ، ولكتابة هذا الجدول سنأخذ جملة جبرية مؤلفة من ثلاثة معادلات ذات ثلاثة مجاهيل من الشكل:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_{34} \end{aligned} \tag{3-21}$$

نقسم المعادلة الأولى على a_{11} بشرط أن $a_{11} \neq o$ وإلا نبدل بين معادلات الجملة فتصبح المعادلة الأولى بالشكل:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}$$

حيث إن:

$$b_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad ; \quad j > 2$$

ونكون بذلك قد حصلنا على جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= a_{34} \end{aligned} \tag{3-21'}$$

الآن لحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة نضرب المعادلة الأولى بـ a_{21} و a_{31} على التوالي ثم نطرح النواتج من المعادلة المقابلة في جملة المعادلات الأخيرة فنحصل على جملة معادلات جديلة من معادلتين بمجهولين:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= a_{34}^{(1)} \end{aligned} \tag{3-22}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j}$$

وكما سبق نقسم المعادلة الأولى من هاتين المعادلتين على $a_{22}^{(1)}$ مع فرض أنه غير معدوم فنحصل على المعادلة:

$$x_2 = b_{23}x_3 = b_{24}$$

حيث إن :

$$b_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad ; \quad j \geq 3$$

وبالتالي تصبح المعادلتين الأخيرتين بالشكل :

$$x_2 + b_{23}x_3 = b_{24}$$
$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)}$$

نحذف x_2 من هذه الجملة بنفس الطريقة السابقة عندما حذفنا x_1 فنحصل على المعادلة:

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}$$

حيث إن: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j} \qquad i, j \geq 3$

وبتقسيم آخر معادلة على $a_{33}^{(2)}$ مع فرض أن : $a_{33}^{(2)} \neq o$ نحصل على معادلة ذات مجهول واحد: $x_3 = b_{34}$

وحيث إن:

$$b_{3j} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad ; \quad j \geq 4$$

مع فرض أن: $a_{33}^{(2)} \neq o$

وبالتالي نكون أخيراً قد حصلنا على مجموعة المعادلات الخطية الجبرية المكافئة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= b_{14} \\ x_2 + b_{23}x_3 &= b_{24} \\ x_3 &= b_{34} \end{aligned} \tag{3-23}$$

إن حل هذه الجملة أسهل من حل الجملة الأصلية وتحل بشكل تراجعي حيث نحسب أولاً x_3 ثم x_2 ثم x_1 .

الآن نرتب الحل في جدول من أجل جملة مؤلفة من ثلاثة معادلات وذلك بوضع نتائج كل خطوة على حدة.

مع ملاحظة أن الحقل الأخير في هذا الجدول يتضمن حساب المجاهيل بدءاً من x_3 بشكل تراجعي ثم x_2 ثم x_1 وأن القيم $\bar{x}_i$ تحسب بنفس الطريقة التراجعية التي يتم فيها حساب x_i ولكن بالاستعاضة عن b_{13} بـ b_{14} مع ملاحظة أننا أضفنا العمود الأخير الذي يمثل مجموع القيم الموجودة في نفس السطر وعلى يسار تلك القيم الموجودة في هذا العمود. ويمكن توضيح ذلك أيضاً بالشكل التالي:

x_1	x_2	x_3	R.S	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$
	1	b_{23}	b_{24}	B_{25}
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$
		1	b_{34}	b_{35}
		1	x_3	$\bar{x}_3$
	1		x_2	$\bar{x}_2$
1			x_1	$\bar{x}_1$

نضع أولاً أمثال جملة المعادلات في الجدول ثم نجمع كل سطر ونضع النتائج في العمود الأخير وهذا كاختبار للحل ثم نبدأ بتقسيم السطر الأول على أول قيمة فيه على اليسار ونقوم بحساب أمثال مجموع المعادلتين ونتابع العمل حتى نهاية الجدول.
وهكذا نرى من الجدول أن:

$$\bar{x}_i = x_i + 1$$

والرمز $\sum$ في هذا الجدول نعني به القيم الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلات (الثوابت) وفيما يلي هذا الجدول من أجل مجموعة مؤلفة من ثلاثة معادلات حيث إن العمود الأخير يمثل مجموع القيم التي على اليمين في نفس السطر وتحسب تماماً كبقية الأعداد وهي تعتبر اختباراً للحل.

مثال (2)

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غوص :

$$\begin{cases} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 = 6.68 \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 = 9.95 \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 = 8.6 \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 = 1 \end{cases}$$

لنرتب الحل في الجدول التالي:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S الحدود الثابتة	Σ
7.9	5.6	5.7	-7.2	6.68	18.68
8.5	-4.8	0.8	3.5	9.95	17.95
4.3	4.2	-3.2	9.3	8.6	23.2
3.2	-1.4	-8.9	3.3	1	-2.8
1	0.70886	0.72152	-0.91139	0.84557	2.36456
	-10.82531	-5.33292	11.24682	2.76265	-2.14876
	1.15190	-6.30254	13.21898	4.96405	13.03239
	-3.66	-11.20886	6.21645	-1.70582	-10.36658
	1	0.49263	-1.03894	-0.25520	0.19849
		-6.87000	14.41573	5.25801	12.80374
		-9.40172	2.40525	-2.64198	-9.63845
		1	-2.09836	-0.76536	-1.86372
			-17.32294	-9.83768	-27.16062
			1	0.56790	1.56790
			1	0.56790	1.56790
		1		0.42630	1.42630
	1			0.12480	1.12480
1				0.96710	1.96710

مطلوب ✗

مثال (3) طريقة غوص

حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غوص:

$$6x_1 - x_2 - x_3 = 11.33$$
$$-x_1 + 6x_2 - x_3 = 32$$
$$-x_1 - x_2 + 6x_3 = 42$$

محسناً الجذر حتى الدقة 10^{-4}

الحل:

يمكن ترتيب الحل بطريقة غوص مستخدمين ترتيب الحل بالجدول التالي:

الطريقة بنفس طريقة غوص المعروفة حل جملة المعادلات

قسمنا ع 6

نجمع ونضع الجواب

نجمع ونضع الجواب

x_1	x_2	x_3	الحدود الثابتة	Σ R.S
6	-1	-1	11.33	15.33
-1	6	-1	32	36
-1	-1	6	42	46
1	-0.167	-0.167	1.89	2.56
	5.83	-1.17	33.9	38.6
	-1.17	5.83	43.9	48.6
	1	-0.200	5.80	6.60
		5.60	50.7	56.3
		1	9.05 9.0475	10.05
	1		7.62 7.6189	8.62
1			4.67 4.6661	

مثال (4) طريقة الحذف لغوص مطلوب ✗

حل جملة المعادلات:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4$$

الحل:

نكتب الجملة بالشكل:

طالوب

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & : & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & : & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \end{bmatrix}$$

نرقم الأسطر كما هو موضح أعلاه بـ E_1, E_2, E_3, E_4 على الترتيب:

وبإجراء التحويلات التالية:

$$(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$$
$$(E_3 - E_1) \rightarrow (E_3)$$
$$(E_4 - E_1) \rightarrow (E_4)$$

تكتب الجملة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & : & 12 \end{bmatrix}$$

نبدل السطرين E_2 مع E_3 بسبب أن عنصر المحور معدوم في E_2 فتصبح الجملة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & : & 12 \end{bmatrix}$$

لنجري التحويل: $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$

فتصبح مصفوفة الجملة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & : & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض بالتراجع نجد الحل:

$$x_4 = 2 \quad , \quad x_3 = 2, x_2 = 3 \quad , \quad x_1 = -7$$

من هنا إلى ص ١٣٩ محذوف
١٣٩

مثال (5): (توضيح خطأ التدوير)

لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$15.0x_1 + 15.0x_2 + 14.0x_3 = 58.0$$
$$15.0x_1 + 14.0x_2 + 13.0x_3 = 55.0$$
$$14.0x_1 + 13.0x_2 + 12.0x_3 = 51.0$$

لتوضيح خطأ التدوير في طريقة غوص – جوردان:

إن مصفوفة الجملة:

$$A = \begin{bmatrix} 15.0 & 15.0 & 14.0 & 58.0 \\ 15.0 & 14.0 & 13.0 & 55.0 \\ 14.0 & 13.0 & 12.0 & 51.0 \end{bmatrix}$$

إن خطوات غوص – جوردان هي:

-1

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.933333 & 3.866667 \\ 0.0 & -1.0 & -0.999995 & -3.000005 \\ 0.0 & -1.0 & -1.066662 & -3.133338 \end{bmatrix}$$

-2

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & -0.066662 & 0.866662 \\ 0.0 & 1.0 & -0.999995 & -3.000005 \\ 0.0 & 0.0 & 0.066667 & 0.133333 \end{bmatrix}$$

-3

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.999985 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.000030 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.999985 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الحل بطريقة غوص – جوردان بدقة ستة أرقام عشرية بعد الفاصلة هي:

$$x_1 = 0.999985$$
$$x_2 = 1.000030$$
$$x_3 = 1.919985$$

إن حل هذه الجملة بطريقة التعويض المباشر هو: (1 ,1 ,1) وبالتالي يوجد خطأ حساب في هذه ا لطريقة عن الحل الدقيق بسبب تراكم خطأ التدوير.

حذف

(3-4) طريقة شولسكي (Cholesky – method)

لنكتب جملة المعادلات الخطية بالشكل:

$$AX=b \tag{3-24}$$

حيث $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من المرتبة n و

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad b=\begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ q_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

أشعة عمود. لنضع A على شكل جداء مصفوفة مثلثية سفلى $B=\left[b_{ij}\right]$ بالمصفوفة المثلثية العليا $C=\left[c_{ij}\right]$ ذات قطر واحد أي بالشكل $A=B\,.\,C$

حيث:

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & o & \dots & o \\ b_{21} & b_{22} & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ o & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3-25}$$

العناصر b_{ij} و c_{ij} تعرف إذاً بالعلاقات:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= a_{i1} \\ b_{ij} &= a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \quad (i\geq j>1) \end{aligned} \tag{3-26}$$

و:

$$\begin{cases} c_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{b_{11}} \\ c_{ij}=\dfrac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij}-\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}\right) \ (1<i<j) \end{cases} \tag{3-27}$$

ومنه نجد المتجه X الذي نبحث عنه (الحل) يحسب بالمعادلات:

$$BY=b \quad ; \quad CX=Y \tag{3-28}$$

كون المصفوفات B و C مثلثية الجملة (3-27) تحل بالشكل:

$$y_1 = \frac{a_{1,n1}}{b_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k\right) \quad (i > 1) \qquad (3\text{-}29)$$

و

$$x_n = y_n$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k \qquad (i < n) \qquad (3\text{-}30)$$

إن العلاقات (3-29) تبين أنه من الأفضل حساب الحدود y_i بنفس الوقت متزامناً مع حساب العوامل c_{ij} . هذه الطريقة تسمى طريقة " شولسكي ". وإذا كانت المصفوفة A تناظرية أي:

$$c_{ij} = \frac{b_{ji}}{b_{ii}} \, (i < j) \; , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

مثال (6) حل جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

لنرسم الجدول التالي الذي يبين في القسم الأول منه مصفوفة أمثال جملة المعادلات وعمود الثوابت ومجموع التحقق. بعد ذلك، بما أن $b_{i1} = a_{i1}$ (i=1,2,3,4) ، فإن ا لعمود الأول من القسم I يعوض في العمود الأول للقسم II .

	x_1		x_2	x_3	x_4		Σ	x_1		x_2	x_3	x_4		Σ
I	a_{11}		a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	3		1	-1	2	6	11
	a_{21}		a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	-5		1	3	-4	-12	-17
	a_{31}		a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	2		0	1	-1	1	3
	a_{41}		a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	1		-5	3	-3	3	-1
II	b_{11}	1	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	3	1	0.333333	-0.333333	0.6666667	2	3.666667
	b_{21}	b_{22}	1	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	-5	2.666667	1	0.5	-0.25	-0.75	0.5
	b_{31}	b_{32}	b_{33}	1	c_{34}	c_{35}	c_{36}	2	0.666667	2	1	-1.25	-1.75	-2
	b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	1	c_{45}	c_{46}	1	-5.333333	6	2.5	1	3	4
III						y_1	x_1						2	1
						y_2	x_2						-0.75	-1
						y_3	x_3						-1.75	2
						y_4	x_4						3	3

للحصول على السطر الأول في القسم II ، لنقسم كل عناصر السطر الأول للقسم I على العنصر $a_{11} = b_{11}$ ، في حالتنا نقسم على 3 ، لدينا إذن:

$$c_{12} = \frac{1}{3} = 0.(3)$$

$$c_{13} = -\frac{1}{3} = -0.(3)$$

$$c_{14} = \frac{2}{3} = 0.(6)$$

$$c_{16} = \frac{11}{3} = 2.(6)$$

لنتمم الآن العمود الثاني للقسم II منطلقين بالسطر الثاني.

بتطبيق العلاقة (3-25) نعين b_{j2} :

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12} = 1 - \left(-5.\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2.66(6)$$

$$b_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12} = 0 - 2.\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} = 0.(6)$$

$$b_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12} = -5 - 1.\frac{1}{3} = -5\frac{1}{3} = -5.(3)$$

بعد ذلك ، إن حساب $c_{2j}(j = 3,4,54,6)$ حسب العلاقات (3-4) يسمح بإنشاء السطر الثاني من القسم II:

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}(a_{23} - b_{21}c_{13}) = \frac{3}{8}\left[3 - (-5)\ .\ \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}(a_{24} - b_{21}\ .\ c_{14}) = \frac{3}{8}\left[(-4) - (-5)\ .\ \frac{2}{3}\right] = -\frac{1}{4}$$

$$c_{25} = \frac{1}{b_{22}}(a_{25} - b_{21}.c_{15}) = \frac{3}{8}\left[(-12) - (-5)\ .2\right] = -\frac{3}{4}$$

$$c_{26} = \frac{1}{b_{22}}(a_{26} - b_{21}.c_{16}) = \frac{3}{8}\left[(-17) - (-5)\ .\frac{11}{3}\right] = \frac{1}{2}$$

ووصولاً إلى العمود الثالث لحساب b_{33}, b_{34} حسب العلاقات (3-3) ، إلخ، ... نتمم القسم II . شيئاً فشيئاً عمود - سطر ، عمود - سطر ... . نستخدم العلاقات (3-28) و (3-29) فنحدد ضمن القسم III x_i, y_i $(i = 1,2,3,4)$.

إن التحقق يتم بفضل العمود Σ الذي يخضع لنفس المؤثرات لعمود الثوابت.

أخيراً نبين أن هناك عدداً كبيراً آخر من الطرق، مثل طريقة الاسترخاء وغيرها من الطرق ونكتفي بذكر الطرق السابقة.

(3-4-1) طريقة شولسكي (Choleski) للمصفوفات ثلاثية القطر :

إن طريقة المحور للمصفوفات ثلاثية القطر تسمى أحياناً طريقة "شولسكي"

لنأخذ جملة المعادلات:

$$\begin{aligned}
b_1 x_1 + c_1 x_2 \qquad\qquad &= y_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 \quad &= y_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\ \ \vdots \\
a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} &= y_i \\
a_n x_{n-1} + b_n x_n &= y_n
\end{aligned} \tag{3-30}$$

إن المعادلة الأولى من (3-30) تسمح بكتابة x_1 بالشكل:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \tag{3-31}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من (3-30):

$$a_2 \left[-\frac{c_1}{b} x_2 + \frac{y_1}{b_1} \right] + b_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2$$

$$\left[-\frac{c_1 a_2}{b_1} + b_2 \right] x_2 = -c_2 x_3 + y_2 - a_2 \frac{y_1}{b_1}$$

وهكذا كتبنا x_2 كتابع لـ x_3 ، بعد ذلك نكتب كل مجهول كتابع للمجهول التالي. ولنفرض أننا حصلنا على:

$$x_{i-1} = A_{i-1} x_i + B_{i-1}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الأولى من (3-30)، ينتج:

$$a_i\left\{A_{i-1}x_i + B_{i-1}\right\} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = y_i$$

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} \qquad (3\text{-}32)$$

ويمكننا إذن أن نكتب:

$$x_i = A_i x_{i+} + B_i$$

$$A_i = -\frac{c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} \qquad (3\text{-}33)$$

$$B_i = \frac{y_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i}$$

لنعوض $I = 1$ في المعادلات (3-31) ولنقارن مع (3-29) نجد أن:

$$\begin{cases} A_o = o \\ B_o = o \end{cases} \qquad (3\text{-}34)$$

المعادلات (3-39) و (3-30) تسمح لنا ، شيئاً فشيئاً ، (وذلك بإعطاء $A_o = o$ ، $B_o = o$) حساب الأزواج:

$$(A_1, B_1)\ ,\ (A_2, B_2)\ ,\dots,(A_i, B_i),\dots$$

إن حساب العوامل A_i, B_i يصبح ممكناً باستخدام قيم دليل أولى لـ $i = 1 \rightarrow n$

الآن سنأخذ قيماً ثانية لـ $i = n \rightarrow 1$

تسمح لنا حساب المجاهيل، في الحقيقة إن المعادلة الأخيرة من (3-30) تكتب بالشكل:

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = y_n$$

وهذه تكتب ، باستبدال x_{n-1} بقيمتها من (3-33)

حيث $i = n - 1$:

$$a_n\left(A_{n-1}x_n + B_{n-1}\right) + b_n x_n = y_n$$

ومنه:

$$x_n = \frac{y_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n}$$

أي حسب (3-33) ، حيث $i = n$:

$$x_n = B_n \tag{3-35}$$

وبالتالي حسبنا x_n التي تبحث عنها . ومنه نستنتج:

$$x_{n-1} = A_{n-1}x_n + B_{n-1}$$

ثم x_{n-2} ، ... حتى x_1 ، بالتتالي:

(3-5) طريقة مقلوب المصفوفة Matrix inverse method

بفرض أن جملة المعادلات الجبرية مكونة من n معادلة بـ n مجهول:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
\end{aligned} \tag{3-36}$$

وإذا رمزنا لمصفوفة أمثال هذه الجملة بالرمز:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ولثوابت هذه الجملة بالعمود:

$$B = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

ولعمود المجاهيل بالرمز:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

عندئذ يمكن كتابة هذه الجملة بالشكل المصفوفي:

$$AX=B$$

لنفرض أن $\det A \neq o$ (مصفوفة غير شاذة)

عندئذ يوجد حل وحيد للمجموعة الجبرية، لنضرب طرفي المعادلة المصفوفية من اليسار بـ A^{-1} فنجد:

$$A^{-1}.A.X=A^{-1}.B$$

أي أن:

$$X=A^{-1}.B \qquad (3\text{-}37)$$

مثال (7):

حل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x+y+5z&=4 \\ 3x-2y+3z&=2 \\ 5x-8y-4z&=1 \end{aligned}$$

نكتب هذه الجملة مصفوفياً بالشكل $AX=B$ كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بحساب A^{-1} نجد أن:

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 32 & -36 & 13 \\ 27 & -33 & 9 \\ -14 & 21 & -7 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 32 & -36 & 13 \\ 27 & -33 & 9 \\ -14 & 21 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي:

$$x=\frac{23}{7} \quad , \quad y=\frac{17}{7} \quad , \quad z=-1$$

الطرائق التكرارية:

هناك طرائق كثيرة جداً في التحليل العددي لحل جملة المعادلات الجبرية الخطية بالتأكيد. لانستطيع في هذا المقرر تغطيتها مثل طريقة كروت، طريقة التدرج Gradient، طريقة الاتجاهات المتناوبة، ... وغيرها من الطرق.

وسنكتفي في هذا المقرر بذكر بعض الطرائق التكرارية ومنها:

(3-6) طريقة جاكوبي: مطلوب - مطلوب ✱ من هنا من ص ١٢٥ مطلوب ✱

لنعتبر أمثل المجموعة ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{3-38}$$

لنحل المعادلة الأولى بالنسبة لـ x_1 ، الثانية لـ x_2 ، والثالثة لـ x_3 وهكذا ...

وهذا يعطي:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(y_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(y_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}}(y_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{aligned} \tag{3-39}$$

ولنعطِ للمجاهيل الثلاثة، قيماً ابتدائية اختيارية: $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ ونعوض في الطرف الأيمن من (3-39) فنحصل على القيم الجديدة:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(y_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(y_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(y_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}\right) \end{aligned} \tag{3-40}$$

وهكذا بنفس الطريقة يمكن تعويض هذه القيم الجديدة $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ من جديد في الطرف الأيمن للمعادلات (3-39) والحصول على حل جديد تقريب ثان للحل:

$$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}\right)$$

وهكذا ...

مثال (8): لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}$$

لنحل المعادلة الأولى بالنسبة لـ x_1 والثانية لـ x_2 والثالثة لـ x_3 والرابعة لـ x_4 فنجد:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 . + \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 . + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{16}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

لنأخذ الحل الابتدائي: $X^{(o)} = (o,o,o,o)^t$ ، ولنوجد $X^{(1)}$ بالشكل:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(o)} - \frac{1}{5}x_3^{(o)} + \frac{3}{5} = 0.6000 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(o)} + \frac{1}{11}x_3^{(o)} - \frac{3}{11}x_4^{(o)} + \frac{25}{11} = 2.2727 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(o)} + \frac{1}{10}x_2^{(o)} + \frac{1}{10}x_4^{(o)} - \frac{11}{10} = -1.1000 \\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(o)} + \frac{1}{8}x_3^{(o)} + \frac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}$$

وهكذا نحصل على التكرارات المتتالية:

$$x^{(K)} = \left(x_1^{(K)}, x_2^{(K)}, x_3^{(K)}, x_4^{(K)}\right)^t$$

بشكل متتالي والجدول التالي يبين ذلك:

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(K)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	0. 0152	1.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(K)}$	0.0000	2.2727	1.7155	2.0533	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(K)}$	0.0000	-1.1000	-0.8052	-1.0493	-0.9681	-1.0103	-0.9945	-1.0020	-0.9990	-1.0004	-0.9998
$x_4^{(K)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

إن قرار التوقف بعد التكرارات يعتمد على الحد:

$$\frac{\left|x^{(10)} - x^{(9)}\right|}{\left|x^{(10)}\right|} = \frac{8.0\times10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}$$

إن الحل الدقيق لهذه المجموعة هو:

$$X = (1,2,\ -1,1)^t$$

يمكن تلخيص الطريقة السابقة إذاً وبشكل عام، بالشكل:

تعتمد هذه الطريقة على حل الجملة $AX = b$ بالنسبة لـ x_i (مع التحقق من أن $a_{ii} \neq o$):

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij} .\ x_j\right) + b_i \right] \quad ; \quad i = 1,2,\dots,n$$

وحساب $x_i^{(K)}$ اعتماداً على $x_i^{(K-1)}$ من أجل $K \geq 1$ بالشكل:

$$x_i^{(K)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(K-1)} \right) + b_i \right)$$

من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$

ويبقى التكرار مستمراً حتى: $\varepsilon \leq \dfrac{\left| x^{(K)} - x^{(K-1)} \right|}{\left| x^{(K)} \right|}$

حيث ε عدد موجب صغير يعبر عن دقة الحل.

كما يمكن البرهان على أن الشرط الكافي لتقارب طريقة جاكوبي لـ n معادلة بـ n متحول هو:

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum |a_{ij}| \right) < 1 \qquad ; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

طريقة جاكوبي – من أجل n معادلة:

لتكن جملة المعادلات الجبرية الخطية، وعددها n،

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}41)
$$

يمكن أن تحل بطريقة جاكوبي التكرارية وذلك بعد التحقق من الشرط الكافي التالي، للتقارب:

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1 \qquad (3\text{-}42)$$

حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$

إن العلاقات التكرارية لجاكوبي عندئذ هي:

$$x_1^{K+1} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 \quad - a_{12}x_2^K - a_{13}x_3^K - \ldots - a_{1n}x_n^K\right]$$

$$x_2^{K+1} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^K \qquad - a_{23}x_3^K - \ldots - a_{2n}x_n^K\right]$$

$$x_3^{K+1} = \frac{1}{a_{23}}\left[b_3 - a_{31}x_1^K - a_{32}x_2^K \qquad - \ldots - a_{3n}x_n^K\right] \qquad (3\text{-}43)$$

....

$$x_n^{K+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^K - a_{n2}x_2^K - a_{n3}x_3^K - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^K\right]$$

وعندما يكون شرط التقارب السابقة محققاً ، فإن العلاقات التقريبية للحل تولد متتالية من التقريبات المتتالية المتقاربة من الحل الدقيق.

مثال (9) :

لتكن مجموعة المعادلات:

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12$$

كما هو واضح فإن عناصر القطر الرئيسي غير معدومة (وليست صغيرة جداً) ولذلك يمكن القسمة على أمثالها ولدينا:

$$x_1^{K+1} = \frac{1}{4}\left[16. \qquad - x_2^K - 2x^K\right]$$

$$x_2^{K+1} = \frac{1}{3}\left[10 - x_1^K \qquad - x_3^K\right]$$

$$x_3^{K+1} = \frac{1}{5}\left[12 - x_1^K - 2x_2^K\right]$$

ومن أجل:

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \\ o \end{pmatrix}$$

نجد أن:

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59/30 \\ 18/15 \\ 4/15 \end{pmatrix}$$

وهكذا نجد أن:

$$X^3 = \begin{pmatrix} 107/30 \\ 233/90 \\ 229/150 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 4661/1800 \\ 736/450 \\ 313/450 \end{pmatrix}$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة نجد أن التقريب $\left(x_1^{K+1}, x_2^{K+1}, x_3^{K+1}\right)$ يتقارب من الحل الدقيق (3,2,1) للجملة السابقة.

مثال (10)

حل جملة المعادلات الخطية التالية (بطريقة جاكوبي أو بطريقة التقريبات المتتالية)

$$4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8$$
$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9$$
$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20$$

الحل:

نحل المعادلات الثلاثة على الترتيب بالنسبة لـ x_3, x_2, x_1. فنجد:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3 \\ x_2 &= 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3 \\ x_3 &= 5 - 0.01x_1 + 0.02x_2 \end{aligned}\right\}$$

وهي تكتب بشكل مصفوفات بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

نختار الحل الابتدائي $x_1^{(o)} = 2, x_2^{(o)} = 3, x_3^{(o)} = 5$

نعوض في هذه القيم فنجد الحل الأول:

$$x_1^{(1)} = 2 - (0.06).3 + (0.02).5 = 1.92$$
$$x_2^{(1)} = 3 - (0.03).2 + (0.05).5 = 3.19$$
$$x_3^{(1)} = 5 - (0.01).2 + (0.02).3 = 5.04$$

نكرر العملية ثانية فنجد:

$$x_1^{(2)} = 1.9094 \quad ; \quad x_2^{(2)} = 3.1944 \quad ; \quad x_3^{(2)} = 5.0446$$

وهكذا نجد أيضاً:

$$x_1^{(3)} = 1.90923$$
$$x_2^{(3)} = 3.19495 \quad ; \quad x_3^{(3)} = 5.04485$$

مثال (11):

حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة جاكوبي:

$$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 8$$
$$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 32$$

الحل:

نحل هذه المعادلات على الترتيب بالنسبة لـ x_3, x_2, x_1

$$x_1 = 0.9 + 0.2x_2 - 0.1x_3$$
$$x_2 = 1.6 - 0.2x_1 + \quad 0.2x_3$$
$$x_3 = 4 - 0.5x_1 - 0.25x_2$$

وبأخذ القيم الابتدائية للحل:

$$x_1^{(o)} = o \quad ; \quad x_2^{(o)} = o \quad ; \quad x_3^{(o)} = o$$

نجد أن:

$$x_1^{(1)} = 0.9 \quad ; \quad x_2^{(1)} = 1.6 \quad ; \quad x_3^{(1)} = 4$$

وبتعويض هذه القيم من جديد نجد أن:

$$x_1^{(2)} = 0.9 + 0.2 \times 1.6 - 0.1 \times 4 = 0.82$$
$$x_2^{(2)} = 1.6 - 0.2 \times 0.9 + 0.2 \times 4 = 2.22$$
$$x_3^{(2)} = 4 - 0.5 \times 0.9 - 0.25 \times 1.6 = 3.15$$

وهكذا نجد العلاقات التقريبية التكرارية :

$$x_1^{(n+1)} = 0.9 + 0.2x_2^{(n)} - 0.1x_3^{(n)}$$
$$x_2^{(n+1)} = 1.6 - 0.2x_1^{(n)} + 0.2x_3^{(n)}$$
$$x_3^{(n+1)} = 4 - 0.5x_1^{(n)} - 0.25x_2^{(n)}$$

ويمكن ترتيب النتيجة بالجدول:

n	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(n)}$	0.9	0.82	1.03	1.01	1.00	1.00
$x_2^{(n)}$	1.6	2.22	2.07	2.00	1.99	2.00
$x_3^{(n)}$	4.0	3.15	3.03	2.97	3.00	3.00

ونجد أنه بدقة محددة لدينا المساويات:

$$x_1^{(5)} = x_1^{(6)} \quad ; \quad x_2^{(5)} = x_2^{(6)} \quad ; \quad x_3^{(5)} = x_3^{(6)}$$

ويمكن اعتبار أن هذا هو الحل لهذه المعادلات.

وفيما يلي خوارزمية طريقة جاكوبي:

لجملة معادلات خطية من الشكل $AX = C$ حيث نحول هذه الجملة إلى الشكل المكافئ التالي:

-1 $$X = BX + d;$$

حيث:

$$B = (b_{ij}); \quad d = (d_1, ..., d_n)^t$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}, \quad d_i = \frac{c_i}{a_{ii}} (i = 1,2,\dots,n)$$

2- نختبر شرط المجاميع التالي:

$$\max_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

أو الشرط:

$$\max_j \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

وإذا لم يتحقق هذان الشرطان نبدل بين المعادلات بحيث تتوضع الأمثال الأكبر في المعادلات على القطر الرئيسي تكون فيها عناصر القطر الرئيسي الأكبر (وإلاّ نحل المعادلات بطريقة مباشرة).

3- نختار شعاع الحل رقم صفر:

$$X^{(o)} = \left(X_1^{(o)} \;,\; X_2^{(o)} \;,\; \dots \;,\; X_n^{(o)} \right) = (0,0,\dots,0)$$

4- ونحسب الدستور التكراري التالي:

$$X_i^{(k+1)} = d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} b_{ij} X_j^{(k)} \quad ; \quad i = 1,2,3,\dots \qquad k = 0,1,\dots$$

نحصل على الحل التقريبي حتى يتحقق الشرط:

$$\max_{1 \le i \le n} \left| X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)} \right| < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0$$

حيث ε هي دقة الحساب وتكون معلومة.

(3-7) طريقة غوص – سايدل Gauss – Seidel Method

هذه هي طريقة أيضاً لحل جملة المعادلات الخطية مع تعديل بسيط لطريقة جاكوبي، فعندما نحسب في علاقة جاكوبي مركبة الحل (أو القيمة) x_i^{k+1} فإنها تستخدم في حساب: $x_{i+1}^{(k+1)} \;,\; x_{i+2}^{(k+1)} ,\dots,\; x_n^{(k+1)}$. وبالتالي نحصل على علاقات التقريب التكرارية التالية:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k \quad -\ldots \quad -a_{1n} x_n^k \right]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^k - a_{23} x_3^k \quad -\ldots \quad -a_{2n} x_n^k \right]$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31} x_1^k - a_{32} x_2^{k+1} - a_{34} x_4^k - \ldots \quad -a_{3n} x_n^k \right] \quad (3\text{-}44)$$

....

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1} x_1^{k+1} - a_{n2} x_2^{k+1} \quad -\ldots \quad -a_{n,n-1} x_{n-1}^{k+1} \right]$$

والشرط الكافي أيضاً لتقارب هذه الطريقة هو:

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (3\text{-}45)$$

وهو الشرط نفسه في طريقة جاكوبي.

ملاحظة -2-:

من أجل حل ابتدائي يمكن لطريقة غوص – سايدل أن تتقارب من الحل الحقيقي بينما لاتتقارب منه طريقة جاكوبي . يبرهن أن طريقة غوص – سايدل تتقارب مرتين أسرع من طريقة جاكوبي ولذلك تعتبر طريقة غوص – سايدل أفضل من طريقة جاكوبي.

وفيما يلي خوارزمية طريقة غوص – سايدل والمخطط المنهجي لها:

الخوارزمية:

1- إدخال الوسطاء والمعطيات:

n = عدد المعادلات

kc = العدد الأعظمي للتكرارات .

ε = حد التقارب (الدقة)

وقراءة المصفوفات B , A (من المرتبة $n \times n+1$)

بحيث:

$$a_{i,n1} = b_i$$
$$(i = 1, n)$$

2- نقسم المعادلة رقم i على العنصر القطري a_{ii}

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} (i = 1, n; 1 = 1, n + 1) \qquad (a_{ii} \neq o)$$

3- ضع عداد التكرار k = 1 ، ضع القيم الابتدائية للحل

ذي المركبات $x_i^1 = 0.0 \quad (i = 1, n)$

4- احسب التكرارات المتتالية x_i^{k+1} مستخدماً علاقة التكرار:

$$x_i^{k+1} = a_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k}$$

. (i=1,n)

5- اختبار التقارب:

a) إذا كان $\left| x_i^{k+1} - x_i^{k} \right| > \varepsilon$

اذهب إلى الخطوة (6)

b) إذا كان $\left| x_i^{k+1} - x_i^{k} \right| \leq \varepsilon$

اذهب إلى الخطوة (7)

6- اختبار عداد التكرار:

a) إذا كان $k < kc$ ، ابدأ العداد k بـ 1 ، وعد إلى الخطوة 4

b) إذا كان $k \geq kc$ اذهب إلى ا لخطوة (8) .

7- خروج التقارب . اكتب الحلول:

$$x_i = x_i^{k+1} \qquad (i = 1, n)$$

8- أطبع " البرنامج فشل في التقارب في التكرارات (kc) . خروج.

مثال (12) : (غوص – سايدل)

حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غوص – سايدل:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$
$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

(الحل الدقيق هو: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$)

لنأخذ: $x_1^{(o)} = x_2^{(o)} = x_3^{(o)} = o$ كتقريب أولي .

عندئذ تكتب المعادلات بالشكل:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2)$$

ينتج أن:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + o + o) = 1$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 1 - o) = \frac{4}{3}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 + 1 = \frac{8}{3}\right) = \frac{17}{15}$$

وبإيجاد الحلول المتتالية مع أخذ أربعة أرقام عشرية، نجد الجدول:

التكرار	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0.1000×10^1	0.1333×10^1	0.1133×10^1
2	0.1050×10^1	0.9473×10^0	0.9889×10^0
3	0.9896×10^0	0.1005×10^1	0.9999×10^0
4	0.1001×10^1	0.9999×10^0	0.1000×10^1
5	0.1000×10^1	0.1000×10^1	0.1000×10^1

مثال (13) طريقة غوص – سايدل

حل جملة المعادلات الجبرية الخطية:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 \quad\quad &= 24 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\
- x_2 + 4x_3 &= -24
\end{aligned}
$$

باستخدام طريقة غوص – سايدل، لدينا:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k)} = -0.75x_2^{(k-1)} + 6 \\
x_2^{(k)} = -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5 \\
x_3^{(k)} = 0.25x_2^{(k)} - 6
\end{cases}
$$

ولدينا الجدول التالي: (سبع أرقام عشرية بعد الفاصلة) لسبع تكرارات الأولى للحل:

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898
$x_3^{(k)}$	1	-5.046875	-5.0292969	-5.0183105	-5.0114441	-5.0071526

k	0	6	7
$x_1^{(k)}$	1	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	-5.0044703	-5.0027940

مثال (14) حل جملة المعادلات الخطية باستخدام طريقة غوص – سايدل:

$$
\begin{aligned}
10x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\
2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\
2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14
\end{aligned}
$$

الحل:

نحل المعادلات الثلاثة على الترتيب بالنسبة لـ x_3, x_2, x_1 للحصول على الشكل التكراري للحل.

$$x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3$$
$$x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3$$
$$x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2$$

لنأخذ الحل الابتدائي:

$$x_1^{(o)} = 1.2\ ,\ x_2^{(o)} = o\ ,\ \ x_3^{(o)} = o$$

فنحصل على الحل الأول:

$$x_1^{(1)} = 1.2 - (0.1).0 = 1.2$$
$$x_2^{(1)} = 1.3 - (0.2).(1.2) = 1.06$$
$$x_3^{(1)} = 1.4 - (0.2).(1.2) - (0.2).(1.06) = 0.948$$

وكذلك التقريب الثاني:

$$x_1^{(2)} = 1.2 - (0.1)(1.06) - (0.1)(0.948) = 0.9992$$
$$x_2^{(2)} = 1.3 - (0.2).(0.9992) - (0.1)(0.948) = 1.00536$$
$$x_3^{(2)} = 1.4 - (0.2)(0.4442) - (0.2).(1.00536) = 0.999098$$

نتابع الحل حتى التقريب الخامس من خلال الجدول التالي:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9991
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

علماً بأن الحل الدقيق هو: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

ملاحظة-3-:

يقف حساب التقريبات عادة عندما يكون قيمتين متتالية X_j "بشكل كاف" متجاورتين. ونستطيع استخدام معيارين:

1- التقارب المطلق:

$$\left|X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}\right| \le \varepsilon$$

(2) التقارب النسبي:

$$\left|\frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}}\right| \le \varepsilon$$

وعندما يكون عدد المعادلات كبيراً جداً فإنه من غير الجيد اختبار كل حل X_j . ونستطيع الاختبار فقط على بعض هذه الحلول، ونختبر أيضاً الكميات من النموذج:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}\right| \quad \text{أو} \quad \left\{\sum_{j=1}^{n} \left[X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}\right]^2\right\}^{1/2}$$

أو:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}}\right|$$

أو:

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}}{X_j^{(k+1)}}\right]^2\right\}^{1/2}$$

إن التقارب لايتعلق باختيار القيم الابتدائية $X_j^{(o)}$ ولكن يتعلق فقط بأمثال المتحولات، إن التقارب يكون محققاً إذا كان من أجل كل قيمة لـ i (أي كل سطر):

$$|a_{ii}| \ge \sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} |a_{ij}|$$

(3-8) مسألة القيم الخاصة وحل جمل المعادلات الجبرية الخطية (اضطراب واستقرار الحل)

من هنا الى ص ١٥٣
محذوف

إن لمفهوم القيم الخاصة للمصفوفات دوراً أساسياً في الكثير من العلوم الرياضية والفيزيائية والتطبيقية بشكل عام. وقد تم في هذا العمل اختيار دور هذه القيم وعلاقتها بمسألة حل جمل المعادلات الجبرية الخطية حيث لوحظ أن لهذه القيم أهمية بالغة عند الحديث عن مسألة تقارب الحل بالطرق غير المباشرة (التكرارية-العددية) لحل جمل المعادلات الجبرية الخطية. سيتم إذن دراسة هذا المفهوم مع بعض التعاريف الأساسية ثم

دراسة بعض الشروط على هذه القيم بغية التعرف على موضوع تقارب الحل لبعض من هذه الطرق العددية لحل جمل المعادلات الجبرية الخطية.

بعض التعاريف الرئيسية

تعريف-1-: "نصف قطر الطيف" لمصفوفة مربعة A هو عدد ≥ 0 معرف بالشكل:

$$\rho(A) = \max|\lambda_i(A)|; \quad 1 \leq i \leq n$$

حيث $\{\lambda_i(A)\}; \quad 1 \leq i \leq n$ مجموعة القيم الخاصة للمصفوفة

تعريف-2-:نسمي "قيمة شاذة لمصفوفة" A ونرمز له بـ μ، الجذر التربيعي الموجب للقيم الخاصة للمصفوفة الهيرميتية A^*A.

تعريف-3-: ليكن V فضاءً شعاعياً ذا بعد منته، إن تعاريف النظيم التالية هي الأكثر استخداماً:

$$1- \quad \|v\|_1 = \sum_i |v_i|$$

$$2- \quad \|v\|_2 = \left(\sum_i |v_i|^2\right)^{1/2} = (u, v)^{1/2}$$

$$3- \quad \|v\|_\infty = \max_i |v_i|$$

أما بالنسبة للمصفوفات فيمكن الحديث عن النظيم من خلال النظرية التالية:

نظرية -1-: لتكن A مصفوفة مربعة عندئذ لدينا:

$$1- \quad \|A\|_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Sup}\frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$2- \quad \|A\|_2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Sup}\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$$

$$3- \quad \|A\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Sup}\frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

خاصة: $\sqrt{\rho(AA^*)} = \max_i \left|\lambda_i(A)\right|^2 = (\rho(A))^2$

خاصة : لتكن A مصفوفة مربعة عندئذ لدينا: $\rho(A) \leq \|A\|$

ملاحظة-4-: (لن نتحدث عن نظري القيم الخاصة وكيفية وطرق الحصول على القيم والأشعة الخاصة يترك هذا الموضوع لمناسبة أخرى... وهو موضوع هام ويتم بطرق عددية كثيرة مثل طريقة كريلوفا وطريقة القوة وغيرها من الطرق الشهيرة...)

طرح المسألة:– مسألة "الشروط" على الجملة الخطية –

سيتم طرح هذه المسألة من خلال مثال بسيط، لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}47)$$

هذه الجملة لها الحل التالي:

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لنجري التغيير الطفيف التالي على هذه الجملة، كما هو مبين بالشكل:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+\delta x_1 \\ x_2+\delta x_2 \\ x_3+\delta x_3 \\ x_4+\delta x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}48)$$

هذه الجملة تملك الحل التالي:

$$X'=\begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

بمعنى آخر أن خطأً نسبياً بمقدار 0.003 على المعطيات أدى الى خطأ على النتيجة بمقدار 0.8 ، نقول ان لدينا نسبة تكبير من مرتبة 2500. وكذلك لو أخذنا الجملة "المضطربة" – سميت مضطربة نتيجة تغيير في الطرف الأول أدى لتغيير كبير في الحل:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1+\delta x_1 \\ x_2+\delta x_2 \\ x_3+\delta x_3 \\ x_4+\delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}49)$$

هذه الجملة تملك الحل التالي:

$$X'' = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

هنا أيضاً تم تعديل طفيف على المعطيات فحصلنا على تغير كبير في النتيجة، مع أن المصفوفة A تناظرية ومحددها يساوي "1" ومقلوبها:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

مثال (15) : لنأخذ الجملة الخطية التالية:

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ 1.002x_1 - x_2 = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ 1.002x_1 - x_2 = 1.001 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 0.5 \\ x_2 = -0.5 \end{matrix}\right.$$

مثال (16):

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = -1 \\ 1.002x_1 - x_2 = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 1000 \\ x_2 = 1001 \end{matrix}\right.$$

مثال (17):

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = -1 \\ 1.001x_1 - x_2 = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 2000 \\ x_2 = 2001 \end{matrix}\right.$$

ملاحظة-5- : هذه الأمثلة تبين أن الخطأ في المعطيات يكون من مرتبة كبيرة الاعتبار في العلوم التجريبية وبالتالي فإن مستخدم التحليل العددي يخاطر بأن يقتنع ....

بتحليل هذه الظاهرة. من خلال تعريف النظيم نصل إلى إحدى حالتين:

الحالة الأولى: من أجل $AX=b$

ينتج أن الخطأ النسبي للنتيجة مقاسة بالكسر: $\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}$ تقدر كتابع للخطأ النسبي $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ بالشكل:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \left\{\|A\|\|A^{-1}\|\right\} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \tag{3-50}$$

حيث: $A(X+\delta X) = b + \delta b$

$$\delta X = A^{-1}\delta b$$

الحالة الثانية: من أجل $AX=b$

ينتج أن الخطأ النسبي للنتيجة مقاسة هذه المرة بالكسر: $\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|}$ تقدر كتابع للخطأ النسبي على المعطيات $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ على المعطيات A بالشكل:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq \left\{\|A\|\|A^{-1}\|\right\} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{3-51}$$

حيث: $(A+\Delta A)(X+\Delta X) = b$

$$\Delta X = -A^{-1}\Delta A(X+\Delta X)$$

ملاحظة-6-: في كلا الحالتين نبين أن الخطأ النسبي على النتيجة قيس بالخطأ النسبي على المعطيات. مضروباً بالعدد: $\left\{\|A\|\|A^{-1}\|\right\}$ بمعنى آخر نقول، من أجل نفس الخطأ النسبي على المعطيات فإن الخطأ النسبي على النتيجة المرافقة يمكن أن يكون كبيراً بمقدار ما يكون هذا العدد كبيراً. لدراسة ما سبق من خلال بعض النظريات يجب أن نقدم التعريف التالي أولاً:

تعريف -4-: ليكن $\|\ \|$ نظيم مصفوفاتي، A مصفوفة قابلة للقلب. نعرف العدد:

$$\mathrm{Cond}(A) = K(A) = \chi(A = \|A\|.\|A^{-1}\| \tag{3-52}$$

ويسمى رقم الشرط – أو الرقم الشرطي – لمصفوفة A بالنسبة للنظيم المصفوفاتي المعتبر. إن المتراجحات السابقة تبين أن العدد $K(A)$ يقيس حساسية الحل X للجملة الخطية AX=b مقابل التغير على المعطيات A و b. وبالتالي ماسبق يبين أهمية فرضية (أو إعطاء تعريف) "جملة خطية مشروطة جيدا–مكيفة– أو سيئاً" حسبما يكون رقم الشرط $K(A)$ لمصفوفتها كبيراً أم صغيراً بمعنى حسبما يغير النتيجة بشكل كبير أم لا.

ملاحظة-7- :

إن مفهوم الشرط لجملة خطية ليس إلا حالة خاصة لمفهوم عام في التحليل العددي. ويمكننا أيضاً دراسة جذور كثيرات الحدود مقابل التغيرات في المعاملات، أو دراسة الشرط على القيم الخاصة أو الأشعة الخاصة لمصفوفة مقابل التغيرات في عناصرها. وبالتالي من هذا المنظور يجب أخذ الحذر من امكانية الخلط بين : جملة خطية AX=b مشروطة سيئاً وبالتالي البحث عن القيم الخاصة لنفس المصفوفة A يمكن أن يكون مشروطاً جيداً.

نتائج :

نظرية -2- لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب' X و $X+\delta X$ حلول (على التوالي) الجملة الخطية: $AX=b$

والجملة الخطية: $A(X+\delta X)=b+\delta b$

وبفرض أن: $b\neq 0$ فإن المتراجحة التالية محققة:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}\leq K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \qquad (3\text{-}53)$$

وأفضل إمكانية تكون من أجل مصفوفة A معطاة،هي إيجاد الشعاعين $b\neq 0$ و $\delta b\neq 0$ بحيث تصبح المتراجحة السابقة مساواة.

نظرية -3- لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب' وليكن X و $X+\delta X$ حلول (على التوالي) للجملة الخطية: $AX=b$

وللجملة الخطية : $(A+\Delta A)(X+\Delta X)=b$

وبفرض أن: $b\neq 0$ فإن المتراجحة التالية محققة:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|}\leq K(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{3-54}$$

وأفضل إمكانية تكون من أجل مصفوفة A معطاة،هي إيجاد الشعاعين $b\neq 0$ ومصفوفة $\Delta A\neq 0$ بحيث تصبح المتراجحة السابقة مساواة. ولدينا من جهة أخرى المتراجحة:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\leq K(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\{1+O(\|\Delta A\|)\} \tag{3-55}$$

نظرية -4-:

1 - من أجل كل مصفوفة A لدينا:

-a $K(A)\geq 1$

-b $K(A)=K(A^{-1})$

-c $K(\alpha A)=K(A)$

من أجل أي عدد $\alpha\neq 0$

2 - من أجل كل مصفوفة A لدينا:

$$K_2(A)=\frac{\mu_{n(A)}}{\mu_1(A)} \tag{3-56}$$

(μ القيمة الشاذة عرفت سابقاً)، حيث القيم في البسط والمقام (على التوالي) تمثلان أكبر وأصغر قيم شاذة للمصفوفة A).

3- إذا كانت A نظامية $(AA^{*}=A^{*}A)$ لدينا:

$$K_2(A)=\frac{\max_i|\lambda_{i(A)}|}{\min_i|\lambda_{i(A)}|} \tag{3-57}$$

حيث القيم في البسط والمقام (على التوالي) تمثلان أكبر وأصغر قيم خاصة للمصفوفة A).

4- الرقم الشرطي $K_2(A)$ لمصفوفة واحدية $(AA^* = A^*A = I)$ أو متعامدة (حقيقية وتحقق الشرط $(AA^t = A^tA = I)$) يساوي "1".

5- $K_2(A)$ "Invariant" –غير متغير– بتحويل واحدي أي:

إذا كان $(XX^* = I)$ فإن: $K_2(A) = K_2(AX) = K_2(XA) = K(X^*AX)$

مثال -18-: بالعودة إلى المثال السابق –

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

لدينا وباستخدام النظيم الإقليدي نجد أن:

$$\lambda_1 \approx 0.01015 < \lambda_2 \approx 0.8431 < \lambda_3 \approx 3.858 < \lambda_4 \approx 30.2887$$

وبالتالي:

$$K_2(A) = \frac{|\lambda_{4(A)}|}{|\lambda_{1(A)}|} = 2984$$

بالمقابل:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta X = \begin{pmatrix} 8.2 \\ -13.6 \\ 3.5 \\ -2.1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}; \quad \delta b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta X\|_2}{\|X\|_2} = \frac{16.397}{2} \approx 8.1985$$

وكذلك: $$K(A).\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \approx (2984).\frac{0.2}{60.025} \approx 9.9424$$

(وبالتالي لسنا بعيدين عن المساواة).

ملاحظة -8-: يلعب مفهوم القيم الخاصة دوراً أساسياً أيضاً في :

1- مفهوم تقارب الحل لجمل المعادلات (حيث توجد شروط على القيم الخاصة وبالتالي على $K(A)$ لحل هذه الجمل كما هو مثلاً في طريقة جاكوبي وغوص- سايدل وطريقة SOR وطريقة CG....)

2- تسريع التقارب (بعد دراسة تقارب المصفوفات وربط هذا المفهوم بالقيم الخاصة).

3- ربط ما سبق بالمعادلات التفاضلية الجزئية حيث أن مجموعة المعادلات الخطية التي ندرسها في الغالب هي معادلات تم الحصول عليها بطرائق عددية مختلفة طبقت على المعادلات التفاضلية مثل طرائق الفروق المنتهية والعناصر المنتهية وغيرها من الطرائق وبالتالي هنا يوجد سؤال هام عن علاقة القيم الخاصة بحلول هذه المعادلات الخطية وبالتالي بحلول المعادلات التفاضلية الجزئية وربط ذلك بالطرائق العددية؟

إيجاد مقلوب مصفوفة:

١- إيجاد $\Delta \neq 0$

٢- إيجاد مصفوفة المحددات الأصغرية $adj\ A$

٣- أخذ المنقول $(adj\ A)^T$

٤- $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}(adj\ A)^T$

تمارين

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي ، ثم بطريقة غـوص – سـايدل (تحقق من شرط تقارب الحل)

-1

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$
$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

-2

$$4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8$$
$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9$$
$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20$$

3- حل الجملة الخطية التالية باستخدام طريقة الحذف لغوص ، إن الحل الدقيق لكل من هذه الجمل هو $x_1 = 1, x_2 = -1x_3 - 3$

a)
$$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$

b)
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$

c)
$$4x_1 - x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$$

d)
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

4- حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة مقلوب مصفوفة:

a)
$$x + y + z = 1$$
$$2x - 3y + z = 2$$
$$2x - 2y + z = 3$$

b)
$$x + 2y - z = 1$$
$$-x + y + z = 3$$
$$2x - 3y - z = 2$$

c)
$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 14$$
$$x + 4y + 9z = 36$$

d)
$$2x + y + 5z = 4$$
$$3x - 2y + 2z = 2$$
$$5x - 8y - 4z = 1$$

غوص: تعتمد على تحويل عناصر القطر الرئيسي إلى واحدات وما تحته أو فوقه إلى أصفار

غوص جوردان: تعتمد على تحويل المصفوفة إلى مصفوفة واحدية ما عدا عمود الثوابت

تمارين محلولة

حل جمل المعادلات الخطية

(1) – حل كل من جمل المعادلات الخطية التالية، بطريقة الحذف الغاوصي ثم بطريقة غوص–جوردان:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل: $(-2/7, \quad -13/14, \quad -3/14)$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

الحل: $(17/7, \quad -19/14, \quad 41/14)$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

الحل : $(1, \quad 1, \quad 1)$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل: $(-1/7, \quad 2/7, \quad 1/7)$

(2) – أعد السؤال السابق من أجل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

(3) – أعد السؤال السابق من أجل جملة المعادلات الخطية التالية:

غ. جوردان
حلولها
(1,1,1,1)

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 1 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2 \\
- x_2 + x_3 - x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

(4) – حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غوص – سايدل (تحقق من شرط تقارب الحل):

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &= 6 \\
- x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}
$$

لنحل المعادلة الأولى بالنسبة لـ x_1 والثانية لـ x_2 والثالثة لـ x_3 والرابعة لـ x_4 نجد:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 . + \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 . + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{16}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

لنأخذ الحل الابتدائي: $X^{(o)} = (o,o,o,o)^t$

ولنوجد $X^{(1)}$ بالشكل:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} = 0.6000 \\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11} \\
x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \\
x_4^{(k)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

وهكذا نحصل على التكرارات المتتالية:

$$x^{(K)} = \left(x_1^{(K)}, x_2^{(K)}, x_3^{(K)}, x_4^{(K)}\right)^t$$

بشكل متتالي والجدول التالي يبين ذلك:

K	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(K)}$	0.0000	0.6000	1.030	1.0065	1.0009	1.0001
$x_2^{(K)}$	0.0000	2.3272	2.037	2.0036	2.0003	2.0000
$x_3^{(K)}$	0.0000	-0.9873	-1.014	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(K)}$	0.0000	0.8789	0.9844	0.9983	0.9999	1.0000

ولدينا أيضاً:

$$\frac{\left|X^{(5)} - X^{(4)}\right|}{\left|X^{(5)}\right|} = \frac{0.0008}{2.000} = 4\times10^{-4}$$

مطلوب من هنا حتى ص ١٦٢

الفصل الرابع
تقريب التوابع باستخدام الاستيفاء الداخلي
Interpolation

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ وقد أعطيت قيم هذا التابع في النقاط $x_i : i = o,1,2,...,n$ (سنسمي هذه النقاط بالعقد – أو عقد الاستيفاء –) والتي تعرف أيضاً باسم نقاط الاستناد. والمسألة المطروحة هنا هي معرفة قيم هذا التابع في نقاط داخلية واقعة بين نقاط الاستناد أو العقد السابقة. في هذا الفصل سيتم استيفاء تابع يمر من نقاط الاستناد بخطأ معدوم وبالتالي يمكن من خلال هذا التابع المار بهذه النقاط التجريبية (عقد الاستيفاء) حساب قيم هذا التابع في نقاط تقع بين هذه العقد. هناك عدد كبير من الطرق التي عالجت هذه المسألة من أجل نقاط استناد متساوية البعد فيما بينها وكذلك نقاط استناد غير متساوية البعد. وسنبدأ أولاً بطريقة لاغرانج التي تعالج هذه المسألة في الحالة العامة، أي من أجل عقد ليست بالضرورة متساوية البعد فيما بينها. ولكن قبل ذلك ستقدم المسألة بطريقة رياضية أي ستوضح مسألة الاستيفاء أولاً بشكل رياضي ثم نعود لذكر طرق الاستيفاء.

(4-1) مسألة الاستيفاء الداخلي: قرأ ٥ - ٩ - ٢

من أجل $(n+1)$ نقطة استناد (x_i, y_i)، $i = 0,1,2,...,n$ لنفرض أن التابع التقريبي الذي نبحث عنه عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة n على الأكثر $P(x)$ ويحقق العلاقة:

$$f(x_i) = P(x_i) \ ; \ \ i = o,1,2,...,n$$

أي أن الخطأ في نقاط الاستناد معدوم حيث تتطابق قيم التابع التجريبية في نقاط العقد (الاستناد) مع قيم التابع الذي نحن بصدد إيجاده $P(x)$ ، في تلك النقاط.

لنأخذ $P(x)$ من الشكل :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_o \tag{4-1}$$

إن كثيرة الحدود هذه تكون معينة إذا عينت الأمثال a_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$ (عـددها $n+1$).

ولذلك سنعوض قيم نقـاط الاستناد (العقـد) في (4-1) فنحـصل علـى $(n+1)$ معادلة.

$$\begin{aligned} a_n x_o^n + \ldots + a_2 n_o^2 + a_1 x_o + a_o &= y_o \\ a_n x_1^n + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x + a_o &= y_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_n^n + \ldots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_o &= y_n \end{aligned} \tag{4-2}$$

وبحـل هـذه الجملـة مـن المعـادلات الخطيـة نحـصل علـى قـيم المجاهيـل a_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$.

مثال (1)

أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة المارة بالنقاط (x_i, y_i) التالية:

i	0	1	2	3	4
x_i	−2	−1	1	4	6
y_i	96	21	−3	186	1512

الحل:

بتطبيق الطريقة السابقة وحل جملة المعادلات نجد أن :

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 6$$

مطلوب نظري

(4-1-1) كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج Lagrange interpolation

لنعتبر في هذه الحالة $(n+1)$ كثيرة حدود $L_i(x)$ من الدرجة n كـل منهـا معـرف من أجل : $i = o,1,\ldots,n$ بالعلاقة:

$$L_i(x)=\frac{(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_o)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \qquad (4\text{-}3)$$

أو بالشكل المختصر:

$$L_i(x)=\prod_{\substack{k=o\\k\neq i}}^{n}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} \qquad (4\text{-}4)$$

الذي يحقق الشرط:

$$L_i(x_k)=\begin{cases}o & : \quad i\neq k \text{ عندما}\\ 1 & : \quad i=k \text{ عندما}\end{cases} \qquad (4\text{-}5)$$

تسمى عادة $L_i(x)$ بكثيرات حدود لاغرانج، في هذه الحالة يمكن البرهان على أن $P_n(x)$ كثيرة حدود التقريب المارة بالنقاط $x_o, x_1, \dots, x_n$ تكتب بالشكل:

$$P_n(x)=\sum_{i=o}^{n} f(x_i)L_i(x)=\sum_{i=o}^{n} y_i\,.L_i(x) \qquad (4\text{-}6)$$

ولدينا طبعاً:

$$P_n(x_k)=\sum_{i=o}^{n} f(x_i).L_i(x_k)=f(x_k) \qquad (4\text{-}7)$$

البرهان:

إن كثير الحدود الذي نريد الحصول عليه ينعدم في n نقطة

$$x_o, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

ويأخذ الشكل:

$$L_i(x)=C_i(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \qquad (4\text{-}8)$$

حيث C_i ثوابت . لنضع $x=x_i$ في العلاقة السابقة آخذين بعين الاعتبار أن $L_i(x_i)=1$ (لأن كثيرة الحدود من الدرجة n تنعدم في جميع النقاط عدا النقطة $x=x_i$) فنحصل على:

$$C_i(x_i-x_o)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)=1$$

ومنه:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_o)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

وبتعويض قيمة C_i ثانية في العلاقة $P_i(x)$ السابقة نجد أن :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_o)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad (4\text{-}9)$$

وهذه ليست إلاّ عبارة عن كثيرات حدود لاغرانج التي تستخدم في كـثيرة حـدود التقريب للاغرانج $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} L_i(x).y_i \quad (4\text{-}10)$$

ملاحظة: يمكن كتابة عبارة $L_i(x)$ بالشكل:

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i=o}^{n}(x - x_i)}{(x - x_k)\prod_{i=o}^{n}(x_k - x_i)} \quad (4\text{-}11)$$

حساب كثيرات حدود لاغرانج: ~~حذفا~~

وجدنا:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=o \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

حذف

كما وجدنا أن كثيرة حدود التقريب للاغرانج تعطى بالعلاقة:

$$P_n(x) = \sum_{k=o}^{n} L_k(x).y(x_k)$$

حيث إن $L_k(x)$ كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة n . وتحقق الشرط:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} o & : \quad k \neq i \\ 1 & : \quad k = i \end{cases}$$

وكذلك:

$$P_n(x_k) = y(x_k) \quad ; \quad k = o,1,2,...,n$$ (نقاط الاستناد)

يلاحظ أن شكل كثيرات حدود لاغرانج غير متغير بالنسبة للتحويل الخطي $x = at + b$ (b,a ثوابت و $a \neq o$) " يترك البرهان للطالب، حيث نستبدل x_j بـ ($at_j + b$).

لحساب كثيرات حدود لاغرانج يمكن استخدام المخطط التالي :

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{x - x_o} & x_o - x_1 & x_o - x_2 & \dots & x_o - x_n \\
x_1 - x_o & \underline{x - x_1} & x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \\
x_2 - x_o & x_2 - x_1 & \underline{x - x_2} & \dots & x_2 - x_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n - x_o & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \dots & \underline{x - x_n}
\end{array}$$

لنرمز لجداء عناصر السطر الأول بـ D_o، ولجداء عناصر السطر الثاني بـ D_1 وهكذا ، أما بالنسبة لعناصر القطر الرئيسي (العناصر التي تحتها خط) فإنها تكتب بالشكل:

$$\prod_{i=o}^{n} (x - x_i)$$

فنجد أن:

$$L_k(x) = \frac{\prod_{i=o}^{n}(x - x_i)}{D_k} \qquad (k = o,1,...,n) \tag{4-12}$$

وبالتالي فإن:

$$P_n(x) = \prod_{i=o}^{n} (x - x_i) \sum_{i=o}^{n} \frac{y_i}{D_i} \tag{4-13}$$

وفي حالة تساوي البعد (المسافة) بين العقد – نقاط الاستناد نكتب:

$$x = x_o + th \tag{4-14}$$

فنجد أن:

$$t_o = o \quad , \quad t_1 = 1 \quad , \ \dots \ , \quad t_n = n$$

ومنه نجد أن:

$$L_k(t) = \frac{\prod_{i=o}^{n} (t - t_i)}{n!} \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{t - i} \qquad (i = o, 1, 2, \dots, n) \qquad (4\text{-}15)$$

حيث:

$$C_n^i = \frac{n!}{t!(n-i)!}$$

وبالتالي نحصل على:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{i=o}^{n} (t - t_i) \sum_{i=o}^{n} (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{t - i} y_i \qquad (4\text{-}16)$$

حيث:

حذف

$$t = \frac{x - x_o}{h}$$

مثال (2) مطلوب من هنا إلى ص ١٨٣ ... ولكن مقارنته مع استيفاء لاغرانج !!

ليكن جدول قيم التابع $y = y(x)$ معطى بـ :

x	0.05	0.15	0.20	0.25	0.35	0.40	0.50	0.55
y	0.9512	0.8607	0.8187	0.7788	0.7047	0.6703	0.6065	0.5769
t	1	3	4	.5	7	8	10	11

أوجد $y(0.45)$ ؟

الحل:

لتبسيط الحسابات نفرض أن : $x = 0.05t$ عندئذ قيم المتحول الجديد t في نقاط الاستناد هي : 11 , 10 , 8 , 7 , 5 , 4 , 3 , 1 ويجب إيجاد قيمة y من أجل $x = 0.45$ أي من أجل $t = 9$.

لنأخذ $t = t_i$ $(i=o,1,2,\dots,7)$ فنجد المخطط التالي الذي يبين قيم كثيرات حدود لاغرانج:

i	$t_i - t_j$ $j \neq i$								D_i	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	8	-2	-3	-4	-6	-7	-9	-10	-725760	0.9512	$-0.0131.10^{-4}$
1	2	6	-1	-2	-4	-5	-7	-8	268607	0.880	$-0.3202.10^{-4}$
2	3	1	5	-1	-3	-4	-6	-7	-7560	0.8187	$-1.0829.10^{-4}$
3	4	2	1	4	-2	-3	-5	-6	5760	0.7788	$1.3520.10^{-4}$
4	6	4	3	2	2	-1	-3	-4	-3.456	0.7047	$-2.0390.10^{-4}$
5	7	5	4	3	1	1	-2	-3	2520	0.6703	$2.6530.10^{-4}$
6	9	7	6	5	3	2	-1	-1	11340	0.6065	$0.5348.10^{-4}$
7	10	8	7	6	4	3	1	-2	-80640	0.5769	$-0.0715.10^{-4}$
	$\prod_{i=o}^{7} (0.45 - x_i) = 3840$								$S = \sum_{i=o}^{7} \frac{y_i}{D_i} = 1.6535.10$		

ومنه :

$$y(0.45) = \prod_{i=o}^{7} (0.45 - x_i) \ . \ \sum_{i=o}^{7} \frac{y_i}{D_i}$$

$$= 3840 \times 1.6535 \ . \ 10^{-4} = 0.6349$$

(4-1-2) **خطأ الاستيفاء للاغرانج:** بدون برهان

إن خطأ الاستيفاء بهذه الطريقة يكون معدوماً في نقاط العقد وفيما عدا ذلك يمكن البرهان على أنه يعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) \qquad (4\text{-}17)$$

$$= \left(\prod_{i=o}^{n} (x - x_i)\right) \frac{f_{(C)}^{(n+1)}}{(n+1)!} \qquad (4\text{-}18)$$

حيث C نقطة تنتمي للمجال $[x_o, x_n]$

(إن برهان العلاقات السابقة موجود في معظم كتب التحليل العددي المذكورة في المراجع الأجنبية).

مثال (3): مطلوب وتم حله

أوجد كثيرة حدود الاستيفاء للاغرانج لمجموعة النقاط المعطاة بالجدول التالي:

x_i	0.00	0.33	0.66	1.00
y_i	1.0	1.391	1.935	2.718

الحل:

باستخدام علاقة الاستيفاء السابقة نجد أن:

$$P_3(x) = y_o L_o(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$= 1.0 . \frac{(x-0.33)\ (x-0.66)(x-1.0)}{(0.0-0.33)(0.0-0.66)(0.0-1.0)}$$

$$+1.391 \frac{(x-0.0)\ (x-0.66)\ (x-1.0)}{(0.33-0.0)\ (0.33-0.66)\ (0.33-1.0)}$$

$$+1.935 \frac{(x-0.0)\ (x-0.33)\ (x-1.0)}{(0.66-0.0)\ (0.66-0.33)\ (0.66-1.0)}$$

$$+2.718 \frac{(x-0.0)\ (x-0.33)\ (x-0.66)}{(1.0-0.0)\ (1.0-0.33)\ (1.0-0.66)}$$

إذا طلب منا $P_3(x)$ حيث x معلوم، فنعوض مباشرة في القوانين الحل و/ة
أي $L_0(x)$ = ثابتة
و ثابتة $L_1(x)$

مثال (4)

استخدم العقد : $x_o = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$ لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج من الدرجة الثانية أو أقل للتابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل: لدينا:

$$L_o(x) = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = (x-6.5)x + 10$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} = \frac{(-4x+24)x-32}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)} = \frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

وبما أن:

$$f(x_o) = f(2) = 0.5$$

و $f(x_1) = f(2.5) = 0.4$

و $f(x_2) = f(4) = 0.25$

فإن:

$$P_2(x) = \sum_{i=o}^{2} f(x_i).L_i(x)$$

$$= 0.5((x-6.5)x+10) + 0.4\frac{(-4x+24)x-32}{x}$$

$$+0.25\frac{(x-4.5)x+5}{3}$$

$$= (0.05x - 0.425)x + 1.15$$

لحساب قيمة كثيرة حدود لاغرانج في النقطة $x = 2.25$ مثلاً نعوض فنجد :

$$P_2(2.25) = [(0.05).(2.25) - 0.425] \times 2.25 + 1.15$$

$$= 0.446875$$

مثال (5) مطلوب و ثم حل

ليكن لدينا الجدول التجريبي التالي:

x	0.40	0.50	0.70	0.80
Ln(x)	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

والمطلوب حساب ln(0.6) باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغـرانج، ثم حساب الخطأ في ذلك.

الحل: لدينا:

$$L_o(0.6) = -\frac{1}{6}\ ;\ L_1(0.6) = \frac{2}{3}$$

$$L_2(0.6) = \frac{2}{3}\ ;\ L_3(0.6) = -\frac{1}{6}$$

ومنه:

$$P_3(0.6) \approx -0.5099756$$

وهي قيمة $\ln(0.6)$ المطلوبة.

أما لحساب الخطأ، فلدينا:

$$\varepsilon(x)=\frac{f^{(4)}_{(C)}}{4!}(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

لدينا:

$$f^4(x)=-\frac{6}{x^4},$$

ومنه:

$$\varepsilon(x)=-\frac{6}{C^4}\times\frac{1}{4!}\prod_{i=o}^{3}(0.6-x_i)$$

إن C غير معلومة لذلك من قيم الجدول السابق، وباعتبار أن $C\ni[x_o,x_3]$

لدينا:

$$0.4<C<0.8$$

ومنه:

$$(0.4)^4<C^4<(0.8)^4$$

$$(2.44146=)\frac{1}{(0.8)^4}<\frac{1}{C^4}<\frac{1}{(0.4)^4}(=39.0625)$$

وكذلك لدينا:

$$\prod_{i=o}^{3}(0.6-x_i)=0.0004$$

ومنه:

$$|\varepsilon(0.6)|<0.00390625$$

وبالتالي فإن:

$$-0.5138826<\ln(0.6)<-0.5060686$$

مسألة (6):

أوجد كثيرة حدود لاغرانج للتابع $y=\sin\pi x$

من أجل النقاط:

$$x_o = o \quad , \quad x_1 = \frac{1}{6} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

الحل:

لنحسب أولاً القيم الموافقة للنقاط السابقة لدينا:

$$y_o = o \;\; ; \;\; y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

لنطبق علاقة الاستيفاء للاغرانج، فنجد أن:

$$P_2(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}.o + \frac{x(x-1)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}.\frac{1}{2} +$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}.1$$

$$= \frac{7}{2}x - 3x^2$$

مثال (7):

ليكن لدينا الجدول التالي، لقيم التابع $y = f(x)$:

x_i	321.0	322.8	324.2	325.0
y_i	2.50651	2.50893	2.51081	2.51188

احسب القيمة $f(323.5)$

الحل:

هنا لدينا : $x = 323.5$, $n = 3$

ومنه حسب علاقة لاغرانج الاستيفائية:

$$f(323.5)=\frac{(323.5-322.8)(323.5-324.2)(323.5-325.0)}{(321-322.8)(321.324.2)(321-325.0)}.2.50651+$$

$$+\ \frac{(323.5-321)\ \ (323.5-324.2)\ \ (323.5-325)}{(322.8-321)\ \ (322.8-324.2)\ \ (322.8-325)}.2.50893+$$

$$+\ \frac{(323.5-321)\ \ (323.5-322.8)\ \ (323.5-325)}{(324.2-321)\ \ (324.2-322.8)\ \ (324.2-325)}2.51081+$$

$$+\ \frac{(323.5-321)\ \ (323.5-322.8)\ \ (323.5-324.2)}{(325-321)\ \ (325-322.8)\ \ (325-324.2)}.2.51188=$$

$$=\ -0.07996+1.18794+1.83897-0.43708=2.50987$$

مثال (8):

باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر المار من النقاط المبينة بالجدول التالي:

x_{i2}	0	1	2	4
y_i	1	1	2	5

الحل:

$$P_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(o-1)(o-2)(o-4)}.1+$$

$$+\frac{x(x-2)(x-4)}{1(1-2)(1-4)}.1+\frac{x(x-1)(x-4)}{2(2-1)(2-4)}.2+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{4(4-1)(4-2)}.5$$

$$=\frac{1}{12}\left(-x^3+9x^2+12\right)$$

مطلوب

(4-1-3) الفروق المقسومة Divided differences

لنشكل الفروق التالية، للتابع $y=f(x)$

$$[x_i\,,x_{i+1}]=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\qquad;\qquad i=o,1,2,...,\tag{4-19}$$

هذه العلاقات تسمى " الفروق المقسومة " من المرتبة الأولى.

مثال (9):

$$[x_o, x_1] = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وبشكل مشابه نعرف " الفروق المقسومة من المرتبة الثانية" .

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad ; \quad i = o,,2,...,$$

على سبيل المثال: $[x_o, x_1, x_2] = \dfrac{[x_1, x_2] - [x_o, x_1]}{x_2 - x_o}$

وبشكل عام يمكن تعريف " الفروق المقسومة من المرتبة n " اعتماداً على الفروق المقسومة من المرتبة (n – 1) باستخدام العلاقة التالية:

$$[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, ..., x_{i+n}] - [x_i, ..., x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \quad (4\text{-}20)$$

$$n=1,2,..., \quad ; \quad i = 0,1,2,...$$

يمكن كتابة جدول عام يسهل كيفية الحصول على الفروق المقسومة:

جدول الفروق المقسومة

x	y	المرتبة 1	المرتبة 2	المرتبة 3	المرتبة 4
x_o	y_o	$[x_o, x_1]$			
x_1	y_1	$[x_1,x_2]$	$[x_o,x_1,x_2]$	$[x_o,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	y_2	$[x_2,x_3]$	$[x_1,x_2,x_3]$	$[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$[x_o,x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_3	y_3	$[x_3,x_4]$	$[x_2,x_3,x_4]$		
x_4	y_4				

مثال (10)

شكل الفروق المقسومة للتابع المعطى بالجدول التالي:

x	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
y	132.651	148.877	157.464	166.375	195.112	216.000

الحل: لدينا:

$$[x_o, x_1] = \frac{148.877 - 132.651}{0.2 - 0} = 81.13$$

$$[x_1, x_2] = \frac{157.464 - 148.877}{0.3 - 0.2} = 85.87$$

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{85.87 - 81.13}{0.3 - 0} = 15.8$$

وهكذا ، ... الجدول التالي يبين بقية الحسابات:

x	y	المرتبة 1	المرتبة 2	المرتبة 3	المرتبة 4
0	132.651	81.13	15.8	1	0
0.2	140.877	85.87	16.2	1	0
0.3	157.464	89.1	16.7	1	
0.4	166.375	95.79	17.3		
0.7	195.112	104.44			
0.9	216.000				

(4-1-4) علاقة نيوتن للاستيفاء الداخلي بدلالة الفروق المقسومة: مطلوب

من العلاقات السابقة يمكن الحصول على العلاقة الشهيرة التالية والمعروفة بكثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن من أجل الفروق المقسومة:

$$P_n(x) = y_o + \sum_{k=1}^{n} [x_o, x_1, \ldots, x_k] \; (x - x_o) \; \ldots \; (x - x_{k-1}) \qquad (4\text{-}21)$$

$$\begin{aligned} &= y_o + [x_o, x_1] \; (x - x_o) \; + [x_o, x_1, x_2] \; (x - x_o) \; (x - x_1) + \\ &+ \ldots + [x_o, x_1, \ldots, x_n] \; (x - x_o) \; (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (4\text{-}22)$$

وإن علاقة الخطأ وفق هذه العلاقة تحسب من العلاقة:

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = \qquad (4\text{-}23)$$

$$= \frac{f^{(x+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=o}^{n} (x - x_i) \qquad (4\text{-}24)$$

حيث ξ نقطة تقع بين النقاط $x, x_o, x_1, ..., x_n$

مثال (11):

شكل كثير حدود الاستيفاء للتابع $y=f(x)$ المعطى بالجدول : (وذلك باستخدام دستور نيوتن للفروق المقسومة).

x	0	2.5069	5.0154	7.5270
y	0.3989423	0.3988169	0.3984408	0.3978138

وأوجد اعتماداً على كثير الحدود هذا ، $f(3.7608)$.

الحل: لنشكل جدول الفروق المقسومة التالي:

x	y	**المرتبة 1**	**المرتبة 2**	**المرتبة 3**
0	0.3989423			
		-0.00005		
2.5069	0.3988169		-0.0000199	
		-0.0001499		0
5.0154	0.3984408		-0.0000199	
		-0.0002496		
7.5270	0.3978138			

جدول الفروق المقسومة

وباستخدام علاقة نيوتن السابقة نجد أن:

$$y = 0.3989423 - 0.0000500x - 0.0000199x(x - 2.5069)$$

ومنه:

$$y\,(3.7608) = 0.3989423 - 0.0000500 \times 3.7608 - - 0.0000199 \times 3.7608 \times (3.7608 - 2.5069) = = 0.3986604$$

(4-1-5) الفروق المحدودة: مطلوب

لنفرض أن $y = f(x)$ تابع معطى . ولنرمز بـ h $\Delta x = h$ عبارة عن الفرق (الخطوة) بين نقاط استناد متساوية البعد فيما بينها .

وبفرض أن التابع معطى قيمه في النقاط $y_i = f(x_i)$ من أجل النقاط $x_i (i = o,1,2,...)$ ، ومنه: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$

لنعرف الفروق التالية:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \qquad (4\text{-}25)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$$

يمكن كتابة العلاقة الأولى بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i$$

وبشكل متتال نجد:

$$y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i$$
$$y_{i+3} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i \qquad (4\text{-}26)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{i+n} = (1+\Delta)^n . y_i$$

وباستخدام ثنائي حد نيوتن نحصل على:

$$y_{i+n} = y_i + C_n^1 \Delta y_i + C_n^2 \Delta^2 y_i + \ldots + \Delta^n y_i \qquad (4\text{-}27)$$

وبالعكس. لدينا:

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta) - 1]^n y_i =$$
$$= (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + \qquad (4\text{-}28)$$
$$+ C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i \ldots + (-1)^n y_i$$

حيث:

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^n . y_i$$

مثلاً:

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$
$$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

وهكذا ...

يمكن ترتيب جدول الفروق التالية، والذي يعرف بجدول الفروق الأمامية :

جدول الفروق الأمامية

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_o	y_o				
x_1	y_1	Δy_o	$\Delta^2 y_o$		
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^2 y_o$	$\Delta^2 y_o$
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^2 y_1$	
x_4	y_4	Δy_3			
$\vdots$					
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}			
x_n	y_n				

بالشكل السابق نفسه يمكن تعريف ما يسمى بالفروق الخلفية ، حيث يعرف:

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \qquad (4\text{-}29)$$

بأنه الفرق الخلفي الأول لـ y_i ، والذي يعطى من خلال الجدول التالي لبقية الفروق الخلفية من المراتب المختلفة:

جدول الفروق الخلفية

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_o	y_o				
$\vdots$	$\vdots$				
x_{n-4}	y_{n-4}				
x_{n-3}	y_{n-3}	∇y_{n-3}	$\nabla^2 y_{n-2}$		
x_{n-2}	y_{n-2}	∇y_{n-2}	$\nabla^2 y_{n-1}$	$\nabla^3 y_{n-1}$	$\nabla^4 y_n$
x_{n-1}	y_{n-1}	∇y_{n-1}	$\nabla^2 y_n$	$\nabla^3 y_n$	
x_n	y_n	∇y_n			

(4-1-6) كثيرة حدود نيوتن للاستيفاء الداخلي (ذي الفروق الأمامية)

لنأخذ التابع $y = f(x)$ المعطى بالنقاط :

$y_i = f(x_i) \quad ; \quad i = o,1,2,\dots,n$ من أجل نقاط الاستناد

$$x_o , x_1 , \dots , x_n$$

والمتساوية البعد فيما بينها بخطوة h ، أي أن:

$$x_{i+1} - x_i = h \quad ; \quad i = o\,,1,2,\ldots,n-1$$

أو أن:

$$x_i = x_o + i\,h \tag{4-30}$$

كذلك يمكن أن نكتب أن:

$$x = x_o + q\,h \tag{4-31}$$

← مايلي عند تعين

من أجل q عدد كسري، (أو : $q = \dfrac{x - x_o}{h}$) هذه العلاقة أسهل للتطبيق

يمكن البرهان على صحة العلاقة التالية، والتي تعرف بعلاقة نيوتن للاستيفاء من أجل فروق أمامية:

$$P_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_o}{h}(x - x_o) + \frac{\Delta^2 y_o}{2!.h^2}(x - x_o)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_o}{n!.h^n}.\prod_{i=o}^{n-1}(x - x_i) \tag{4-32}$$

وكذلك بتبديل قيمة x بدلالة q يمكن الحصول على العلاقة:

$$P_n(x_o + qh) = y_o + q.\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \ldots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}.\Delta^n y_o \tag{4-33}$$

$$= y_o + \binom{q}{1}\Delta y_o + \binom{q}{2}\Delta^2 y_o + \ldots + \binom{q}{n}\Delta^n y_o \tag{4-34}$$

أما بالنسبة للخطأ فهو نفسه الخطأ في طريقة نيوتن.

من أجل الفروق المقسومة:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=o}^{n}(x - x_i) \tag{4-35}$$

أو:

$$R(x_o + qh) = h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}q(q-1)...(q-n) \qquad (4\text{-}36)$$

من نفس (4-35)

ملاحظة:

ملاحظة

لو أخذنا $n = 1$: نجد أن علاقة الاستيفاء الأخيرة تأخذ الشكل: علاقة استيفاء خطي لأنه عقدتين فقط

$$P_1(x) = y_o + q\,\Delta\, y_o \qquad (4\text{-}37)$$

علاقة خطية — نفس علاقة الخطأ بدلالة

وإذا أخذنا $n = 2$: فنحصل على علاقة الاستيفاء المكافئية التالية:

$$P_2(x) = y_o + q\Delta y_o + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_o \qquad (4\text{-}38)$$

علاقة تربيعية فقط ٣ عقد

ملاحظة: نميز هنا إذا كانت نقاط الاستناد متساوية البعد أو مختلفة البعد فيما بينها وعند ذلك نميز حالتين

١- إذا كانت متساوية البعد فيما بينها تكون لدينا هنا من ... لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي بالنسبة لهذه النقاط بطريقة لاغرانج أو طريقة نيوتن

مثال (12)

لنأخذ الخطوة $h = 0.05$.

أنشئ كثير حدود الاستيفاء السابق لنيوتن للتابع $y = e^x$ المعطى بالجدول التالي:

٢- إذا كانت النقاط غير متساوية البعد فيما بينها لا يكون أمامنا إلا طريقة لاغرانج لإيجاد كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي

x	3.5	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36.598	38.475	40.447

الحل:

لنأخذ جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
3.50	33.115				
		1.698			
3.55	34.813		0.087		
		1.785		0.005	
3.60	36.598		0.092		-0.002
		1.877		0.003	
3.65	38.475		0.095		
		1.972			
3.70	40.447				

عندئذ نجد أن:

$$P_4(x) = 33.115 + 1.698\times q + 0.087\tfrac{q(q-1)}{2} + $$
$$+ 0.005\tfrac{q(q-1)(q-2)}{6} - 0.002\tfrac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{24}$$

حيث:

$$q = \frac{x-3.5}{0.5}$$

ويمكن إعطاء كثيرة حدود نيوتن من أجل الفروق الخلفية من خلال الدستور:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!.h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \tag{4-39}$$
$$+ ... + \frac{\nabla^n y_n}{n!.h^n}(x - x_n)...(x - x_1)$$

والتي يمكن كتابته أيضاً بدلالة q باستخدام العلاقة:

$$q = \frac{x_n - x}{h} \tag{4-40}$$

بالشكل:

$$P_n(x_n - qh) = y_n - q \ . \ \nabla y_n + \frac{q(q-1)}{2\ !} \ \nabla^2 y_n + ... + \tag{4-41}$$
$$+ (-1)^n . \ \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n\ !} \ \nabla^n y_n$$

$$= y_n - \binom{q}{1} \ \nabla y_n \binom{q}{2} \ \nabla^2 y_n + ... + (-1)^n \binom{q}{n} \ \nabla^n y_n \tag{4-42}$$

ويمكن البرهان أيضاً على أن الخطأ في الفروق الخلفية والأمامية متساوٍ بالقيمة المطلقة إذا استخدمت جميع الفروق في جدول الفروق.

مثال (13) : لتكن قيم التابع $y = \sqrt{x}$ معطاة في الجدول التالي:

x	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
y	1.00000	1.00499	1.00995	1.01489	1.01980

المطلوب: إيجاد قيمة $\sqrt{x}$ في النقطة 1.005 باستخدام طريقة نيوتن في القرون الخلفية. ثم أوجد الخطأ في هذه القيمة .

الحل: لدينا:

هذا فقط عندما العقد التي يكون البعد بينها متساوي ما كل جدول

$$q = \frac{x_n - x}{h} = \frac{7}{2} = 3.5$$

(حيث هنا $h = 0.01$ طبعاً) .

ومنه نحسب:

$$P_4(1.005)=1.01980-3.5(0.00491)+\frac{3.5(3.5-1)}{2}(-0.00003)-$$
$$-\frac{3.5(3.5-1)(3.5-2)}{6}(-0.00001)$$
$$+\frac{3.5(3.5-1)(3.5-2)(3.5-3)}{24}(-0.00002)$$
$$=1.002500156$$

(حل هذا التمرين باستخدام الفروق الأمامية)

طبعاً. هنا لدينا جدول الفروق التالي:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1.00	1.00000				
		0.00499			
1.01	1.00499		-0.00003		
		0.00496		0.00001	
1.02	1.00995		-0.00002		-0.00002
		0.00494		-0.00001	
1.03	1.01489		-0.00003		
		0.00491			
1.04	1.01980				

لاحظ أنه من أجل الفروق الأمامية فإن q المقابلة للقيمة $x = 1.005$ تساوي 0.5

لأن:

$$q=\frac{x-x_o}{h}$$

لنحسب الآن الخطأ:

$$R(x)=\frac{h^5 y^{(5)}(\xi)}{5!}q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)$$

لدينا:
$$y^{(5)}(x)=3.28125\,x^{-4.5}$$

وقيمة هذا المشتق العظمى تتحقق من أجل $x = 1$ وهي تساوي 3.28125

وبالتالي فإن:

$$R(x)=\left|\frac{(0.01)^5\times 3.28125}{120}3.5(3.5-1)(3.5-2)(3.5-3)(3.5-4)\right|$$
$$=0.08972168\times 10^{-9}$$

مطلوب برهان نظرية من أجل $\boxed{P: 1,2,3}$

(4-1-7) الاستيفاء بطريقة أيتكن Aitken's interpolation

تطبق هذه الطريقة مهما كانت نقاط التوزيع للعقد، ويمكن استخدام الاستيفاء الخطي للاغرانج:

$$P_{0,1}(x) = L_o(x)y_o + L_1(x)y_1 \tag{4-43}$$

$$= \frac{x - x_1}{x_o - x_1}y_o + \frac{x - x_o}{x_1 - x_o}y_1$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_o}\begin{vmatrix} y_o & x_o - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}$$

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$P_{o,k}(x) = \frac{1}{x_k - x_o}\begin{vmatrix} y_o & x_o - x \\ y_k & x_k - x \end{vmatrix} \tag{4-44}$$

لدينا أيضاً كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثانية ($n = 2$) تكتب بالشكل:

$$P_{o,1,2}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)}y_o + \tag{4-45}$$

$$+ \frac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)}y_2$$

والذي يمكن أن يكتب بالشكل:

$$P_{o,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} P_{o,1}(x) & x_1 - x \\ P_{o,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix} \tag{4-46}$$

وبمتابعة العمل نحصل على:

$$P_{o,1,2,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\begin{vmatrix} P_{o,1,\ldots,(n-1)}(x) & x_{n-1} - x \\ P_{o,1,\ldots,(n-2),n}(x) & x_n - x \end{vmatrix} \tag{4-47}$$

وهو كثيرة حدود من الدرجة n . للسهولة يمكن ترتيب هذه الحسابات على شكل جدول كما يلي، وذلك من أجل $n = 3$.

i	x_i	y_i	$P_{o,i}$	$P_{o,1,i}$	$P_{o,1,2,i}$	x_i-x
o	x_o	y_o				x_o-c
1	x_1	y_1	$P_{o,1}(x)$			x_1-c
2	x_2	y_2	$P_{o,2}(x)$	$P_{o,1,2}(x)$		x_2-c
3	x_3	y_3	$P_{o3}(x)$	$P_{o,1,3}(x)$	$P_{o,1,2,3}(x)$	x_3-c

هذا الجدول يعطي كثيرة حدود الاستيفاء في النقطة $x = c$. وهي $P_{o,1,2,3}(c)$ حيث نحسب هنا أول كثيرة حدود P من ا لقيمة الواقعة على يسارها مباشرة ومن أول P واقعة في عمود هذه القيمة الأخيرة ومن قيم x و $x - c$ المرافقة لقيمتي P السابقتين حيث c هي القيمة التي يطلب فيها حساب قيمة كثيرة حدود الاستيفاء.

مثال (14)

احسب قيمة كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي بطريقة أيتكن من أجل $x = 3$ للتابع المعطى قيمه بالجدول التالي:

x	0	1	2	4
y	-3	1	2	7

الحل : نرتب الجدول:

x_i	y_i	$P_{o,i}(3)$	$P_{o,1,i}(3)$	$P_{o,1,2,i}(3)$	x_i - x
0	-3				-3
1	1	9			-2
2	2	9/2	0		-1
4	7	9/2	6	3	1

علماً بأننا حسبنا القيم داخل الجدول من العلاقات التالية:

$$P_{o,1}(3)=\frac{1}{x_1-x_o}\begin{vmatrix} y_o & x_o-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=9$$

$$P_{o,2}(3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=\frac{9}{2}$$

$$P_{o,3}(3)=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 7 & 1\end{vmatrix}=\frac{9}{2}$$

$$P_{o,1,2}(3)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}P_{o,1} & x_1-x\\ P_{o,2} & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{2-1}\begin{vmatrix}9 & -2\\ 9/2 & -1\end{vmatrix}=o$$

$$P_{o,1,3}(3)=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}9 & -2\\ 9/2 & 1\end{vmatrix}=6$$

$$P_{o,1,2,3}=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix}P_{o,1,2} & x_2-x\\ P_{o,1,3} & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}o & -1\\ 6 & 1\end{vmatrix}=3$$

مثال (15) أوجد قيمة كثيرة الحدود المعطى قيمه بالجدول التالي، وذلك في النقطة "x=2" باستخدام طريقة أيتكن.

x	-2	-1	0	1	3
y	1	-2	-3	-2	6

نحسب القيم التالية: لترتيبها في الجدول الخاص بطريقة أيتكن.

$$P_{o,1}=\frac{1}{x_1-x_o}\begin{vmatrix}y_o & x_o-x\\ y_1 & x_1-x\end{vmatrix}=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-11$$

$$P_{o,2}=\frac{1}{x_2-x_o}\begin{vmatrix}y_o & x_o-x\\ y_2 & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ -3 & -2\end{vmatrix}=-7$$

$$P_{o,3}=\frac{1}{x_3-x_o}\begin{vmatrix}y_o & x_o-x\\ y_3 & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$P_{o,4}=\frac{1}{x_4-x_o}\begin{vmatrix}y_o & x_o-x\\ y_4 & x_1-x\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 6 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$P_{o,1,2}=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}P_{o,1} & x_1-x\\ P_{o,2} & x_2-x\end{vmatrix}=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}-11 & -3\\ -7 & -2\end{vmatrix}=1$$

$$P_{o,1,3}=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix}P_{o,1} & x_1-x\\ P_{o,3} & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-11 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$P_{o,1,4}=\frac{1}{x_4-x_1}\begin{vmatrix}P_{o,1} & x_1-x\\ P_{o,4} & x_4-x\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}-11 & -3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$P_{o,1,2,3}=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix}P_{o,1,2} & x_2-x\\ P_{o,1,3} & x_3-x\end{vmatrix}=\frac{1}{1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$P_{o,1,2,4}=\frac{1}{x_4-x_2}\begin{vmatrix}P_{o,1,2} & x_2-x\\ P_{o,1,4} & x_4-x\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$P_{o,1,2,3,4}=\frac{1}{x_4-x_3}\begin{vmatrix}P_{o,1,2,3} & x_3-x\\ P_{o,1,2,4} & x_4-x\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

ومنه الجدول:

x	y	$P_{o,i}$	$P_{o,1,i}$	$P_{o,1,2,i}$	$P_{o,1,2,3,i}$	$x_i - x$
-2	1					-4
-1	-2	-11				-3
0	-3	-7	1			-2
1	-2	-3	1	1		-1
3	6	5	1	1	1	1

وبالتالي فإن قيمة التابع في النقطة المطلوبة هي 1.

نذكر بأن هناك عدداً كبيراً من طرق الاستيفاء مثل طريقة بيسيل، وطريقة ستيرلنغ وطريقة إيفريت وطرق غوص (الفروق المركزية) وغيرها من الطرق وسنكتفي بالطرق المذكورة سابقاً في هذا المقرر.

تمارين

1- استخدم علاقة لاغرانج لإيجاد كثيرة الحدود التكعيبية للتابع المعطى قيمه بالجدول التالي، ثم قدر قيمة كثيرة الحدود في النقاط $x = 2,3,5$.

x_i	0	1	4	6
y_i	1	-1	1	-1

2- استخدم علاقة لاغرانج لإيجاد كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة على الأكثر للتابع المعطاة قيمه بالجدول التالي، ثم قدّر قيمة كثيرة الحدود من أجل $x = 3$.

x_i	0	1	2	4	5
y_i	0	16	48	88	0

3- باستخدام طريقة أيتكن احسب $f(0.5)$ للتابع المعطى بالجدول التالي:

x	0	0.2	0.4	0.8	1.0	1.4
y	-6.000	-5.0704	-4.2304	-2.3384	-1.0000	3.6656

(الجواب : -3.8125) .

4- باستخدام طريقة أيتكن احسب $f(0.5)$ للتابع التجريبي المعطى قيمه بالجدول التالي:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
y	0.34375	0.87616	1.47697	2.17408	3.00139	4.0000	5.21941	6.71872

(الجواب : 0.49775) .

5- أعطِ كثيرة حدود الاستيفاء لنيوتن (من أجل فروق أمامية) للتابع y المعطى بالجدول:

x	0	1	2	3	4	5
y	5.2	8.0	10.4	12.4	14.0	15.2

6- ليكن جدول القيم التالي للتابع $y = \log x$

x	y
1000	3.0000000
1010	3.0043214
1020	3.0086002
1030	3.0128372
1040	3.0170333
1050	3.0211893

المطلوب أوجد log 1044 وذلك باستخدام طريقة نيوتن من أجل فروق أمامية. ثم من أجل فروق خلفية.

7- أوجد $\sin 14^\circ$ و $\sin 56^\circ$ اعتماداً على جدول قيم التابع $y = \sin x$ بين 15° و 55° آخذاً الخطوة $h = 5^\circ$ أي أن:

x	15°	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.500	0.5736	0.6428	0.7071	0.766	0.8192

تمارين محلولة عن الاستيفاء

(1) – استخدم طريقة لاغرانج للاستيفاء الداخلي من الدرجة الأولى والثانية والثالثة :

(a)– لتقريب التابع التجريبي التالي في النقطة x=2.5:

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
f(x)	0.5103757	0.5207843	0.5104147	0.4813306	0.435916

(b)– وكذلك عند النقطة x=0 إذا كان:

x	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5
f(x)	-0.20431	-0.08993	-0.11007	0.39569	0.79845

(c)– وكذلك عند النقطة x=1.25 إذا كان:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
f(x)	0.24255	0.48603	0.86160	1.59751	3.76155

(d)– وكذلك عند النقطة x=0.5 إذا كان:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.384373

(e)– وكذلك عند النقطة x=0.2 إذا كان:

x	0.1	0.3	0.4	0.5	0.6
f(x)	1.2314028	1.9121188	2.3855409	2.9682818	3.6801169

الحل:

	قيمة التقريب	الدرجة	النقاط المستخدمة
(a)	0.4958727	1	2.4, 2.6
	0.4982120	2	2.4, 2.6, 2.2
	0.4980630	3	2.4, 2.6, 2.2, 2.8
	0.4980705	4	الجميع
(b)	0.010070	1	-0,1, 0.1
	-0.0006325	2	-0.1, 0.1, -0.3

-0.1, 0.1, -0.3, 0-3	3	-0.00063250	
جميع النقاط	4	0.00010625	
1.2, 1.3	1	1.22356	(c)
1.2, 1.3, 1.1	2	1.18451	
1.2, 1.3, 1.1, 1.4	3	1.11778	
جميع النقاط	4	1.13745	
0.4, 0.6	1	0.8629029	(d)
0.4, 0.6, 0.2	2	0.8688582	
0.4, 0.6, 0.2, 0.8	3	0.8696111	
الكل	4	0.8693047	
0.3, 0.1	1	1.5717608	(e)
0.3, 0.1, 0.4	2	1.5274061	
0.3, 0.1, 0.4, 0.5	3	1.5325585	
الكل	4	1.5316948	

(2) – استخدام النقاط التالية وفق استيفاء كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثانية أو أقل لتقريب sin 0.34 ثم أوجد الحد الأعلى للخطأ لهذا التقريب.

sin 0.30=0.29552
sin 0.32=0.31457
sin 0.35=0.34290

(3) – أضف النقطة sin 0.33=0.32404 للمعطيات في التمرين السابق لإيجاد كثيرة حدود لاغرانج من الدرجة الثالثة أو أقل. ثم قرب sin0.34 و أوجد الحد الأعلى للخطأ.

الحل : 0.33348 حد الخطأ يساوي: 5×10^{-6}

(4) – ليكن $f(x)=3xe^{x}-e^{2x}$ قرب f(1.03) مستخدماً كثيرة حدود الاستيفاء من درجة 2 او أقل. استخدم $x_0=1$، $x_1=1.05$ و $x_2=1.07$ وقارن الخطأ الحالي مع حد الخطأ المستخدم في قانون الخطأ للاغرانج.

(5) – استخدم المعطيات التالية لإيجاد كثير حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج من الدرجة الثالثة في النقطة $x=1.09$. حيث التابع المقرب هو:

$f(x)=\log_{10}\tan x$، استخدم ذلك لإيجاد الخطأ.

$$f(1.00)=0.1924 \;:f(1.05)=0.2414$$

$$f(1.10)=0.3933 \;:f(1.15)=0.3492$$

الحل: 0.2826 الخطأ 7.4×10^{-6} بدقة : 5×10^{-5}

(6) – استخدم المعطيات التالية لإيجاد كثير حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج من الدرجة الرابعة في النقطة $x=1.25$. حيث التابع المقرب هو:

$f(x)=e^{x^2-1}$، استخدم ذلك لايجاد الخطأ في هذا التقريب.

$$f(1.01)=1.00000 \;:f(1.2)=1.55271$$

$$f(1.4)=2.61170 \;:f(1.1)=1.23368:f(1.3)=1.99372$$

الحل: 4.1×10^{-4} و 1.75496

(7) – ليكن $f(x)=e^x,\quad 0\le x\le 2$، استخدم القيم المعطاة لحساب مايلي:

a) – قرب $f(0.25)$ مستخدماً الاستيفاء الخطي حيث $x_0=0$ ، $x_1=0.5$

b) – قرب $f(0.75)$ مستخدماً الاستيفاء الخطي حيث $x_0=0.5$ ، $x_1=1$

c) – قرب $f(0.25)$ و $f(0.75)$ مستخدماً كثير حدود التقريب التربيعي (من الدرجة الثانية) حيث $x_0=0$ ، $x_1=1$ و $x_2=2$

d) – أي تقريب أفضل ولماذا؟

x	0.0	0.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

الحل: (a) 1.32436 ; (b) 2.18350 ; (c) 1.15277 , 2.01191

(d) الحالتان (a), (b) تكونان الأفضل ويعود ذلك لموضع العقد.

(51) – قرب $\sqrt{3}$، مستخدماً استيفاء آيتكن للتابع $f(x)=3^x$ من أجل العقد $x_0=-2$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=0$ ، $x_3=1$ و $x_4=2$.

الحل: $1.708\bar{3}$

تمارين عن الفروق المقسومة

(8) : ليكن لدينا الجدول التجريبي التالي:

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
f(x)	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

والمطلوب : 1- كتابة جدول الفروق المقسومة

3- حساب علاقة الاستيفاء الداخلي لنيوتن مستخدماً جدول الفروق المقسومة

4- احسب $P_4(1.5)$

الحل: 1-

i	x_i	$f(x_i)$	$[x_{i-1}, x_i]$	$[x_{i-1}, x_i]$	$[x_{i-1}, x_i]$	$[x_{i-1}, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.6200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

2- لدينا:

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-0.1) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) +$$
$$+ 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) + 0.0018251(x-1.0).$$
$$.(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).$$

-3 $P_4(0.5) = 0.5118200$

(9) – قرب $f(0.05)$، مستخدماً طريقة الفروق المقسومة لنيوتن للتابع التجريبي التالي:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	1.00000	1.22140	1.49180	1.82212	2.22554

(10) – قرب مستخدماً طريقة الفروق المقسومة لنيوتن التابع التجريبي التالي والذي يمثل جدول عدد السكان في أمريكا:

السنة	1930	1940	1950	1960	1970	1980
عدد السكان بالمليون	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

مطلوب من هنا إلى ص ١٩٥ معطل

الفصل الخامس
الاشتقاق والتكامل العدديان

يتم عادة حساب قيم المشتقات لتابع حقيقي $y = f(x)$ من خلال تعريف المشتق في التحليل الحقيقي ولكن مسألة حساب قيمة هذا المشتق (من أي مرتبة في نقطة ما) لتابع معين بدلالة قيمه في عدة نقاط فقط يتم من خلال أخذ كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي $P_n(x)$ للاغرانج أو نيوتن أو ... بدلاً من التابع نفسه، بمعنى آخر: إن المشتقات التقريبية لتابع $y(x)$ يمكن إيجادها من كثيرة حدود التقريب $P_n(x)$ وذلك بقبول $P_n''(x), P_n'(x)$ بدلاً من $y''(x)$, $y'(x)$ و ... (على الترتيب) وكما هو معلوم فإن هناك كثيرات حدود (استيفاء) تقريبية متعددة وبالتالي يوجد عدد واسع من الصيغ المفيدة من هذا النوع ويمكن مناقشة عدد من هذه الصيغ.

ويمكن أن نكتب:

$$y(x)=P_n(x)+E(x)$$

حيث $E(x)$ هو الخطأ لهذا التقريب .

وكذلك:

$$y^{(k)}(x)=P_n^{(k)}(x)+E^{(k)}(x) \qquad k=1,2,...,$$

(5-1) الاشتقاق العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن (ذات فروق أمامية):

طبعاً في هذه الحالة وكما هو معلوم فإن نقاط توزيع العقد تكون متساوية البعد. وباستخدام كثيرة حدود الاستيفاء لنيوتن ذات الفروق الأمامية يمكن الحصول على العبارات التالية:

$$\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h} \qquad (5\text{-}1)$$

حيث $q=\dfrac{x-x_o}{h}$

$$y'=\frac{dP_n(x_o+qh)}{dx}=\frac{1}{h}\left(\Delta y_o+\frac{(2)q-1}{2}\Delta^2 y_o+\frac{(3)q^2-(6)q+2}{6}\Delta^3 y_o\right)+$$

$$+\ \frac{(2)q^3-(9)q^2+(11)q-3}{12}\Delta^4 y_o+\ldots \qquad (5-2)$$

$$y''=\frac{d^2P_n}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o+(q-1)\Delta^3 y_o\frac{(6)q^2-(18)q+11}{12}\Delta^4 y_o+\ldots\right] \qquad (5\text{-}3)$$

$$y'''=\frac{d^3P_n}{dx^3}=\frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_o+\frac{(2)q-3}{2}\Delta^4 y_o+\ldots\right) \qquad (5\text{-}4)$$

$$y^{(4)}=\frac{d^4P_n}{dx^4}=\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_o+\ldots\right)$$

....

$$y^{(n)}=\frac{d^nP_n}{dx^n}=\frac{1}{h^n}\left(\Delta^n y_o+\ldots\right) \qquad (5\text{-}5)$$

وحيث $x=x_o+q-h$

أو العلاقات المقابلة بدلالة x أي من أجل $q=o$ وبالتالي $x=x_o$:

$$y'(x_o)=\frac{dP_n(x_o)}{dx}=\frac{1}{h}\left(\Delta y_o-\frac{1}{2}\Delta^2 y_o+\frac{1}{3}\Delta^3 y_o-\frac{1}{4}\Delta^4 y_o+\tfrac{1}{5}\Delta^5 y_0+\cdots\right) \quad (5\text{-}6)$$

$$y''(x_o)=\frac{d^2P(x_o)}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_o-\Delta^3 y_o+\frac{11}{12}\Delta^4 y_o-\frac{5}{6}\Delta^5 y_o+\ldots\right) \quad (5\text{-}7)$$

$$y'''(x_o)=\frac{d^3P(x_o)}{dx^3}=\frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_o-\frac{3}{2}\Delta^4 y_o+\frac{7}{4}\Delta^5 y_o+\ldots\right) \qquad (5\text{-}8)$$

$$y^{(4)}(x_0)=\frac{d^4P_n(x_0)}{dx^4}=\frac{1}{h^4}\left(\Delta^4 y_o-2\Delta^5 y_0+\ldots\right)$$

وكذلك يمكن حساب الخطأ في المشتق الأول لكثيرة حدود من الدرجة الأولى في هذه الحالة تعطى بالعبارة:

$$\varepsilon_1(x) = \frac{h}{2}(2q-1)y''(\xi) \qquad (5\text{-}9)$$

(برهن ذلك)

أو العبارة المقابلة من أجل $q = o\ (x = x_o)$: $\varepsilon_1(x_0) = -\frac{h}{2}y''(\xi)$

ومن أجل $n = 2$ نجد أن: $\varepsilon_2(x) = \frac{h^2}{6}(3q^2 - 6q + 2)y^{(3)}(\xi)$

أو العبارة المقابلة من أجل $q = o\ (x = x_o)$: $\varepsilon_2(x_0) = \frac{h^2}{3}y^{(3)}(\xi)$

ويمكن البرهان على أن عبارة الخطأ من أجل كثيرة حدود من الدرجة n في النقطة $(x = x_o)$ تعطى بالعبارة:

$$\varepsilon_n(x_o) \equiv (-1)^n \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(\xi) \qquad (5\text{-}10)$$

حيث ξ بين $x_o, x_1, \ldots, x_n$, x

وإذا كانت h صغيرةً جداً يمكن اعتبار أن:

$$\varepsilon_n(x_o) \approx \frac{(-1)^n}{h} \frac{1}{n+1} \Delta^{n+1} y_o \qquad (5\text{-}11)$$

حيث يمكن اعتبار أن:

$$y^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}} \qquad (5\text{-}12)$$

مثال (1):

ابحث عن $y'(50)$ للتابع $y = \lg x$ المعطى بالجدول التالي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1.6990			
		0.0414		
55	1.7404		-0.0036	
		0.0378		0.0005
60	1.7782		-0.0031	
		0.0347		
65	1.8129			

هنا لدينا h = 5 ، وبالتالي لدينا:

$$y'(50)=\frac{1}{5}(0.0414+0.0018+0.001666)=0.008973$$

مثال (2)

إن المسافة y = f(t) المقطوعة بوساطة نقطة مادية متحركة منحنية خلال الزمن t تعطى بالجدول التالي:

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y(t)	0.00	1.519	6.031	13.397	23.396	35.721

0.06	0.07	0.08	0.9
50.000	65.798	82.635	100.000

استخدم الفروق حتى المرتبة الخامسة لإيجاد السرعة $V=\frac{dy}{dt}$ والتسارع $W=\frac{d^2y}{dt^2}$ التقريبين للنقطة في اللحظات:

$$t=0\ ;\quad 0.01\ ;\quad 0.02\quad ;\quad 0.03\quad ;\quad 0.04$$

الحل:

لنشكل جدول الفروق :

i	t_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	0.00	0.00	1.519	2.993	-0.139	-0.082	-0.004
1	0.01	1.519	4.512	2.854	0.221	-0.086	0.021
2	0.02	6.031	7.366	2.633	-0.307	-0.065	0.002
3	0.03	13.397	9.999	2.336	-0.372	-0.063	0.018
4	0.04	23.396	12.325	1.954	-0.435	0.045	0.014
5	0.05	35.721	14.279	1.519	-0.480	0.031	
6	0.06	50.000	15.798	1.039	-0.511		
7	0.07	65.798	16.837	0.528			
8	0.08	82.635	17.365				
9	0.09	100.000					

لدينا h = 0.01 وبتطبيق العلاقات السابقة نجد أن:

$$V(o) = 100(1.519 - 1.496 - 0.046 + 0.020 - 0.001)$$
$$= -0.4 \text{ cm/s}$$
$$W(o) = 10000\,(2.995 + 0.139 - 0.075 + 0.003)$$
$$= 30600 \text{ cm/s}^2$$

إن بقية قيم V و W تعطى بالجدول التالي، مع ملاحظة أن قانون الحركة يعطى بالعلاقة:

$$y = 100\left(1 - \cos\frac{50\pi t}{9}\right)$$

ومنه:

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{5000\pi}{9}\sin\frac{50\pi t}{9}$$

و

$$W = \frac{dy}{dt^2} = \frac{250000\pi^2}{81}\cos\frac{50\pi t}{9}$$

وحيث إن العمودين الأخيرين $\tilde{W}, \tilde{V}$ في هذا الجدول يمثلان القيم الحقيقية (للمقارنة مع القيم التقريبية)

t	V	W	$\tilde{V}$	$\tilde{W}$
0.00	−0.4	30600	0.00	30462
0.01	303.6	29780	303.08	30001
0.02	596.3	28780	596.98	28625
0.03	873.2	26.250	872.66	26381
0.04	1121.7	23.360	1121.9	23340

(5-2) الاشتقاق العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء لنيوتن (ذات الفروق الخلفية)

فقرة غير مطلوبة

يمكن أيضاً استخدام كثيرة حدود نيوتن ذات الفروق الخلفية والحصول على المشتقات المقربة التالية:

$$q = \frac{x_n - x}{h} \tag{5-14}$$

حيث:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{1}{h} \qquad (5\text{-}15)$$

$$y'(x) = \frac{d\ P_n(x)}{dx} = -\frac{1}{h}\left[-\nabla y_n + \frac{2q-1}{2}\nabla^2 y_n - \frac{3q^2-6q+2}{6}.\nabla^3 y_n + \right. \qquad (5\text{-}16)$$

$$\left. + \ \frac{4q^3 - 18.q^2 + 22.q - 6}{24}\ \nabla^4 y_n + ...\right]$$

(5-17)

$$(5\text{-}\ y''(x) = \frac{d^2\,P_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n - (q-1)\nabla^3 y_n + \frac{6q^2 - (18)q + 11}{12}\nabla^2 y_n + ...\right]$$

$$y^{(3)}(x) = \frac{d^3\ \ P_n(x)}{dx^3} = -\frac{1}{h^3}\ \left[-\nabla^3 y_n + \ \frac{(4)q-6}{4}\ .\ \nabla^4 y_n + ...\right] \quad 18)$$

وعند النقطة $x = x_n$ $(q = o)$ تصبح هذه العلاقات بالشكل:

$$y'(x) = \frac{d\,P_n(x)}{dx} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}.\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\ \nabla^3 y_n + \right. \qquad (5\text{-}19)$$

$$\left. + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + ...\right]$$

$$y''(x_n) = \frac{d^2\,P_n(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + ...\right] \qquad (5\text{-}20)$$

$$y^{(3)}(x_n) = \frac{d^3\,P_n(x)}{dx^3} = \frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 y_n + \frac{3}{2}.\nabla^4 y_n + ...\right] \qquad (5\text{-}21)$$

وكذلك يعطى الخطأ $\varepsilon_1(x)$ في المشتق الأول عند استخدام كثيرة حدود استيفاء نيوتن الخطية ذات فروق خلفية بالشكل:

$$\varepsilon_1(x) = y'(x) - P_1'(x) = -\frac{h}{2}(2q-1)y''(\xi) \qquad (5\text{-}22)$$

وعندما $q = o$ $(x = x_n)$

$$\varepsilon_1(x_n) = \frac{h}{2}y''(\xi) \qquad (5\text{-}23)$$

وهكذا نجد أن الخطأ $\varepsilon_n(x_n)$ عند استخدام كثيرة حدود استيفاء لنيوتن من الدرجة n وذات فروق خلفية:

$$\varepsilon_n(x_n) = y'(x_n) - P'_n(x_n) = \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(\xi) \qquad (5\text{-}24)$$

وهي قيمة تساوي مطلقاً للخطأ من أجل الفروق الأمامية السابقة.

ملاحظة: هناك كما ذكرنا عدد كبير من كثيرات الحدود التقريبية مثل كثيرة حدود لاغرانج وستيرلينغ وغيرهما ... وبالتالي يمكن الحصول على عدد كبير من صيغ الاشتقاق العلدي – التقريبي – وقد اكتفينا في هذا المقرر بذكر الطريقتين السابقتين.

(3-1)- الاشتقاق العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج:

يمكننا أيضاً إعطاء عبارة المشتق **العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج** وذلك من أجل عقد استيفاء متساوية البعد فيما بينها ولنفرض أن الخطوة بين العقد تساوي h معرفة بالشكل: $x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0,1,2,....,n-1$ والتابع f(x) معطى تجريبي بالقيم: $y_i = f(x_i) \quad , \quad i = 0,1,2,....,n$ إن كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج وكما هو معلوم سابقاً تعطى بالعبارة:

$$(1\text{-}33)\; P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=o}^{n} y_i . L_i(x)$$

حيث:

$$L_i(x_k) = \begin{cases} o & : \quad i \neq k \text{ عندما} \\ 1 & : \quad i = k \text{ عندما} \end{cases} \quad \text{و} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{k=o \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

و:

$$P_n(x_k) = \sum_{i=o}^{n} f(x_i) . L_i(x_k) = f(x_k)$$

وبأخذ: $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$ وحيث $q = \frac{x - x_o}{h}$ وبكتابة علاقة الاستيفاء السابقة بدلالة q نجد أن:

$$P_n(x) \approx \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!.i!} \frac{q.(q-1)......(q-n)}{q-i} y_i \qquad (1\text{-}34)$$

وبالاشتقاق نجد أن:

$$y'(x) = P_n'(x) \approx \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{(n-i)!\,i!}\frac{d}{dq}\left[\frac{q.(q-1).\ldots.(q-n)}{q-i}\right] \tag{1-35}$$

وبأخذ $n = 2$ ، أي أخذ ثلاث نقاط استيفاء (تجريبية) نجد أن:

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}y_0(q-1).(q-2) - y_1 q.(q-2) + \tfrac{1}{2}y_2 q.(q-1) \tag{1-36}$$

وبالتالي نجد أن:

$$P_2'(x) = \tfrac{1}{h}[\tfrac{1}{2}y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \tfrac{1}{2}y_2(2q-1) \tag{1-37}$$

حيث أن: $\frac{dx}{dq} = h$ وبأخذ قيم المشتقات في نقاط الاستيفاء بالشكل: $P_n'(x_i) = y_i'$ نحصل على العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} y_0' &= \tfrac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) \\ y_1' &= \tfrac{1}{2h}(-y_1 + y_2) \\ y_2' &= \tfrac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{1-38}$$

وبالنسبة لعبارة الخطأ في حساب المشتق نحصل عليها من العبارة:

$$R_n(x) = y(x) - P_n(x)$$

وبالتعويض والاشتقاق (حيث نفرض أن : $y(x) \in C^{(n+2)}$) نحصل على العبارة:

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i}h^n \frac{i!.(n-i)!}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi) \tag{1-39}$$

حيث أن: $\xi \in [a,b]$ وبالتالي من أجل الحالة السابقة نجد أن الخطأ في حساب المشتقات: y_0' و y_1' و y_2' على الترتيب يعطى بالعلاقات:

$$\begin{aligned} R_0 &= \tfrac{1}{3}h^2 y^{(3)}(\xi_0) \\ R_1 &= -\tfrac{1}{6}h^2 y^{(3)}(\xi_1) \\ R_2 &= \tfrac{1}{3}h^2 y^{(3)}(\xi_2) \end{aligned} \tag{1-40}$$

كما يمكننا حساب القيم التقريبية لهذه المشتقات من أجل n=3 او n=4 و...وغيرها من القيم حيث يكون التابع التجريبي معطى بأربع نقاط او خمس نقاط (على الترتيب) فمن أجل n=3 (أربع نقاط) نجد أن:

$$y'_0 = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi)$$
$$y'_1 = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi)$$
$$y'_2 = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi) \qquad (1\text{-}41)$$
$$y'_3 = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi)$$

ومن اجل n=4 (خمس نقاط) نجد أن:

$$y'_0 = \frac{1}{12h}(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5} y^{(5)}(\xi)$$
$$y'_1 = \frac{1}{12h}(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi)$$
$$y'_2 = \frac{1}{12h}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30} y^{(5)}(\xi)$$
$$y'_3 = \frac{1}{12h}(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{h^4}{20} y^{(5)}(\xi)$$
$$y'_4 = \frac{1}{12h}(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{4} y^{(5)}(\xi) \qquad (1\text{-}42)$$

(4-1)- الاشتقاق العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لستيرلنغ:

إن من مساوئ علاقات الاشتقاق العددي السابقة للتابع y في النقطة $x = x_0$ أنها لاتستخدم سوى القيم الأحادية الجانب للتابع من أجل $x > x_0$. بينما علاقات الاشتقاق التناظرية التي تلاحظ قيم التابع المعطى من أجل $x > x_0$ كما هو من أجل $x < x_0$. هذه العلاقات تسمى بشكل عام علاقات اشتقاق بفروق مركزية . سنذكر فيما يلي واحدة من هذه العلاقات وذلك انطلاقاً من علاقة الاستيفاء الداخلي لستيرلينغ.

لتكن : $\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ مجموعة من النقاط المتساوية البعد فيما بينها بخطوة: $x_{i+1} - x_i = h$ و $y_i = f(x_i)$ القيم الموافقة للتابع المعطى y=f(x) ويفرض أن : $q = \frac{x - x_o}{h}$ وبالتعويض مع ملاحظة أن التابع y تقريبياً هو كثير حدود ستيرلينغ، نحصل على العلاقة:

مثال (3): أوجد قيمة المشتق في صفر التابع y(x) المعطى قيمه في الجدول التجريبي التالي:

x	1.80	1.82	1.84	1.86	1.88	1.90
y	0.5815170	0.5817731	0.5818649	0.5817926	0.5815566	0.5811571

الحل: بإتمام الجدول السابق بجدول الفروق الآتي:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.80	0.5815170			
		2561		
1.82	0.5817731		-1643	
		918		2
1.84	0.5818649		-1641	
		-723		4
1.86	0.5817926		-1637	
		-2360		2
1.88	0.5815566		-1635	
		-3995		
1.90	0.5811571			

وباستخدام الفروق التي تحتها خط نجد أن:

$$0 = \frac{918-723}{2} + q(-1641) + \frac{3q^2-1}{6} \cdot \frac{2+4}{2}$$

أي: $0 = 97 + -1641q + \frac{3}{2}q^2$ وبالتالي نجد أن:

$$q = \frac{97}{1641} + \frac{1}{1094}q^2 \qquad (1\text{-}43)$$

وبإهمال الحد غير الخطي في هذه العلاقة نجد التقريب الأول:
$q^{(1)} = \frac{97}{1641} = 5.911.10^{-2}$ يمكننا تحسين هذه القيمة من خلال العلاقة (1-43) فنجد التقريب الثاني التالي:

$$q^{(2)} = q^{(1)} + \frac{1}{1094}[q^{(1)}]^2 = 5.911.10^{-2} + \frac{1}{1094}3.494.10^{-3} = 5.911.10^{-2}$$

ويمكننا أن نفرض إن q=0.05911 ومنه:

$$x = x_0 + qh = 1.84 + 0.05911.0.02 = 1.8411822$$

وبالتالي: y'(1.8411822)=0

تمارين

1- إذا كانت قيم التابع $y(x)$ معطاة بالجدول التالي:

x	50	55	60	65
y	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

المطلوب:

- أوجد $y'(50)$ باستخدام الفروق الخلفية لنيوتن .

2-لنأخذ التابع $y=\sqrt{x}$ المعطى قيمه بالجدول:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
y	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

المطلوب:

- أوجد $P'(1)$, $P''(1)$, $P^3(1)$ باستخدام الفروق الأمامية لنيوتن.
- أوجد $P'(1.1), P''(1.1), P'''(1.1)$ باستخدام الفروق الأمامية لنيوتن.
- أوجد $P'(1.1)$ باستخدام الفروق الخلفية لنيوتن .
- احسب الخطأ في حساب $P'(1.1)$ في الطريقتين السابقتين.

(5-3) – التكامل العددي: مطلوب

تستخدم طريقة التكامل العددي عادة لحساب قيمة التكاملات للتوابع وذلك عندما لا نستطيع حساب هذه التكاملات تحليلياً أو عندما يكون التابع المكامل معرفاً بقيمه فقط. هناك عدد كبير من الطرق المستخدمة لحساب التكاملات عددياً وسنذكر هنا بعضاً من هذه الطرق:

(5-3-1) علاقات نيوتن – كوتس: نظري

لحساب التكامل :

مطلوبة

$$I = \int_a^b f(x).dx \qquad (5\text{-}25)$$

نقوم بالاستعاضة عن التابع المستكمل f(x) بكثيرة حدود استيفاء داخلي ولتكن هنا كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي للاغرانج P.(x) ، ولنجزئ المجال (a,b) إلى n جزءاً متساوياً وبفرض أن $h = \frac{b-a}{n}$ بوساطة النقاط $i=o,1,2,\dots,n$ ؛ $x_i = a + ih$.

وحيث إن $y_i = f(x_i)$ ، عندئذ يمكن إعطاء التكامل العددي بالعلاقة:

$$I_n = \sum_{i=o}^{n} g_i^{(n)}.y_i \qquad (5\text{-}26)$$

تكامل الخطأ
هو خطأ التكامل

لنبدل الآن قيمة كثيرة حدود لاغرانج:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b f(x).dx = \int_a^b \sum_{i=o}^{n} L_i^{(n)}(x).y_i.dx \\ &= \sum_{i=o}^{n} y_i \int_a^b L_i^{(n)}(x).dx = \sum_{i=o}^{n} g_i^{(n)}.y_i \end{aligned} \qquad (5\text{-}27)$$

حيث إن: $L_i^{(n)}(x)$ كثيرة حدود لاغرانج.

و

$$g_i^{(n)} = \int_a^b L_i^{(n)}(x).dx$$

($g_i^{(n)}$ تسمى ثوابت الطريقة المستخدمة في التكامل العددي).

لنأخذ الآن الحالات التالية لـ n:

1- عندما n = 1 فنحصل على: نظري

$$\begin{aligned} g_o^{(1)} &= \int_a^b L_o^{(1)}(x).dx = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_o - x_1}.dx = \\ &= h.\int_o^1 (1-q).dq = \frac{h}{2} \end{aligned}$$

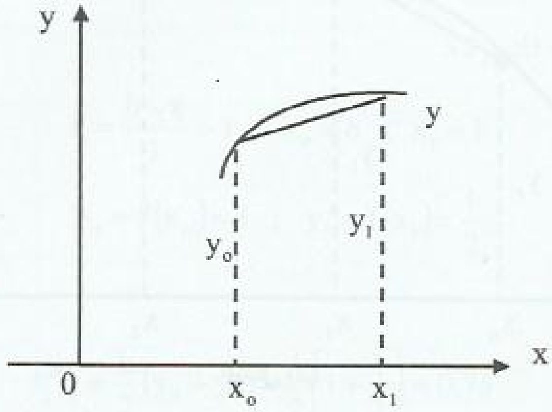
(حيث : $x = x_o + qh$).

 مطلوبة

وبالتالي من أجل نقطتين نجد أن صيغة التكامل تأخذ الشكل:

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_o + y_1) \tag{5-28}$$

تعرف هذه الصيغة باسم صيغة شبه المنحرف لأنها عبارة عن مساحة شبه منحرف كقيمة تقريبية للتكامل بدلاً من المساحة بين المنحني ومحور السينات والمستقيمين $y = x_o$ و $y = x_1$ كما في الشكل (1)



الشكل (1)

2- الحالة $n = 2$: نظري

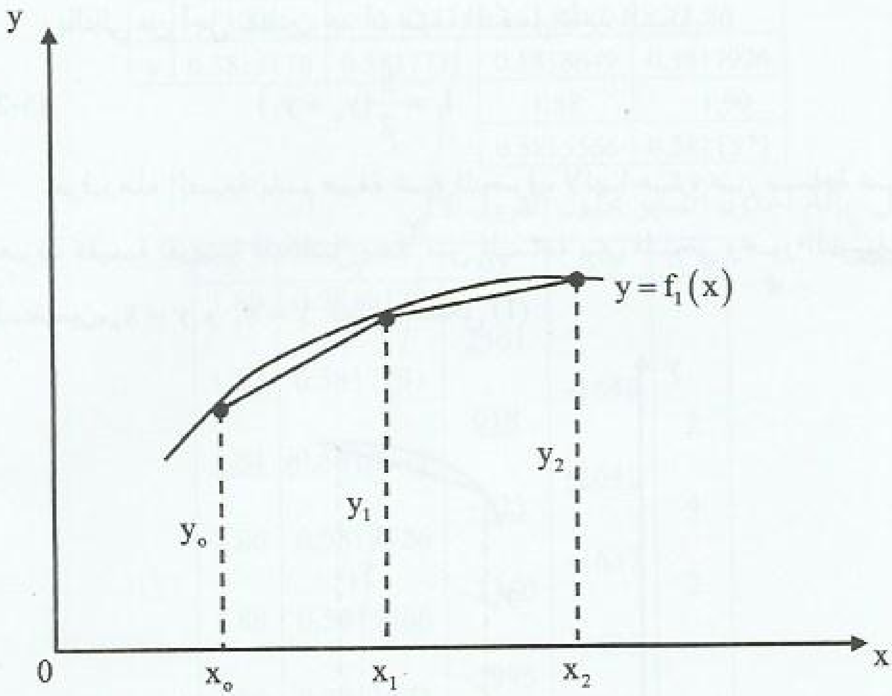
باستخدام نفس العمل في حالة $n = 1$ نجد أن:

$$g_o^{(2)} = \frac{h}{3} \;;\; g_1^{(2)} = \frac{4h}{3} \;;\; g_2^{(2)} = \frac{h}{3}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل التقريبية في هذه الحالة هي:

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2) \tag{5-29}$$

تعرف هذه الصيغة باسم " صيغة سيمبسون" للتكامل العددي. الشكل (2) يبين آلية الحساب وفق هذه الصيغة.



الشكل (2)

3- من أجل $n = 3$: نظري

نحصل على الصيغة التالية:

$$I_3 = \frac{3}{8} h(y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \qquad (5\text{-}30)$$

وتسمى هذه الصيغة " بصيغة $\frac{3}{8}$ "

4- من أجل $n = 4$

نحصل على الصيغة:

$$I_4 = \frac{2}{45} h(7y_o + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) \qquad (5\text{-}31)$$

وتعرف هذه العلاقة باسم " صيغة بول "

مثال (1):

احسب التكامل:

$$I=\int_{o}^{1}\frac{dx}{1+x}$$

مستخدماً الطرق السابقة.

الحل:

بطريقة شبه المنحرف:

$$h=\frac{b-a}{1}=1\ ;\ \ x_o=o\ \ ;\ \ x_1=1$$

$$y_o=f(x_o)=1\ \ ;\ \ y_1=f(x_1)=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$I_1=\frac{h}{2}(y_o+y_1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=0.75$$

بطريقة سيمبسون:

$$h=\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}\ ;\ \ _o=o\ ;\ x_1=\frac{1}{2}\ ;\ x_2=1$$

$$y_o=f(x_o)=1\ ;\ \ y_1=f(x_1)=\frac{2}{3}\ ;\ \ y_2=f(x_2)=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$I_2=\frac{h}{3}(y_o+4y_1+y_2)=\frac{1}{6}\left(1+4\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{25}{36}\approx 0.69444444$$

بطريقة $\frac{3}{8}$:

$$h=\frac{b-a}{3}=\frac{1}{3}\ ;\ x_o=o\ ;\ x_1=\frac{1}{3}\ ;\ x_2=\frac{2}{3}\ ;\ x_3=1$$

$$y_o = f(x_o) = 1 \;;\; y_1 = f(x_1) = \frac{3}{4}$$

$$y_2 = f(x_2) = \frac{3}{5} \;;\; y_3 = f(x_3) = \frac{1}{2}$$

ولدينا:

$$I_3 = \frac{3}{8} h(y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

ومنه:

$$I_3 = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{111}{160} = 0.69375$$

أما من أجل صيغة بول فإننا نجد:

$$h = \frac{1}{4} \;;\; x_o = o \;;\; x_1 = \frac{1}{4} \;; x_2 = \frac{1}{2} \;;\; x_3 = \frac{3}{4} \;;\; x_4 = 1$$

$$y_o = 1 \;;\; y_1 = \frac{4}{5} \;;\; y_2 = \frac{2}{3} \;;\; y_3 = \frac{4}{7} \;;\; y_4 = \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$I_4 = \frac{2h}{45}(7y_o + 32y_1 + (2y_2 + 32y_3 + 7y_4))$$

$$= \frac{1}{90}\left(7 + \frac{128}{5} + \frac{24}{3} + \frac{128}{7} + \frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{13101}{18900} \approx 0.6931746$$

الآن لو حسبنا القيمة الحقيقية للتكامل نجد أنها تساوي : $I = \ln 2 = 0.69315$

(5-3-2) حساب الخطأ (في علاقات نيوتن – كوتس) : حيّز

إن الخطأ في حساب التكاملات السابقة يحسب كما يلي:

$$\varepsilon_n(x) = I - I_n = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b P_n(x).dx$$

ولكن نعلم من حساب كثيرة حدود الاستيفاء للاغرانج أن خطأ الاستيفاء هو:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=o}^{n}(x-x_i) \tag{5-32}$$

وبتعويض هذه القيمة في العبارة السابقة لـ $\varepsilon_n(x)$ نجد:

$$\varepsilon_n(x)=\int_a^b\left[f(x)-P_n(x)\right]dx=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=o}^{n}(x-x_i)dx \tag{5-33}$$

لنبدأ بتعويض قيم n المتتالية لحساب أخطاء كل من الطرق السابقة في التكامل:

1- من أجل $n=1$ نجد أن الخطأ في قاعدة شبه المنحرف هو:

$$\varepsilon_1(x)=-\frac{h^3}{12}f''(\xi) \tag{5-34}$$

2- من أجل $n=2$ نحسب الخطأ في قاعدة سيمبسون:

$$\varepsilon_2(x)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \tag{5-35}$$

(في العبارات السابقة طبعاً استخدمنا لحساب التكامل العبارات:

$$\begin{cases} x-x_o=qh \\ x-x_1=(q-1)h \end{cases}$$

وكذلك من أجل $n=3$:

نجد الخطأ

$$\varepsilon_3(x)=-\frac{3}{80}h^5f^{(4)}(\xi) \tag{5-36}$$

ومن أجل $n=4$ نجد أيضاً أن:

$$\varepsilon_4(x)=-\frac{8}{945}h^7 . f^{(6)}(\xi) \tag{5-37}$$

وهكذا يمكن حساب الأخطاء من أجل قيم n المتتالية.

إن خطوات خوارزمية طريقة شبه المنحرف هي:

1- إدخال b, a طرفي المجال ، EPS الدقة و n عدد نقاط التجزئة .

2- ضمن حلقة من I = 1(1) احسب:

$$S = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} \left[f(a+ih)+f(a+(i-1)h)\right]$$

3- يتم التوقف عن الحساب من أجل الفرق بين قيمتين متتاليتين أقل من EPS .

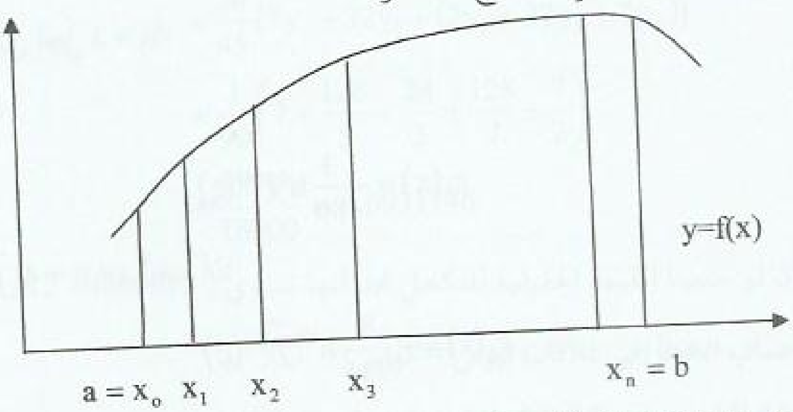
كما أن خطوات خوارزمية طريقة سيمبسون هي نفس خطوات خوارزمية طريقة شبه المنحرف مع استبدال دستور طريقة شبه المنحرف بدستور طريقة سيمبسون.

تعميم العلاقات السابقة:

يمكن تحسين القيم السابقة وذلك بزيادة عدد نقاط التقسيم السابقة، أي تصغير قيم المجالات الجزئية إلى n قسم وحساب قيمة التكامل على كل مجال جزئي حسب الطريقة المذكورة سابقاً ثم جمع هذه القيم مبينين أن عملية حساب أمثال كوتس عملية معقدة عندما يكون عدد النقاط كبيراً ولذلك تم تعميم هذه العلاقات للحساب التقريبي للتكاملات كما يلي:

(5-3-3) قاعدة شبه المنحرف (المركبة):

بأخذ الشكل التالي، والجمع كما ذكرنا



نحصل على العلاقة العامة (المركبة) التالية :

تعميم شبه المنحرف $I_1 = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_o)+2\left(f(x_1)+f(x_2)+\dots f(x_{n-1})\ \right)+f(x_n)\right]$ (5-38)

الأخطاء لم تعمم *

مثال (2)

احسب $I = \int_0^4 e^x \, .dx$

باستخدام طريقة شبه المنحرف وذلك بتقسيم المجال (0,4) إلى أربعة أقسام متساوية:

الحل:

لدينا هنا $h = 1$

ومنه بتطبيق علاقة شبه المنحرف المركبة نجد أن:

$$I = \frac{1}{2}\left[e^o + 2\left(e^1 + e^2 + e^3\right) + e^4\right] = 57.991950$$

إن الحل الدقيق هو:

$$I = e^4 - e^o = 53.598150$$

مثال (3)

احسب $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

باستخدام قاعدة شبه المنحرف مستخدماً $h = 0.25$, $h = 0.5$, $h = 1.0$

الحل:

من أجل $h = 1$

$$I = \frac{1.0}{2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right] = 0.625$$

من أجل $h = 0.5$

$$I = \frac{0.5}{2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{2}{1.5^2} + \frac{1}{2^2}\right] = 0.534722$$

من أجل $h = 0.25$:

$$I = \frac{0.25}{2}\left[\frac{1}{1^2} + 2\left(\frac{1}{1.25^2} + \frac{1}{1.5^2} + \frac{1}{1.75^2}\right) + \frac{1}{2^2}\right] = 0.508993$$

(5-3-4) حساب الخطأ بطريقة شبه المنحرف (المركبة):

أما الخطأ في هذه الطريقة فيساوي مجموع الأخطاء في كل جزء من الأجزاء أي نحسب الخطأ في كل مجال جزئي من المجالات n ونجمع فنحصل على الخطأ:

$$\varepsilon_1 = -\frac{h^2}{12}(b-a).y''(\xi) \qquad (5\text{-}39)$$

حيث $\xi \ni (a,b)$ ونجعل المشتق $y''(\xi)$ أكبر ما يمكن وكذلك نجد أن :

$$|\varepsilon_1| \le \frac{h^2}{12}(b-a).M \qquad (5\text{-}40)$$

حيث:

$$M = \max y''(\xi)$$
$$a \le \xi \le b$$

بنفس الطريقة يمكن تعميم قاعدة سيمبسون:

(5-3-5) قاعدة سيمبسون (المركبة):

بنفس الطريقة السابقة نطبق هذه القاعدة على المجالات الجزئية وعددها $\frac{n}{2}$ ونجمع فنحصل على العلاقة:

$$I_2 = \frac{b-a}{3n}\Big[f(x_o) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\big) + f(x_n)\Big] \qquad (5\text{-}41)$$

لاحظ أنه لتطبيق هذه العلاقة يجب أن يكون n زوجياً.

(5-3-6) حساب الخطأ بطريقة سيمبسون (المركبة):

بحساب الخطأ في طريقة سيمبسون المركبة أيضاً نجد أن:

حطها مكانك

$$\varepsilon_2 = -\frac{(b-a)}{180} h^4 . y^{(4)}(\xi) \qquad (5\text{-}42)$$

حيث ξ نقطة تنتمي أيضاً للمجال (a,b) وتجعل المشتق $y^{(4)}(\xi)$ أكبر ما يمكن، مع ملاحظة أن هذه الطريقة طبقت على $\frac{n}{2}$ مجالاً جزئياً.

ملاحظة (2): يمكن تعميم بقية الطرق طبعاً مثل طريقة الـ $\frac{3}{8}$ وطريقة بول بنفس الأسلوب السابق.

مثال (4) من هنا إلى ص ٢٣٧ لم يعطى

احسب $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ مستخدماً قاعدة سيمبسون من أجل $h = 0.5$ و $h = 0.25$.

الحل: من أجل $h = 0.5$

$$I = \frac{0.5}{3}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{4}{1.5^2} + \frac{1}{2^2}\right] = 0.504630$$

من أجل: $h = 0.25$

$$I = \frac{0.25}{3}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{4}{1.25^2} + \frac{2}{1.5^2} + \frac{4}{1.75^2} + \frac{1}{2^2}\right] = 0.500418$$

إن الحل التحليلي لهذا المثال هو:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -x^{-1}\Big|_1^2 = 0.500000$$

وهذا يبين دقة الحل بالطرق السابقة.

مثال (5)

احسب $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\,.dx$

مستخدماً الجدول التالي الذي يعطي قيم التابع $\sqrt{x}$:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
y	1.0000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

وذلك باستخدام قاعدة شبه المنحرف ، حيث الخطـوة $h = 0.05$ واحـسب الخطأ المرتكب في ذلك.

الحل:

$$\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\ .\ dx \approx \frac{0.05}{2}\ [1+2(1.02470+1.04881+1.072381+$$

$$+\ 1.09544+1.11803)\ \ +1.14017\ ]\approx\ 0.32147$$

إن القيمـة الدقيقـة هـي : $\frac{2}{3}\left[(1.3)^{3/2}-1\right]=0.32149$ فالخطأ الفعلي هـو : 0.00002 .

ولحساب الخطأ حسب القانون السابق:

$$\varepsilon_1 = -\frac{h^2}{12}(b-a).y''(\xi)$$

نحسب الحد الأعلى للمشتق الثاني:

$$|\,y''(x)|=\left|-\frac{1}{4}x^{-3/2}\ \right|<\frac{1}{4}$$

(نحصل عليه عند النقطة $x = 1$) . ومنه فإن:

$$|\ \varepsilon_1\ |<\ \frac{(0.3)^3}{12\ \times\ 36\ \times\ 4}=0.000015625<0.000016$$

مثال (6)

حل المثال السابق بطريقة سيمبسون المركبة.

الحل:

$$\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\ .\ dx = \frac{0.05}{3}\ \left[1.0000+(4\ \ 1.02470+1.07238+1.11803)\right.$$

$$\left.+2(1.04881+1.09544)+1.14017\right]\ =\ 0.32149$$

بالنسبة للخطأ: بما أن

$$y^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} . x^{-7/2}$$

فإن الخطأ يكون: 0.00000001

لأن:

$$\left|y^{(4)}(x)\right| < \frac{15}{16}$$

(الحد الأعلى يكون من أجل $x = 1$)

ومنه:

$$|\varepsilon_2| < \frac{(0.3)^5}{180 \times 1296} \times \frac{15}{16} = 9.765625 \times 10^{-9}$$

أي أن :

$$|\varepsilon_2| < 9.8 \times 10^{-9}$$

أو أنها تساوي تقريباً 0.00000001 .

(5-3-7) طريقة رومبيرغ Romberg

تبنى هذه الطريقة على أساس أن الخطأ في قاعدة شبه المنحرف يتناسب مع h^2 ، وبتصنيف الخطوة h إلى النصف وتطبيق القاعدة ثانية ينخفض الخطأ إلى الربع .

لنفرض أن T_i هو التكامل حسب طريقة شبه المنحرف من أجل الخطوة h . عندئذ طبعاً الخطأ يكون:

$$\varepsilon_i = T_i - I = -\frac{b-a}{12} h^2 y''(\xi) \qquad (5\text{-}43)$$

(عدد المجالات الجزئية هنا يساوي i)

لنقسم h إلى قسمين ولنرمز بـ T_{2i} للتكامل بطريقة شبه المنحرف المركبة من أجل هذه الخطوة المقسمة وحيث يكون عدد المجالات الجزئية هنا 2i فيكون الخطأ في هذه الحالة:

$$\varepsilon_{2i} = T_{2i} - I = -\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 y''(\xi) \qquad (5\text{-}44)$$

هذا يعني أن الخطأ تناقص إلى الربع عندما قمنا بمضاعفة عدد أشباه المنحرفات أي أن:

$$T_{2i} - I = \varepsilon_{2i} \approx \frac{\varepsilon_i}{4} = \frac{T_i - I}{4} \qquad (5\text{-}45)$$

أي أن:

$$4T_{2i} - 4I \approx T_i - I \qquad (5\text{-}46)$$

ومنه :

$$I \approx \frac{4T_{2i} - T_i}{3} \quad (\text{سنرمز بـ } = T_{2i}^{(1)}) \qquad (5\text{-}47)$$

من أجل $i = 1$ تصبح هذه العلاقة بالشكل:

$$I \approx \frac{4T_2 - T_1}{3} = T_2^{(1)} \qquad (5\text{-}48)$$

لنحسب T_2, T_1 ونعوض في هذه العبارة بعد اعتبار المسافة الأولى $2h$ ثم مضاعفة أشباه المنحرفات لتصبح المسافة h.

(حيث تكافئ هذه العلاقة علاقة سيمبسون)

فنجد أن:

$$T_1 = \frac{2h}{2}\left[f(x_o) + f(x_2)\right]$$
$$= h\left[f(x_o) + f(x_2)\right]$$

نضاعف أشباه المنحرفات (تصبح الخطوة h) ونطبق قاعدة شبه المنحرف المركبة فنجد أن:

$$T_2 = \frac{h}{2}\left[f(x_o) + 2f(x_1) + f(x_2)\right] \qquad (5\text{-}49)$$

ومنه بالتعويض نجد أن:

$$T_2^{(1)} = \frac{h}{3}\left[f(x_o) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \tag{5-50}$$

الآن بتطبيق هذه الطريقة أيضاً على قاعدة سيمبسون البسيطة وبفرض أن:

$$S_{2i} = T_{2i}^{(1)} \tag{5-51}$$

هو تكامل سيمبسون فيكون بنفس المحاكة السابقة في طريقة شبه المنحرف الخطأ:

$$\varepsilon_{2i} = S_{2i} - I \tag{5-52}$$

وبمضاعفة عدد أشباه المنحرفات نجد أن:

$$S_{4i} = T_{4i}^{(1)} \tag{5-53}$$

والخطأ:

$$\varepsilon_{4i} = S_{4i} - I \tag{5-54}$$

وبتعويض قيمة:

$$\varepsilon_{2i} = -\frac{b-a}{180} h^4 . y^{(4)}(\xi)$$

فيكون الخطأ عند مضاعفة أشباه المنحرفات التي عددها 2i :

$$\varepsilon_{4i} = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 . y^{(4)}(\xi) \tag{5-55}$$

ومنه نجد أن:

$$\varepsilon_{4i} \approx \frac{\varepsilon_{2i}}{16} \tag{5-56}$$

أي أن:

$$S_{4i} - I = \frac{S_{2i} - I}{16} \tag{5-57}$$

ومن هذه العلاقة نحصل على:

$$I \approx \frac{16S_{4i} - S_{2i}}{15} \tag{5-58}$$

أي أن:

$$I \approx \frac{16T_{4i}^{(1)} - T_{2i}^{(1)}}{15} \quad (\text{نرمز لها بـ } = T_{4i}^{(2)}) \tag{5-59}$$

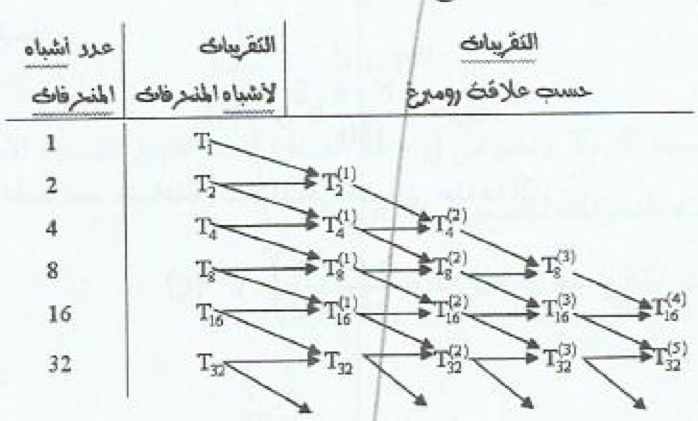
هذه القيمة هي القيمة التقريبية الثانية لهذا التكامل، يمكن متابعة هـذا العمـل والحصول على العلاقة العامة التالية:

$$T_{2i}^{(K)} \approx \frac{4^{k} \cdot T_{2i}^{(K-1)} - T_{i}^{(K-1)}}{4^{K} - 1} \qquad K = 1, 2, 3, \cdots \tag{5-60}$$

والتي تعطي التكامل بطريقة رومبرغ.

ملاحظة (3):

يمكن إعطاء الجدول التالي الذي يبين من أجل قيم K المتزايدة خوارزمية مبسطة لحساب قيم التكامل بطريقة رومبرغ:



حساب قيم التكامل بطريقة رومبرغ

مثال (7)

احسب $I = \int_0^1 x^2 dx$ مستخدماً طريقة رومبرغ .

الحل:

نحسب أولاً T_1 ثم T_2 للحصول على $T_2^{(1)}$:

$$T_1 = \frac{h}{2}[f(x_o)+f(x_1)] = \frac{1}{2}(o+1) = 0.5$$

$$T_2 = \frac{h}{4}[f(x_o)+2f(x_1)+f(x_2)] = \frac{3}{8}$$

ومنه نجد أن:

$$T_2^{(1)} \approx \frac{4.T_2 - T_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$T_4^{(1)} \approx \frac{4.T_4 - T_2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$T_4^{(2)} \approx \frac{4^2 T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}{15} = \frac{1}{3}$$

إذن:

$$T_4^{(1)} = T_2^{(1)} = T_4^{(2)} = \frac{1}{3}$$

ولو حسبنا مباشرة قيمة هذا التكامل:

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_o^1 = \frac{1}{3}$$

فنجد أن هذه القيمة هي نفسها التي تعطي تكامل رومبرغ مما يشير إلى أنه قد حصلنا في طريقة رومبرغ على نفس القيمة الحقيقية ولاداعي للاستمرار في حساب بقية تكاملات رومبرغ.

(1-5-9) طريقة تشيبشيف (علاقة تشيبشيف التربيعية):

لقد فرض تشيبشيف لحساب قيمة التكامل المحدد التقريبية للتابع التجريبي $y_i = f(x_i)$ حيث $i=o,1,2,\dots,n$: الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=1}^{n} k_i.f(x_i) \qquad (1\text{-}81)$$

حيث أن: $k_i(i=1,2,\dots,n)$ هي ثوابت يطلب تحديدها. وللسهولة فقد أخذ تشيبشيف هذه الثوابت كلها متساوية وتساوي k وذلك أيضاً لتحديد نقاط التقسيم x_i.

سنعالج أولاً الحالة الخاصة للتكامل: $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ ثم نعمم بعد ذلك من التكامل $\int_a^b f(x)dx$. فمن اجل هذه الحالة الخاصة لدينا:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2k[f(x_1)+f(x_2)+.......+f(x_n)] \qquad (1\text{-}82)$$

كما اشترط تشيبشيف أن يكون التابع f(x) مطابقاً تماماً لكثيرة حدود من الدرجة n من الشكل:

$$P_n(x) = a_o + a_1x^1 + a_2x^2 + ...+ a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad (1\text{-}83)$$

وبالتالي في نقاط التقسيم (العقد) يكون لدينا:

$$P_n(x_1) = f(x_1) \text{ و } P_n(x_2) = f(x_2) \text{ و.........و } P_n(x_n) = f(x_n) \qquad (1\text{-}84)$$

وبأخذ $P_n(x)$ مطابقاً لـ f(x) في العبارة (1-82) وبالمكاملة نجد إن:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)dx = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2(a_0 + \tfrac{a_2}{3} + \tfrac{a_4}{5} + ...) \qquad (1\text{-}85)$$

وبالتعويض في (1-82) نجد أن:

$$\begin{aligned}
2(a_0 + \tfrac{a_2}{3} + \tfrac{a_4}{5} + ...) &= 2k_n[a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n + \\
&+ [a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + ... + a_nx_2^n + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ [a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n] \\
&= 2k_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + ... + x_n) + \\
&+ a_2(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ a_n(x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n]
\end{aligned}$$

وبمطابقة الطرفين بالنسبة لـ a_i نجد أن: $2a_0 = 2nk_na_0$ ومنه نجد أن:

$$k_n = \tfrac{1}{n} \qquad (1\text{-}86)$$

وكذلك نجد أن (وذلك بعد تعويض قيمة $k_n = \frac{1}{n}$):

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = \frac{n}{3}$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_n^3 = 0$$
$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + ... + x_n^4 = \frac{n}{5} \qquad (1\text{-}87)$$
....
$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + ... + x_n^n = \frac{n[1-(-1)^{n+1}]}{2(n+1)}$$

ومنه فإن العلاقة (82-1) تأخذ الشكل:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) .... + f(x_n)]$$

تـــسمى هـــذه العلاقـــة بـــصيغة تشييـــشيف في التكامـــل ، حيـــث أن: $f(x_i), \quad i = 1,2,...,n$ هي قيم التابع f في النقاط x_i المحددة من حـل جملـة المعـادلات (87-1).

الحالة العامة:

من اجل التكامل $\int_a^b f(x)dx$ فيمكن إجراء التحويل التالي:

$$z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i \quad ; \quad i = 1,2,...,n \qquad (1\text{-}88)$$

وبالتالي تأخذ صيغة تشييشيف الشكل العام التالي:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(z_1) + f(z_2) .... + f(z_n)] \qquad (1\text{-}89)$$

ملاحظة (3):

يمكن حل جملة المعادلات (87-1) من أجل عدد من الحالات أي مـن أجـل مـثلاً: n=2,3,4,…,7 والحصول على الجدول -1- المساعد التالي في حساب التكامل:

الجدول-1-

n=2	$-x_1 = x_2 = 0.577350$
n=3	$-x_1 = x_3 = 0.707107 \quad ; \quad x_2 = 0$
n=4	$-x_1 = x_4 = 0.794654 \quad ; \quad -x_2 = x_3 = 0.187592$
n=5	$-x_1 = x_5 = 0.832498 \quad ; \quad -x_2 = x_4 = 0.374541 \quad ;$ $x_3 = 0$
n=6	$-x_1 = x_6 = 0.866247 \quad ; \quad -x_2 = x_5 = 0.422519 \quad ;$ $-x_2 = x_4 = 0.266635$
n=7	$-x_1 = x_7 = 0.883862 \quad ; \quad -x_2 = x_6 = 0.529657 \quad ;$ $-x_3 = x_5 = 0.323912 \quad ; \quad x_4 = 0$

مثال (11): احسب قيمة التكامل : $\int_0^{\pi} \sin x dx$ حيث أن n=5 .

الحل:

لدينا:
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \tfrac{\pi}{5}[\sin z_1 + \sin z_2 + \sin z_3 + \sin z_4 + \sin z_5]$$

حيث: $z_i = \frac{0+\pi}{2} + \frac{\pi-0}{2} x_i = \frac{\pi}{2}(1+x_i)$

ومنه نجد أن:

$$z_1 = \frac{\Pi}{2}(1-0.832498) \Rightarrow \text{Sinz}_1 = 0.26008625$$

$$z_2 = \frac{\Pi}{2}(1-0.374541) \Rightarrow \text{Sinz}_2 = 0.831869959$$

$$z_3 = \frac{\Pi}{2}(1+0) \Rightarrow \text{Sin}_3 = 1$$

$$z_4 = \frac{\Pi}{2}(1+0.374541) \Rightarrow \text{Sin}_4 = 0.831869959$$

$$z_5 = \frac{\Pi}{2}(1+0.832498) \Rightarrow \text{Sin}_5 = 0.26008625$$

ومنه:

$$\int_0^{\pi} Sinx.dx = \tfrac{\pi}{5}(3.183912419) = 1.999309565$$

بينما نجد أن القيمة الحقيقية لهذا التكامل تساوي 2 إذن الخطأ يساوي: 0.00069

مثال(12): احسب قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ حيث إن n=5 .

الحل: $I=\frac{1}{5}[f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)+f(z_4)+f(z_5)]$

حيث:

$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-0.83250)=0.08375$$

$$z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-0.37454)=0.31273$$

$$z_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}0=0.5$$

$$z_4=1-x_2=0.68727$$

$$z_5=1-x_1=0.91625$$

ومنه: $I=\frac{1}{5}.(1.5342)=0.3068$

(1-5-10)-علاقة غاوص التربيعية في التكامل العددي:

يمكن إعطاء الصيغة التالية لغاوص في حساب التكاملات العددية:

(يمكن العودة للمراجع الأجنبية لمعرفة سبب كتابتنا هذه الصيغة)

$$\int_{-1}^{+1} f(x).dx \cong k_1.f(x_1)+k_2 f(x_2)+....k_n f(x_n) \tag{1-90}$$

حيث يجب تحديد النقاط x_i (i=1,2,...,n) وكذلك الثوابت k_i (i=1,2,...,n)

ويمكن تحديد هذه المجاهيل بحيث نفرض أن الصيغة (1-90) محققة من أجل كثير حدود ما من الدرجة (2n-1):

$$P_{2n-1}(x)\equiv f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+......+a_{2n-1}x^{2n-1}$$

لنكتب: $P_{2n-1}(x)$ بالشكل:

$$P_{2n-1}(x)\equiv f(x)=D(x)q(x)+r(x) \tag{1-92}$$

حيث $D(x)$ كثير الحدود المطلوب من الدرجة n و$q(x)$ حاصل القسمة $P_{2n-1}(x)$ على $D(x)$ و $r(x)$ باقي القسمة $P_{2n-1}(x)$ على $D(x)$ وكما هو واضح فإن درجة كل من كثيري الحدود $q(x)$ و $r(x)$ يجب ألا تزيد عن n-1 (لكي يبقى $P_{2n-1}(x)$ من الدرجة (2n-1) , لنفرض أن$D(x)$ يكتب بالشكل التالي:

$$D(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + ... + \alpha_n \\ \equiv (x - x_1)(x - x_2)........(x - x_n) \tag{1-92}$$

حيث أن x_i (i=1,2,...,n) هي القيم التي يجب تحديدها

في صيغة غاوص (90-1) و α_i $(i = 1,2,....,n)$ أعداد ثابتة، إن التابع $D(x)$ يجب أن تنعدم قيمه في النقاط x_i $(i = 1,2,....,n)$ (حسب الصيغة (92-1)) وبالتالي فإنه لدينا:

$$\begin{aligned} P_{2n-1}(x_1) &= f(x_1) = r(x_1) \\ P_{2n-1}(x_2) &= f(x_2) = r(x_2) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ P_{2n-1}(x_n) &= f(x_n) = r(x_n) \end{aligned} \tag{1-93}$$

وبالتعويض في العبارة (90-1)نجد أن:

$$\int_{-1}^{+1} f(x).dx = \int_{-1}^{+1} P_{(2n-1)}.dx = \int_{-1}^{+1} D(x).q(x)dx + \int_{-1}^{+1} r(x).dx = \\ = k_1 r(x_1) + k_2 r(x_2) + ... + k_n r(x_n) \tag{1-94}$$

وينتج أن:

$$\int_{-1}^{+1} D(x).q(x)dx = 0$$

ويجب تحديد $D(x)$ حيث أن ($q(x)$ من الدرجة (n-1) و يمكن كتابة $q(x)$ بالشكل:

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

وبالنتيجة نحصل على جملة المعادلات:

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-1} D(x).dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-2} D(x).dx = 0 \qquad (1\text{-}95)$$

....

$$\int_{-1}^{+1} D(x).dx = 0$$

وبتعويض قيمة D(x) من المعادلة (1-92) والمكاملة نحصل على جملة المعادلات:

$$\frac{\alpha_1}{2n-1}+\frac{\alpha_3}{2n-3}+\frac{\alpha_5}{2n-5}+\frac{\alpha_7}{2n-7}+\cdots=0$$

$$\frac{1}{2n-1}+\frac{\alpha_2}{2n-3}+\frac{\alpha_4}{2n-5}+\frac{\alpha_6}{2n-7}+\cdots=0$$

$$\frac{\alpha_1}{2n-3}+\frac{\alpha_3}{2n-5}+\frac{\alpha_5}{2n-7}+\frac{\alpha_7}{2n-9}+\cdots=0 \qquad (1\text{-}96)$$

$$\frac{1}{2n-3}+\frac{\alpha_2}{2n-5}+\frac{\alpha_6}{2n-7}+\frac{\alpha_8}{2n-9}+\cdots=0$$

....

حيث أنه بحل المعادلات (1-96) نحدد قيم الثوابت α_i (i=1,2,3,....,n) والتي تبين أن $\alpha_i = 0$ من أجل i=1,3,5,7.... (القيم الفردية) وبالتالي يكون شكل D(x) هو الشكل الآتي: $D(x) = x^n + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_4 x^{n-4} + ...$ (القيم الزوجية فقط) بعد تحديد قيم α_i (i=2,4,6,....) نكون قد حددنا (راجع العلاقة (1-92)) جذور المعادلة D(x) أي $x_1, x_2, ..., x_n$ وهي القيم المطلوب تحديدها في علاقة غاوص التكاملية (1-90) ، بعد ذلك يمكننا حساب قيم الثوابت $k_i (i = 1,2,...,n)$ والتي يمكن إعطاؤها بالعلاقة:

$$K_i = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} \qquad (1\text{-}97)$$

إن العلاقات السابقة تعطي التكامل بصيغة غاوص بعامة لأي عدد n ويمكننا أخذ الحالة الخاصة من أجل n=2 والحصول على ما يسمى بصيغة غاوص التربيعية. في هذه الحالة يجب تحديد الثابتين k_1 و k_2 وكذلك x_1 و x_2 لأن علاقة غاوص تأخذ الشكل:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \cong k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) \qquad (1\text{-}98)$$

ولتحديد هذه المجاهيل نكتب D(x) بالشكل: $D(x) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$

وبالتالي من العلاقات (95-1) نجد أن لدينا معادلتين فقط لتحديد المجهولين α_1 و α_2:

$$\int_{-1}^{+1} x.D(x)dx = 0 \qquad (1\text{-}99)$$

$$\int_{-1}^{+1} D(x)dx = 0 \qquad (1\text{-}100)$$

أي إن:

$$\int_{-1}^{+1} (x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x)dx = 0 \qquad (1\text{-}101)$$

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2)dx = 0 \qquad (1\text{-}102)$$

وبالمكاملة والحل نجد أن: $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ وبالتالي D(x) يأخذ الشكل التالي:

$$D(x) = x^2 - \tfrac{1}{3} = 0$$

وبالتالي: $x_1 = -0.577350269$ و $x_2 = 0.577350269$ ولحساب المجهولين (الثابتين) k_1 و k_2 نطبق العلاقة (97-1) فنجد أن:

$$k_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} dx = 1 \qquad (1\text{-}103)$$

$$k_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} dx = 1 \qquad (1\text{-}104)$$

وبالتعويض في (98-1) نجد أن:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \cong 1.f(-0.577350269) + 1f(0.577350269)$$

الآن لنفرض أن التكامل المطلوب إيجاده هو من الشكل: $\int_a^b f(x)dx$ في هذه الحالة، وكما هو مألوف يجب إجراء تغيير في المتحول بالشكل:

$$z_i = \tfrac{a+b}{2} + \tfrac{b-a}{2} x_i \quad ; \quad i = 1,2,...,n$$

وبالتالي تصبح علاقة غوص بالشكل:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \tfrac{b-a}{n}[k_1 f(z_1) + k_2 f(z_2) .... + k_n f(z_n)] \qquad (1\text{-}105)$$

وقد تم وضع جدول خاص لهذا الغرض حيث يتم وضع ثوابت غاوص التربيعية k_i وقيم المجاهيل x_i (i=1,2,....,n) بالجدول -2- التالي:

الجدول -2-

n=1	$x_1 = 0.5$	$k_1 = 2$
n=2	$-x_1 = x_2 = 0.57735027$	$k_1 = k_2 = 1$
n=3	$-x_1 = x_3 = 0.77459667$ $x_2 = 0$	$k_1 = k_3 = 0.55555556$ $k_2 = 0.88888889$
n=4	$-x_1 = x_4 = 0.86113631$ $-x_2 = x_3 = 0.33998104$	$k_1 = k_4 = 0.34785484$ $k_2 = k_3 = 0.65214516$
n=5	$-x_1 = x_5 = 0.90617985$ $-x_2 = x_4 = 0.53846931$ $x_3 = 0$	$k_1 = k_5 = 0.23692688$ $k_2 = k_4 = 0.47862868$ $k_3 = 0.56888889$
n=6	$-x_1 = x_6 = 0.93246951$ $-x_2 = x_5 = 0.66120939$ $-x_3 = x_4 = 0.23861919$	$k_1 = k_6 = 0.17132450$ $k_2 = k_5 = 0.36076158$ $k_3 = k_4 = 0.46791294$
n=7	$-x_1 = x_7 = 0.94910791$ $-x_2 = x_6 = 0.74153119$ $-x_3 = x_5 = 0.40584515$ $x_4 = 0$	$k_1 = k_7 = 0.12948496$ $k_2 = k_6 = 0.27970540$ $k_3 = k_5 = 0.38183006$ $k_4 = 0.41795918$
n=8	$-x_1 = x_8 = 0.96028986$ $-x_2 = x_7 = 0.79666648$ $-x_3 = x_6 = 0.52553242$ $x_4 = x_5 = 0.18343464$	$k_1 = k_8 = 0.10122854$ $k_2 = k_7 = 0.22238104$ $k_3 = k_6 = 0.31370664$ $k_4 = k_5 = 0.36268378$

مثال (13):

احسب قيمة التكامل : $I = \int_0^1 (1+x)dx$ مستخدماً صيغة غاوص التربيعية لأربعة قيم (مكتفياً بستة أرقام بعد الفاصلة في قيم ثوابت غاوص).

الحل:

$$I=\int_0^1(1+x)dx=\tfrac{1-0}{2}[k_1f(z_1)+k_2f(z_2)+k_3f(z_3)+k_4f(z_4)]$$

$$z_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(-0.861136)=0.0694320$$

$$z_2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(-0.339981))=0.3300095$$

$$z_3=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_3=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(0.339981)=0.6699905$$

$$z_4=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}x_4=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(0.861136)=0.930568$$

نحسب قيم الثوابت : k_4, k_3, k_2, k_1 فنجد أن:

$k_2=k_3=0.652145$ و $k_1=k_4=0.347855$

ومنه فإن:

$$I=\int_0^1(1+x)dx=\tfrac{1}{2}[k_1(f(z_1)+f(z_4))+k_2(f(z_2)+f(z_3))]$$
$$=\tfrac{1}{2}[0.347855(f(z_1)+f(z_4))+0.652145(f(z_2)+f(z_3))$$

نحسب: $f(z_2)=1.3300095$ و $f(z_1)=1+0.0694320=1.0694320$

$f(z_4)=1.930568$ و $f(z_3)=1.6699905$

ومنه نجد أن:

$$I=\int_0^1(1+x)dx=\tfrac{1}{2}[0.347853(1.0694320+1.930568)+0.652145(1.3300095+1.6699905)]$$
$$=\tfrac{1}{2}[0.347855(3)+0.652145(3)]=1.5$$

لو حسبنا القيمة الحقيقية لهذا التكامل نجد أنها تساوي: $[x+\frac{x^2}{2}]_0^1=1+0.5=1.5$

مثال (14): احسب قيمة التكامل : $I=\int_0^4 e^x dx$ مستخدماً صيغة غاوص التربيعية لأربعة قيم (مكتفياً بستة أرقام بعد الفاصلة).

الحل: لدينا

$$I=\int_0^4 e^x dx=\tfrac{4-0}{2}[0.347855.e^{0.27728}+0.652145e^{1.320038}+0.652145.e^{2.679962}+$$
$$+0.347855.e^{3.72272}]=53.596937$$

إن القيمة الحقيقية لهذا التكامل تحسب بالشكل:

$$I=\int_0^4 e^x dx=[e^x]_0^4=e^4-e^0=e^4-1=53.598150$$

ملاحظة (4):

يمكننا اختيار كثيرة الحدود في $D(x)$ (الفقرة السابقة) التي تحقق العلاقات (1-95) وذلك باستخدام كثيرة حدود لوجاندر :

$$D(x)=\frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\quad,\quad (n=0,1,2,....)$$

فنجد:

$$\int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=0 \qquad (1\text{-}106)$$

وهذا يغني عن تحديد الثوابت α_i حيث تستخدم العلاقات (106-1) لحساب الثوابت k_i والتي يمكن البرهان على أنها تعطى بالعلاقة:

$$k_i=\frac{2}{(1-x_i^2)[D'(x_i)]^2}$$

(6-1)-الحالات الشاذة في التكامل:

إن أفضل طريقة في معالجة الحالة الشاذة في التكامل هو استبعاد تلك الحالة أي التخلص منها، إذا كان ذلك ممكناً وذلك بإحدى الطرق الجبرية، مثل التكامل بالتجزئة أو تغيير المتحول أو غيرها. وإذا أردنا حساب التكامل بطريقة سيمبسون العددية مثلاً بخطوة ثابتة فإن مجال التكامل يجب أن يستبعد الحد أو الشذوذية التي تظهر.

مثال (15):

احسب التكامل التالي $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ هنا لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ يأخذ قيمة اللانهاية عند الحد الأدنى للتكامل، تحليلياً هذا التكامل يحسب بسهولة: $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=[2.\sqrt{x}]_0^1=2$ بينما بطريقة سيمبسون مثلاً، نحسب: $I\approx\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ حيث ε عدد صغير بقدر كاف، وبسهولة نقرب الشذوذية بكثير حدود وذلك بتوزيع التكامل إلى تكاملين: $I=\int_\varepsilon^c\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int_c^1\frac{dx}{\sqrt{x}}+$ مع أخذ $c\approx 0.1$ أو $c\approx 0.05$ مثلاً، نأخذ خطوة كبيرة بين c و 1 و خطوة صغيرة بين ε و c .

تمارين

1-أوجد $y'(62)$ و $y''(62)$ للتابع $y=f(x)$ المعطى بالجدول التالي :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1.6990			
		0.0414		
55	1.7404		-0.0036	
		0.0378		0.0005
60	1.7782		-0.0031	
		0.0347		
65	1.8129			

وذلك باستخدام الفروق الأمامية للاستيفاء الداخلي لنيوتن ثم الفروق الخلفية لنيوتن.

ثم احسب الخطأ المقتطع المرتكب في $y'(62)$ فيما لو تم استخدام كثيرة حدود خطية ثم كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

2- أوجد $y'(1)$ و $y''(1)$ التابع $y=f(x)$ المعطى بالجدول التالي :

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

وذلك باستخدام الفروق الأمامية للاستيفاء الداخلي لنيوتن ثم الفروق الخلفية لنيوتن.

3- أوجد $y'(0.525)$ للتابع $y=f(x)$ المعطى بالجدول التالي:

x_i	0.525	0.526	0.527	0.528
y_i	0.50121	0.50208	0.50294	0.50381

وذلك باستخدام الفروق الأمامية للاستيفاء الداخلي لنيوتن ثم الفروق الخلفية لنيوتن.

4- إذا كانت قيم التابع $y(x)$ معطاة بالجدول التالي:

x	50	55	60	65
y	1.6990	1.7404	1.7782	1.8129

المطلوب:

- أوجد $y'(50)$ باستخدام الفروق الخلفية لنيوتن.

5-لنأخذ التابع $y = \sqrt{x}$ المعطى قيمه بالجدول:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
y	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

المطلوب :

- أوجد $P'(1)$ ، $P''(1)$ ، $P^3(1)$ باستخدام الفروق الأمامية لنيوتن.
- أوجد $P'(1.1), P''(1.1), p^{(3)}(1.1)$ باستخدام الفروق الأمامية لنيوتن.
- أوجد $P'(1.1)$ باستخدام الفروق الخلفية لنيوتن.
- احسب الخطأ في حساب $P'(1.1)$ في الطريقتين السابقتين.

6- طبق الطرق العددية لحساب قيمة التكامل:

$$I = \int_{o}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$ من أجل : n=4

7- طبق قاعدة شبه المنحرف المركبة وقاعدة سيمبسون المركبة لحساب قيمة التكامل:

$$I = \int_{o}^{1} \frac{dx}{1+x}$$

من أجل $h = 0.1$ $(n = 10)$

8- احسب التكامل $\int_{o}^{\pi/2} \sin x . dx$ مستخدماً قاعدة شبه المنحرف المركبة، ثم قاعدة سيمبسون المركبة، ومستخدماً الجدول الآتي:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$
sinx	0.00000	0.25882	0.50000	0.70711	0.86603

ثم احسب الخطأ في كلا الطريقتين.

9- حل التمرين السابق باستخدام طريقة رومبرغ.

10- احسب $\int_{1}^{1.3} \sqrt{x}\,.dx$ بطريقة $\frac{3}{8}$ من أجل $h = 0.05$.

11- أوجد القيمة التقريبية لكل من التكاملات التالية مستخدماً قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمبسون:

$$\int_{\pi}^{5\pi^2} \frac{1-\cos x}{x}\,dx \qquad \int_{0}^{0.12} \sqrt{x+5}\,dx$$

$$\int_{0}^{\pi^4} x.\sin 2x.dx \qquad \int_{1}^{5} x.\ln x.dx$$

$$\int_{1.1}^{3.3} x.e^{-x}.dx \qquad \int_{0}^{\pi} (\sin x)^{1/3}.dx$$

$$\int_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \int_{0}^{2} \frac{dx}{x^3-3x-3}$$

12- احسب التكامل $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}.dx$ مستخدماً الطرق العددية من أجل : n=4.

13- احسب التكامل $\int_{0}^{8} \frac{dx}{1+x}$ مستخدماً طريقة شبه المنحرف من أجل: n=8

14- احسب التكامل $\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$ مستخدماً طريقة شبه المنحرف من أجل: n=5

15- احسب التكامل $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9+x^2}$ مستخدماً طريقة شبه المنحرف من أجل: n=5

16- احسب التكامل $\int_{0}^{1} \frac{\cos}{1+x}\,dx$ مستخدماً طريقة شبه المنحرف من أجل: n=5

17- احسب التكامل $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x}$ مستخدماً طريقة غاوص ثم طريقة تشيبشيف من أجل: n=5

18- باستخدام طريقة رومبرغ احسب قيمة كل مما يلي:

a) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$ b) $\int_{0}^{2} x^3 dx$ c) $\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

d) $\int_{0}^{1} \sin \pi x.dx$ e) $\int_{0}^{2\pi} x \sin dx$ f) $\int_{0}^{3} x^2 e^x dx$

g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ h) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cot x dx$ i) $\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{3}} dx$

19- احسب قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ حيث أن n=5 مستخدماً صيغة تشيبشيف.

20- احسب قيمة التكامل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ حيث آن n=5 مستخدماً صيغة غاوص.

21- احسب قيمة التكامل: $I = \int_0^1 \sqrt{(1+x)}dx$ مستخدماً صيغة غاوص التربيعية من أجل أربع قيم.

22- احسب مستخدماً صيغة غاوص قيمة التكامل: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x+5}$ من أجل n=5.

23- احسب مستخدماً صيغة تشيبشيف قيمة التكامل: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x+5}$ من أجل n=6

24- طبق قاعدة شبه المنحرف المركبة وقاعدة سيمبسون المركبة لحساب قيمة التكامل:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$$

من أجل $h = 0.1$ ($n = 10$).

تمارين محلولة عن التكامل العددي

مثال(1): الجدول التالي يبين تكامل بعض التوابع الشهيرة (المذكورة) من خلال علاقة شبه المنحرف البسيطة وكذلك من خلال علاقة سيمبسون البسيطة على المجال [0,2].

$f(x)$	x^2	x^4	$\frac{1}{1+x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$	e^x
القيمة الدقيقة	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
شبه المنحرف	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
سيمبسون	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

مثال(2) – استخدم علاقة شبه المنحرف وسيمبسون في التكامل لإيجاد كل من التكاملات الآتية، واحسب الخطأ في كل حالة.

a) $\int_1^2 \ln x.dx$ b) $\int_0^{0.1} x^3 .dx$

c) $\int_0^{\pi/3} \sin(x)^2 .dx$ d) $\int_0^{0.4} e^{3x} .\cos 2x dx$

e) $\int_0^{\pi/4} \tan x.dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{3x} .\cos 2x dx$

الحل:

	شبه المنحرف	حد الخطأ	سيمبسون	الخطأ	الحقيقي
a)	0.34657	0.084	0.38583	$x10^{-3}\ 2.1$	0.38629
b)	0.023208	-----	0.032296	------	0.034812
c)	0.39270	0.192	0.30543	$x10^{-3}\ 3.5$	0.30709
d)	0.39914	0.0114	0.40371	$x10^{-5}\ 6.24$	0.40376
e)	0.39270	0.161	0.34778	$x10^{-3}\ 8.31$	0.34657
f)	-0.39270	0.161	-0.34778	$x10^{-3}\ 8.31$	-0.34657

مثال(3) – احسب $\int_{1.1}^{1.5} e^x\,dx$ باستخدام:

- علاقة شبه المنحرف

- علاقة سيمبسون وحيث أن:

x	e^x
1.1	3.0042
1.3	42.6693
1.5	4.4817

مثال(4) – استخدم علاقة شبه المنحرف وسيمبسون في التكامل لإيجاد كل من التكاملات الآتية:

$$a)\ \int_0^{0.1}\sqrt{1+x}\,.dx \qquad b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^2\,.dx$$

$$c)\ \int_{1.1}^{1.5}e^x\,.dx \qquad d)\ \int_1^{10}\tfrac{1}{x}dx$$

$$e)\ \int_1^{5.5}\tfrac{1}{x}\,dx \qquad f)\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx$$

مثال(5) – ليكن التابع المعطى قيمه بالجدول التجريبي التالي:

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

احسب $\int_{1.8}^{2.6} f(x).dx$ مستخدماً جميع الطرق العددية السابقة.

مثال(6) – استخدم طريقة شبه المنحرف في التكامل لإيجاد كل من التكاملات الآتية وذلك حسب قيمة n المعطاة:

$$a)\ \int_1^3 \tfrac{1}{x}dx \quad ; \quad n=4 \qquad : \quad b \qquad \int_0^2 x^3dx \quad ; \quad n=4)$$

c) $\int_0^3 x.\sqrt{1+x^2}.dx$; $n=6$: d) $\int_0^{2\pi} \sin \pi x.dx$; $n=6$

e : $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$; $n=8$) f) $\int_0^1 x^2.e^x.dx$; $n=8$

الحل:

	الحل العددي	الحل الدقيق
a)	1.1167	1.09861
b)	4.25	4
c)	10.3122	10.20759
d)	0.62201	0.636620
e)	-5.9568	-6.28319
f)	0.72889	0.718282

مثال(7) – أعد السؤال السابق من أجل طريقة سيمبسون المركبة.

(62) – احسب $\int_0^2 x^2.e^{-x^2}\,dx$ باستخدام:

– طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل: n=8

– طريقة سيمبسون المركبة من أجل: n=8

الحل:

a) 0.4215820 b) 0.4227162

(8) – احسب $\int_1^{10} \ln x\,dx$ بدقة 10^{-4} باستخدام طريقة سيمبسون المركبة.

(9) – احسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$ بدقة 10^{-4}:

a) - استخدم طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل : n=4 و n=8.

b) -أوجد حد أعلى للخطأ في كل حالة من الطلب السابق وقارن التقريب مع القيمة الدقيقة.

c) - حدد قيمة n و h حتى تكون دقة التقريب 10^{-8}.

الحل :

a) 0.3497582 ; 0.3472746

b) 0.0101 ; 0.0025

$n \geq 4019$; $h \leq 1.96x10^{-4}$ c)

مثال(10) – أعد السؤال السابق من أجل طريقة سيمبسون.

مثال(11) – أحسب $\int_{1}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} dx$ مستخدماً طريقة شبه المنحرف المركبة من أجل .h=0.05

مثال(12) – احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx$ بطريقة سيمبسون.

الحل: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x.dx = 1.002279878$

مثال(13) – احسب مستخدماً صيغة غاوص قيمة كل من التكاملات التالية من أجل: .n=2

a) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x}$

b) $\int_{0}^{2} x^3.dx$

c) $\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x^2}.dx$

d) $\int_{1}^{1} \sin \pi x dx$

e) $\int_{0}^{2\pi} x \sin x \, dx$

f) $\int_{0}^{1} x^2 e^x dx$

الحل:

a) 1.09091 b) 4.00000 c) 10.2423

d) 0.616191 e) -11.0616 f) 0.711942

مثال(14) – احسب مستخدماً صيغة غاوص قيمة التكامل التالي، من أجل:

$\int_{1}^{3} e^x \sin x \, dx$ .n=2, 3, 4

الحل: n=2 : 11.141495 ; n=3 : 10.948403 ; n=4 : 0.950140

الفصل السادس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية

Ordinary differential equations

مقدمة:

إن الطرق العددية كما هو معلوم تدخل في الحالات الصعبة والمعقدة بشكل عام، أي عندما لايكون هناك حل تحليلي، وهكذا بالنسبة للمعادلات التفاضلية فهناك عدد منها لايمكن حله بالطرق التقليدية المعروفة ولذلك نلجأ عادة إلى الطرق العددية لحلها. سنهتم في هذا المقرر بحل المعادلات التفاضلية العادية ذات الشروط الابتدائية من المرتبة الأولى فقط. ونذكر بأن هناك مقررات أخرى لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الشروط الحدية.

المعادلة التفاضلية ذات الشروط الابتدائية

إن مسائل الشروط الابتدائية هي تلك المسائل التي تكون مخصصة من أجل قيمة متغيرة مستقل واحد فقط مثلاً المعادلة:

$$A(x).\frac{d2y}{dx^2}+B(x).\frac{dy}{dx}+C(x)y=g(x) \qquad (6\text{-}1)$$

والشروط الابتدائية: $y(o)=o$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_o=V_o \qquad (6\text{-}1)$$

وهناك معادلات تفاضلية أيضاً من المرتبة n مع شروط ابتدائية.

وفي هذا المقرر سيتم حل المعادلات ذات متغير مستقل واحد فقط وليكن x ومن الشكل:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{والشرط الابتدائي} \tag{6-3}$$

وقد تعطى هذه المعادلة بشكل منحني بالشكل:

$$f(x, y, y') = 0$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(x_0) = y_0 \tag{6-4}$$

وفيما يلي بعض طرق الحل العددي لهذا النوع من المعادلات:

مطلوب

(6-1) طريقة تايلور: مطلوب

بشكل عام إذا كاملنا المعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y)$$

من النقطة x_i إلى النقطة التالية x_{i+1} نكتب:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'.dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y).dx \tag{6-5}$$

هذه المعادلة التكاملية تكتب بالشكل:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \tag{6-6}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y).dx \tag{6-7}$$

هذه المعادلة تحسب y_{i+1} إذا علم y_i.

وبتبديل قيمة التكامل في عبارات y_{i+1} نحصل على الحل العددي للمعادلة التفاضلية.

في طريقة تايلور ننشر حسب سلسلة تايلور ، التابع y فنجد:

$$y(x+h) \approx y(x) + h\,y'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \\ + \frac{1}{6}h^3 y^{(3)}(x) + \frac{1}{24}h^4 . y^{(4)}(x) \qquad (6\text{-}8)$$

إن الخطأ بهذه الطريقة يعطى بالصيغة:

$$\varepsilon = \frac{h^5}{120} . y^{(5)}(\xi) \qquad (6\text{-}9)$$

مثال عددي (1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = x.y^{\frac{1}{3}}$$

من أجل $y(1) = 1$ وحيث $h = 0.1$

(وذلك في النقطة $x = 1.1$) . واحسب الخطأ في ذلك.

الحل: لدينا

$$y(x+h) \simeq y(x) + h \;.\; y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) \\ + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x)$$

نحسب المشتقات ، حيث لدينا:

$$y' = f(x, y) = x\,y^{\frac{1}{3}}$$

ومنه:

$$y'' = y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^2 y^{-\frac{1}{3}}$$

$$y^{(3)} = -\frac{1}{9}x^3 y^{-1} + xy^{-\frac{1}{3}}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{9}x^4 y^{-\frac{5}{4}} - \frac{2}{3}x^2 y^{-1} + y^{-\frac{1}{3}}$$

ومنه نجد أنه في النقطة $x = 1$:

$$y'(1)=1 \quad , \quad y''(1)=\frac{4}{3}$$

$$y^{(3)}(1)=\frac{8}{9} \quad , \quad y^{(4)}(1)=\frac{4}{9}$$

وبالتالي بالتعويض في منشور تايلور نجد:

$$y(1.1) \approx 1.10682$$

أما الخطأ فيحسب من العلاقة السابقة:

$$\varepsilon=\frac{h^5}{5!}y^{(5)}(\xi)$$

ونجد أن:

$$\varepsilon < 0.000002$$

(6-2) طريقة أولر Euler's method

مطلوب مطلوب

تعتمد هذه الطريقة على أخذ الحد الأول والثاني في منشور تـايلور للتـابع $y(x)$.

أي أنه إذا فرضنا أن y معلوم في النقطة x ، لدينا:

$$y(x+\Delta x)=y(x)+\Delta x.\frac{dy}{dx} \tag{6-10}$$

$$=y(x)+\Delta x.f(x,y) \tag{6-11}$$

وفي النقطة x_i تأخذ هذه المعادلة الشكل التالي:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta x.f(x_i,y_i) \tag{6-12}$$

أو الشكل:

$$y_{i+1}=y_i+h.f(x_i,y_i)$$

وبفرض أن y معلومة عند $x = o$ فعندئذ يمكن أن تحدد y في كل نقطة x أخرى.

أما الخطأ في طريقة أولر فيعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_e = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \tag{6-13}$$

مثال (2)

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' + y^2 = o$$

مع الشرط الابتدائي:

$$y(o) = 1$$

حسب طريقة أولر. مع أخذ $\Delta x = h = 0.2$

الحل:

إن الحل الدقيق هنا هو $y = \dfrac{1}{1+x}$

أما الحل عددياً وحسب طريقة أولر فيكون بالشكل:

$$y' = -y^2 \Rightarrow y_{i+1} = y_i - \Delta x \,.\, y_i^2$$

ومنه:

$$y_1 = y_o - (0.1).\, y_o^2 = 1 - 1 \times 0.1 = 0.9$$

وهكذا نتابع الحل ...

مثال (3):

استخدم طريقة أولر لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y) = x\, y^{\frac{1}{3}}$$

حيث $y(1) = 1$ وحيث $h = \Delta x = 0.1$

وذلك في النقاط : 1.1 و 1.2 و 1.3

الحل: لدينا:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x . f(x_i, y_i)$$

$$= y_i + 0.1\left(x_i . y_i^{\frac{1}{3}}\right).$$

ومنه نجد أن:

$$y_1 = y_o + 0.1\left(x_o y_o^{\frac{1}{3}}\right) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + 0.1\left(x_1 . y_1^{\frac{1}{3}}\right) = 1.21355$$

وهكذا نحسب بقية التقريبات.

أما الخطأ فيعطى بالشكل:

نحسب أولاً:

$$y''(x) = y^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^2 y^{-\frac{1}{3}}$$

ونجد أن الحد الأعظمي للخطأ يحدث عندما $x = 1$ وهو $\frac{4}{3}$ ومنه نجد أن:

$$|\varepsilon_e| \leq \frac{(0.1)^2}{2} . \frac{4}{3} = \frac{2}{3} . 10^{-2} < 0.0066667$$

أما إذا أخذنا في هذا المثال $\Delta x = h = 0.01$ مثلاً فنجد أن:

$$y_1 \approx 1 + (0.01) \, . \, 1 = 1.0100$$

$$y_2 \approx 1.00100 + (0.01)(1.01)(1.0033) = 1.0201$$

$$y_3 \approx 1.0201 + (0.01) \, . \, (1.01)(1.02)(1.0067)$$

$$= 1.0304$$

مثال (4): لتكن المعادلة $y' = y$

والشرط الابتدائي:

$$y(o) = 1$$

بأخذ $h = 0.1$ أوجد حل هذه المعادلة بطريقة أولر في النقطة $x = 0.5$.

الحل: لدينا

$$x_i = x_o + i\,h$$
$$i = 0,1,2,3,4,5$$

ولدينا الحل معطى بالعلاقة:

الأخطاء غير مطلوبة

$$y_{i+1} = y_i + h.f\left(x_i , y_i\right)$$
$$i = 0,1,2,3,4,5$$

ومنه:

$$y_1 = 1 + 0.1 = 1.1$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$y_2 = 1.21$$
$$y_3 = 1.331 \quad ; \quad y_4 = 1.4641$$
$$y_5 = 1.61051$$

مطلوب

(6-3) طريقة أولر – كوشي:

في هذه الطريقة نحسب التكامل في العلاقة (6-7) باستخدام قاعدة شبه المنحرف فنجد أن :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right] \qquad (6\text{-}14)$$

وبسبب ظهور y_{i+1} (تعتبر المجهول هنا) في الطرف الأيمن نستبدلها بقيمة تقريبية محسوبة من إحدى علاقات التكامل ونرمز لها بـ $y_{i+1}^{(o)}$ بينما نرمز في الطرف الأيسر لـ y_{i+1} بـ $y_{i+1}^{(1)}$ وهكذا بالتكرار نحصل على الحلول المتتالية التقريبية من العلاقة التكرارية:

$$y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i; y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(n)}\right)\right] \qquad (6\text{-}15)$$

أما عبارة الخطأ هنا فهو نفسه مشتق دستور الخطأ في طريقة شبه المنحرف ويعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_P = -\frac{h^3}{12} y^{(2)}(\xi) \tag{6-16}$$

ويعرف هذا الخطأ بالخطأ في "قسم التصحيح".

بينما الخطأ الثاني: ε_c والذي يحسب من الخطأ في طريقة أولر :

$$\varepsilon_c = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \tag{6-17}$$

والذي يعرف بخطأ " قسم التنبؤ ".

مثال (5) مطلوب

لنأخذ المعادلة التفاضلية السابقة:

$$y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

حيث $y(1) = 1$ و $h = 0.1$ والمطلوب:

حل هذه المعادلة بطريقة أولر – كوشي في النقطة $x = 1.1$.

الحل: لدينا من طريقة أولر:

$$y(1.1) = 1.1$$

هذا القسم كما ذكرنا في النظري هو قسم التنبؤ والخطأ في هذا القسم هو خطأ التنبؤ والذي حسب سابقاً ويساوي:

$$|\varepsilon_c| < 0.0066667$$

أما قسم التصحيح فيحسب بالشكل:

$$y(1.1) = 1 + 0.05\ (1 + 1.03228) = 1.10677$$

حيث تم تعويض قيمة $y'(1.1)$ في الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة من صيغة أولر (من قسم التنبؤ).

٢٤٤ ← لم يؤخذ

مثال (6)

حل المعادلة السابقة من أجل : $h = 0.05$ ، $x_o = 1$

الحل:

لدينا:

$$y(1.05) \approx 1 + (0.05)(1) = 1.05$$

(من صيغة أولر ، وهو قسم التنبؤ).

ومنه قسم التصحيح يحسب بالشكل:

$$y(1.05) \approx 1 + (0.025)(1 + 1.0661) \approx 1.0516525$$

إن طريقة أولر – كوشي تتلخص فيما يلي:

1- نحسب أولاً:

$$y_{i+1}^{(o)} = y_i + h\,f(x_i, y_i) \quad \text{(قسم التنبؤ)}$$

2- نحسن هذه القيمة بالدستور:

$$y_{i+1}^{(n+1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(n)}\right)\right] \quad \text{(قسم التصحيح)} \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

3- نحسب الفرق:

$$\left| y_{i+1}^{(n+1)} - y_{i+1}^{(n)} \right|$$

ونتوقف عندما يكون هذا الفرق أصغر من قيمة ε ما حسب الدقة المطلوبة.

(6-4) طريقة رانج – كوتا Runge – Kutta

هذه الطريقة تستخدم العلاقات التالية لحل المعادلة التفاضلية:

$$y' = f(x, y) \tag{6-18}$$

مع الشرط الابتدائي $y(x_o) = y_o$

وهذه العلاقات هي:

إلى نهاية الفصل

$$y(x+h) \sim y(x)+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \qquad (6\text{-}19)$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} K_1 &= h.f(x,y) \\ K_2 &= h.f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 &= h.f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 &= h.f(x+h, y+K_3) \end{aligned} \qquad (6\text{-}20)$$

مثال (7):

طبق طريقة رانج – كوتا على المعادلة:

$$y' = f(x,y) = x.y^{\frac{1}{3}}$$

مع الشرط الابتدائي: $y(1)=1$

وذلك بأخذ $h=0.1$ و $x_o=1$

الحل:

نلاحظ أن:

$$\begin{aligned} K_1 &= (0.1).f(1,1)=0.1 \\ K_2 &= (0.1).f(1.05,1.05) \approx 0.10672 \\ K_3 &= (0.1).f(1.05,1.05336) \approx 0.10684 \\ K_4 &= (0.1).f(1.1,1.010684) \approx 0.11378 \end{aligned}$$

ومنه نجد أن:

$$y_1 = 1+\frac{1}{6}(0.1+0.21344+0.21368+0.11378) \approx 1.10682$$

نبين أخيراً أن هناك عدداً كبيراً من طرق حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى وكذلك يمكن استخدام طرق التحليل العددي لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة

الثانية وكذلك حل المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا وذلك بتحويلها إلى مجموعة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى. وسنكتفي في هذا المقرر بما تم ذكره.

(6-5) المعادلات الفرقية:

يشير التعبير " معادلة فروق " إلى معادلة تحتوي فروقاً مثل:

$$\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k = o \qquad (6\text{-}21)$$

إذن هي علاقة بين القيم y_k لتابع معرف على مجموعة متقطعة من الأدلة x_k وبفرض أن الأدلة على أبعاد متساوية، فإن التغيير العادي للدليل $x_k = x_o + hk$ يجعلنا نتعامل مع دليل صحيح K .

إن حل المعادلة الفرقية يعني إيجاد متتالية القيم y_k المحققة للمعادلة الفرقية من أجل مجموعة من الأعداد الصحيحة K .

إن طبيعة معادلة الفروق تجعل متتالية الحلول تحسب بالتكرار أي إذا كانت y_k معلومة تحسب y_{k+1}

تعريف:

"رتبة المعادلة الفرقية" هي الفرق بين أكبر وأصغر دليلين k يظهران في المعادلة.

مثال: المعادلة:

$$y_4 - y_1 = 3y_2$$

هي من المرتبة الثالثة.

(6-6) المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى:

لها الشكل العام:

$$y_{k+1} = f_1(k).\,y_k + f_2(k) \qquad (6\text{-}22)$$

وعندما يكون $f_2(k) = o$، تسمى بمعادلة "متجانسة".

إن حل هذه المعادلة يعني حساب y_{k+1} بدلالة y_k .

مثال عددي (1)

حل المعادلة الفرقية من المرتبة الأولى التالية :

$$y_{K+1} = ky_K + K^2$$

من أجل القيمة البدائية $y_o = 1$

الحل: بإعطاء k قيم متتالية بدءاً من الصفر نجد أن:

$$y_1 = 0.y_o + 0^2 = 0$$
$$y_2 = 1.y_1 + 1^2 = 1$$
$$y_3 = 2.y_2 + 2^2 = 2.1 + 4 = 6$$

وهكذا نجد أن:

$$y_4 = 27$$
$$y_5 = 124$$

(6-7) المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الثانية:

هي معادلة لها الشكل العام :

$$f_1(k)y_{k+2} + f_2(k).x_{k+1} + f_3(k).x_k + f_4(k) = o \qquad (6\text{-}23)$$

وتسمى " متجانسة " إذا كان $f_4(k) = o$ وعندما تكون الأمثال f_1, f_2, f_3 ثوابت تسمى معادلة فرقية ذات أمثال ثابتة.

لحل المعادلة الفرقية من المرتبة الثانية نكتب أولاً المعادلة المميزة لها . فمثلاً المعادلة:

$$ay_{K+2} + by_{K+1} + cy_K = o \qquad (6\text{-}24)$$

لها المعادلة المميزة:

$$ar^2 + br + c = o$$

ومميزها هو:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

هذه المعادلة لها الحل:

$$y_k = c_1 r_1^K + c_2 r_2^K$$

وهو يحقق المعادلة الفرقية (24-6) ويتم تحديد الثابتين c_2, c_1 من شروط البدء y_1, y_o أي أن:

$$\begin{aligned} y_o &= c_1 + c_2 \\ y_1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2 \end{aligned} \tag{6-25}$$

هاتان المعادلتان تعطيان:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_o r_2}{r_1 - r_2} \quad ; \quad c_2 = \frac{r_1 y_o - y_1}{r_1 - r_2} \tag{6-26}$$

مثال (2)

حل مسألة القيم الابتدائية من المرتبة الثانية:

$$y_{K+2} = y_{K+1} + y_K$$

حيث:

$$\begin{aligned} y_o &= o \\ y_1 &= 1 \end{aligned}$$

لنأخذ $k = 0,1,2,...$ فنجد أن:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + y_o = 1 \\ y_3 &= y_2 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ y_4 &= y_3 + y_2 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

وهكذا نجد بقية الحلول:

$$y_5 = 5$$

$$y_6 = 8 \ , \ y_7 = 13 \ , \ y_8 = 21 \ , \ y_9 = 34, ...$$

مثال (3):

أوجد حل المعادلة الفرقية التالية:

$$2y_{k+2} - 8y_{k+1} + 6y_k = o$$

مع أخذ $y_1 = . \ , \ y_o = 1$

الحل: لنشكل المعادلة المميزة لهذه المعادلة الفرقية:

$$2r^2 - 8r + 6 = o$$

ومنه:

$$\Delta = 64 - 48 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 4$$

ومنه:

$$r_1 = \frac{8+4}{4} = 3$$

$$r_2 = \frac{8-4}{4} = 1$$

وبالتالي فإن الحل العام لهذه المعادلة يأخذ الشكل:

$$y_k = c_1 .(1)^k + c_2 .(3)^k$$

نحدد الثوابت من شروط البدء:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 + c_2 . \\ 1.5 = c_1 . + 3c_2 . \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = 0.75 \\ c_2 = 0.25 \end{array}$$

ومنه نجد الحل:

$$y_k = 0.75 + 0.25(3)^k$$

طبعاً للحصول على بقية الحلول نبدل قيم k المتتالية لنحصل على بقية قيم y_k المتتالية، حيث: $k = 0,1,2,3,\dots$.

تمارين

1- حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

باستخدام طريقة أولر ومن أجل $h = 0.2$ و

حيث $o \le x \le 1$ ومن أجل الشرط الابتدائي $y(o) = 1$

2- حل المعادلة التفاضلية: $y' = x^2 + y^2$

من أجل الشرط الابتدائي: $y(o) = 1$

والخطوة: $h = 0.1$ ضمن المجال $(0, 0.2)$.

3- حل المعادلة التفاضلية بطريقة أولر ثم أولر – كوشي:

$$y' = x + y$$

حيث $y(o) = o$ و $h = 0.2$ في المجال $(0, 1)$

4- حل المعادلة التفاضلية السابقة بطريقة رانج – كوتا.

5- لتكن المعادلة التفاضلية $y' = x - y$ حيث $h = 0.1$ ، $y(o) = 2$

حل هذه المعادلة في النقطة $x = 0.6$ بطريقة رانج – كوتا.

6- أوجد حل المعادلة الفرقية:

$$3y_{k+2} - 12y_{k+1} + 12y_k = o$$

مع اعتبار الشروط الابتدائية:

$$y_o = o$$
$$y_1 = 3$$

7- أوجد الحل العام للمعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الأولى التالية:

$$y_{k+1} - 4y_k - 1 = o$$

من أجل القيمة الابتدائية $y_o = 2$

8- أوجد الحل الخاص للمعادلة الفرقية التالية:

$$2y_{k+2} - 6y_{k+1} - 8y_k = o$$

مع أخذ $y_1 = 2 \;,\; y_o = o$

(1) – حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة اولر، من أجل n=10 و h=0.1 .

$$y' = -y + x + 1$$
$$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 1$$

الحل:

x_i	التقريب y_i	الدقيقة y_i	القيمة المطلقة للخطأ
0.0	1.000000	1.000000	0.0
0.1	1.000000	1.004837	0.004837
0.2	1.010000	1.018731	0.008731
0.3	1.029000	1.040818	0.011818
0.4	1.056100	1.070320	0.014220
0.5	1.090490	1.106531	0.016041
0.6	1.131441	1.148812	0.017371
0.7	1.178297	1.196585	0.018288
0.8	1.230467	1.249329	0.018862
0.9	1.287420	1.306570	0.019150
1.0	1.348678	1.367879	0.019201

لاحظ أن الحل الدقيق لهذه المعادلة هو: $y(x) = x + e^{-x}$

(2) – حل المعادلات التفاضلية التالية بطريقة أولر.

a) $$y' = (\tfrac{y}{x})^2 + (\tfrac{y}{x})$$
$$1 \le x \le 1.2 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad ; \quad h = 0.1$$

الحل :

i	x_i	y_i
1	1.1	1.2
2	1.2	1.4281

b) $y' = \sin x + e^{-x}$

$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad h = 0.5$

الحل :

i	x_i	y_i
1	0.5	0.5
2	1.0	1.04298

c) $y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)$

$1 \le x \le 3 \quad ; \quad y(1) = -2 \quad ; \quad h = 0.5$

الحل :

i	x_i	y_i
1	1.5	-1.0
2	2.0	-1.0
3	2.5	-1.0
4	3.0	-1.0

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y}$

$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad h = 0.25$

الحل:

i	x_i	y_i
1	0.25	1.0000
2	0.50	1.1875
3	0.75	1.4601
4	1.00	1.7000

(3) – استخدم طريقة اولر لحل المعادلات التفاضلية التالية:

$a) \quad y' = x^2 \quad ; \quad 0 \le x \le 2 \quad ; \quad y(0) = 0$

$b) \quad y' = xy \quad ; \quad 0 \le x \le 2 \quad ; \quad y(0) = 1$

$c) \quad y' = 2x \quad ; \quad 0 \le x \le 2 \quad ; \quad y(0) = 1$

$d) \quad y' = -xy \quad ; \quad 0 \le x \le 4 \quad ; \quad y(0) = 4$

(4) – لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x$$
$$1 \le x \le 2 \quad ; \quad y(1) = 0$$

a)- حيث الحل الدقيق $y(x) = x^2(e^x - e)$، استخدم **طريقة أولر** حيث $h = 0.1$ لتقريب الحل وقارن هذا الحل مع الحل الدقيق.

b)- استخدم الإجابة في الحالة (a) وكذلك تقريب الاستيفاء الخطي لتقريب القيم التالية وقارن مع القيم الدقيقة:

(i) y(1.04)
(ii) y(1.55)
(iii) y(1.97)

الحل: (a)–

i	x_i	y_i	الفرق بين الحل الدقيق والحل التقريبي
1	1.1	0.271828	0.07409
5	1.5	3.18744	0.7802
6	1.6	4.62080	1.100
9	1.9	11.7480	2.575
10	2.0	15.3982	3.285

– (b)

x	الحل التقريبي	$y(x)$	الخطأ
1.04	0.108731	0.119986	0.01126
1.55	3.90412	4.78864	0.8845
1.97	14.3031	17.2793	2.976

(5) – لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y' = -y + x^2 + 1$$
$$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 1$$

حيث الحل الدقيق $y(x)=-2e^{-x}+x^2-2x+3$ ، n=10, h=0.1, استخدم طريقة رانج كوتا ثم طريقة أولر- كوشي لحل هذه المعادلة وقارن هذا الحل مع الحل الدقيق.

(6) – استخدم **طريقة رانج كوتا** لحل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'=-y+x+1 \quad ; \quad 0\le x\le 1 \quad ; \quad y(0)=1$$

حيث : n=10, h=0.1 .

(7) – لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y'=-y+1$$
$$0\le x\le 1 \quad ; \quad y(0)=0$$

حيث n=10, h=0.1 , استخدم **طريقة رانج كوتا** ثم طريقة أولر ثم طريقة أولر - كوشي لحل هذه المعادلة وقارن هذا الحل مع الحل الدقيق.

(8) – استخدم طريقة أولر- كوشي لحل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

a)
$$y'=\left(\tfrac{y}{x}\right)^2+\left(\tfrac{y}{x}\right)$$
$$1\le x\le 1.2 \quad ; \quad y(1)=1 \quad ; \quad h=0.1$$

الحل:

i	x_i	y_i
1	1.1	1.21405
2	1.2	1.46302

b)
$$y'=\sin x+e^{-x}$$
$$0\le x\le 1 \quad ; \quad y(0)=0 \quad ; \quad h=0.5$$

الحل:

i	x_i	y_i
1	0.5	0.521489
2	1.0	1.09531

c) $y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)$

$1 \le x \le 3 \quad ; \quad y(1) = -2 \quad ; \quad h = 0.5$

الحل:

i	x_i	y_i
1	1.5	-1.5
2	2.0	-1.33594
3	2.5	-1.25246
4	3.0	-1.20209

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y}$

$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad h = 0.25$

الحل:

i	x_i	y_i
1	0.25	1.093750
2	0.50	1.294851
3	0.75	1.511425
4	1.00	1.692287

(9) – أعد المثال السابق باستخدام طريقة رانج كوتا:

a) $y' = (\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})$

$1 \le x \le 1.2 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad ; \quad h = 0.1$

الحل:

i	x_i	y_i
1	1.1	1.21588
2	1.2	1.46755

b) $y' = \sin x + e^{-x}$

$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad h = 0.5$

الحل:

i	x_i	y_i
1	0.5	0.515898
2	1.0	1.09184

c) $y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)$

$1 \le x \le 3 \quad ; \quad y(1) = -2 \quad ; \quad h = 0.5$

الحل:

i	x_i	y_i
1	1.5	-1.49541
2	2.0	-1.33056
3	2.5	-1.24804
4	3.0	-1.19850

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y}$

$0 \le x \le 1 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad h = 0.25$

الحل:

i	x_i	y_i
1	0.25	1.087168
2	0.50	1.289921
3	0.75	1.513531
4	1.00	1.701786

(10) – لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{2}{x} y + x^2 e^x$$

$$1 \le x \le 2 \quad ; \quad y(1) = 0$$

حيث الحل الدقيق $y(x) = x^2 (e^x - e)$

a)– استخدم طريقة أولر- كوشي لحل هذه المعادلة حيث h=0.1 وقارن هذا الحل مع الحل الدقيق.

b)– استخدم الإجابة السابقة في الحالة (a) وكذلك تقريب الاستيفاء الخطي لتقريب قيمة y من أجل القيم المعطة وقارن مع قيم y الدقيقة:

(i) y(1.04)

(ii) y(1.55)

(iii) y(1.97)

c)- استخدم طريقة رانج كوتا لحساب الحل من أجل (h=0.1) وقارن مع الحل الدقيق.

الحل: (a)-

i	x_i	y_i
1	1.1	0.3423771
5	1.5	3.936429
6	1.6	5.678886
9	1.9	14.23738
10	2.0	18.57879

(b)-

x	الحل التقريبي
1.04	0.1369508
1.55	4.807658
1.97	17.27637

(c) -

i	x_i	y_i
1	1.1	0.349091
5	1.5	3.967585
6	1.6	5.720854
9	1.9	14.32286
10	2.0	18.68283

(11) - لتكن المعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2$$

$$1 \le x \le 2 \quad ; \quad y(1) = -1$$

حيث الحل الدقيق $y(x) = -\frac{1}{x}$

a)- استخدم طريقة أولر- كوشي لحل هذه المعادلة حيث h=0.05 وقارن هذا الحل مع الحل الدقيق.

b)– استخدم الإجابة السابقة في الحالة (a) وكذلك تقريب الاستيفاء الخطي لتقريب قيمة y من أجل القيم المعطاة وقارن مع قيم y الدقيقة:

(i) $y(1.052)$

(ii) $y(1.555)$

(iii) $y(1.978)$

c)– استخدم طريقة رانج كوتا لحساب الحل من أجل $(h=0.05)$ وقارن مع الحل الدقيق.

الفصل السابع
تقريب التوابع باستخدام طريقة المربعات الصغرى
توابع تشيبشيف، توابع لوجندر، تقريب بادي

مقدمة:

ثمة سؤال هام يطرح في مسائل التحليل العددي وله الكثير من التطبيقات العملية في معظم الفروع العلمية وبخاصة في المسائل الإحصائية (في مسائل التنبؤ) وهو كيف يمكننا تمثيل نقاط التجربة على شكل تابع يكون أقرب ما يمكن من التابع الحقيقي. أي كيف نستطيع تمرير منحن يمر أقرب ما يمكن من تلك النقاط التجريبية بأقل خطأ ممكن. هذه المسألة ستطرح في العلوم التطبيقية بشكل آخر أيضاً (كما هو في الإحصاء مثلاً) حيث أنه يعطى تابع ما ذو شكل رياضي معقد ويطلب مواءمته على شكل مستقيم مثلاً أو على شكل فرع من قطع مكافئ مثلاً ففي هذه الحالة يمكن تحويل هذه المسألة إلى المسألة المطروحة بداية وذلك بأن نأخذ عدداً من نقاط هذا التابع وأن نعد تلك النقاط وكأنه حصل عليها تجريبياً ومتابعة المسألة.

لنفرض أن y_i هي القيم التجريبية وY_i هي القيم التي نحصل عليها من التقريب. ولنضع $\delta = Y_i - y_i$ وهو الخطأ الذي نريده اصغر ما يمكن. إن حل هذه المسألة يمكن فيما إذا جعلنا النظيم للشعاع δ ذو المركبات δ_i اصغرياً. إذا أخذنا هذا النظيم-النظيم الاقليدي L_2 عندئذ نحصل على طريقة تقريبية تسمى "طريقة المربعات الصغرى" وإذا أخذنا هذا النظيم-النظيم الأعظمي عندئذ نحصل على طريقة تقريبية تسمى "طريقة تشيبشيف".

7-1-طريقة المربعات الصغرى:

لنأخذ مجموعة مكونة من m نقطة $(j=1,2,....,m)$; (x_j, y_j) والتي حصلنا عليها تجريبياً وحيث أن هذه النقاط ترتبط مع بعضها بعضاً بتابع y=f(x). كاعتبار أول لنشر لهذا التابع بكثير حدود من الدرجة n اصغر من m (n<m) .

$$Y = Y_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (7\text{-}1)$$

نقترح لتعيين كثير الحدود هذا, إيجاد قيم العوامل $a_i;(i=0,1,...,n)$ بحيث إن كثير الحدود يكون تقريباً (تقديراً) جيداً للمعطيات $(x_j, y_j);(j=1,2,....,m)$. إذا عوضنا هذه النقاط في كثير الحدود, نحصل على m معادلة:

$$\begin{aligned} R_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \ldots.. + a_n x_1^n - y_1 \\ R_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \ldots.. + a_n x_2^n - y_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_m &= a_0 + a_1 x_m + a_1 x_m^2 + \ldots.. + a_n x_m^n - y_m \end{aligned} \qquad (7\text{-}2)$$

إن هذه المساويات ليست معدومة (لا تساوي أصفاراً) لأنه ليس من الضروري أن يمر كثير الحدود بشكل دقيق من هذه النقاط. إن الفرق بين قيمة كثير الحدود وقيمة التابع التجريبية: $R_j = \sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i - y_j \quad ; \quad (j=1,2,....,m)$ تسمى بالباقي ويرمز لها بـ R_j. وهكذا فإنه لدينا m باقي تظهر في العلاقات (7-2).

إن مبدأ المربعات الصغرى يبنى على أساس أن أفضل تمثيل للمعطيات يكون بحيث يجعل مجموع مربعات البواقي أصغرياً. إذن لنعرف التابع :

$$f(a_0, a_1, ..., a_n) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \ldots\ldots + R_m^2) \qquad (7\text{-}3)$$

(في حالة الاستيفاء 0=)

ولنجعل هذا التابع اصغرياً. هذا يعني أن نعدم المشتقات الجزئية, أي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_0} &= 2\left(R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_0} + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_0} + \ldots\ldots + R_m \frac{\partial R_m}{\partial a_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_1} &= 2\left(R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_1} + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_1} + \ldots\ldots + R_m \frac{\partial R_m}{\partial a_1} \right) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial a_n} &= 2\left(R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_n} + R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_n} + \ldots\ldots + R_m \frac{\partial R_m}{\partial a_n} \right) = 0 \end{aligned} \qquad (7\text{-}4)$$

من الممكن الاختصار بكتابة العلاقات السابقة بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{i=0}^{n}(a_i x_j^i - y_j)^2 \quad ; \quad (j=1,2,...,m)$$

ولكن بالاشتقاق لدينا:

$$\frac{\partial R_j}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0}(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + ... + a_n x_j^n - y_j = 1$$
$$\frac{\partial R_j}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1}(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + ... + a_n x_j^n - y_j = x_j$$
$$\frac{\partial R_j}{\partial a_2} = \frac{\partial}{\partial a_2}(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + ... + a_n x_j^n - y_j = x_j^2 \qquad (7\text{-}5)$$
$$..$$
$$\frac{\partial R_j}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n}(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + ... + a_n x_j^n - y_j = x_j^n$$

من أجل: (j=1,2,.....,m). وبالتالي فإن الجملة (4-3) تصبح بالشكل التالي:

$$R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_m = 0$$
$$x_1 R_1 + x_2 R_2 + ... + x_m R_m = 0$$
$$x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + ... + x_m^2 R_m = 0 \qquad (7\text{-}6)$$
$$..$$
$$x_1^n R_1 + x_2^n R_2 + ... + x_m^n R_m = 0$$

لنعوض قيمة R_j من (2-3) ونجمع أل (n+1) عامل $a_i ; (i=0,1,2,...,n)$ المجهولة فنحصل على العلاقات التالية:

$$ma_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_2 + ... + \sum_{j=1}^{m} x_j^n a_n - \sum_{j=1}^{m} y_j = 0$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^3 a_2 + ... + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+1} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j y_j = 0$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^3 a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^4 a_2 + ... + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+2} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j = 0 \qquad (7\text{-}7)$$
$$..$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j^n a_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+1} a_1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^{n+2} a_2 + ... + \sum_{j=1}^{m} x_j^{2n} a_n - \sum_{j=1}^{m} x_j^n y_j = 0$$

حيث إن الجمع كله يتم من 1 إلى m ، أي إن:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ... + x_m^3$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j = x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 + ... + x_m^2 y_m$$

تعريف (1):

تسمى العلاقات (7-7) باسم "المعادلات الناظمية – أو العادية.

إن كل هذه المجاميع تعرف مجموعة من (n+1) معادلة خطية بـ (n+1) مجهول $a_i \; ; \; (i = 0,1,2,...,n)$ وحلها يعطي قيمة العوامل $a_i \; ; \; (i = 0,1,2,...,n)$ وهي تحدد كثير الحدود:

$$y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (7\text{-}8)$$

إن مبدأ المربعات الصغرى ليس مقتصراً في الواقع على كثيرات الحدود. إن التابع المرغوب التقريب به (نقول المواءمة به) يمكن أن يأخذ أي شكل معروف طالما يمكن حل المعادلات الناظمية التي نحصل عليها، وهذا يكون أسهل بالطبع عندما تكون المعادلات الناظمية خطية.

7-1-1- تطبيقات أولية (في الإحصاء الرياضي):

ليكن لدينا m زوج $(x_j, y_j) \; ; \; (j = 1,2,....,m)$، كنتائج تجريبية لتجربة ما:

x	x_1	x_2	x_3	....	x_m
y	y_1	y_2	y_3	......	y_m

ولنفرض أنه نريد مطابقة– مواءمة – هذه المعطيات بعلاقة بين x و y . يمكننا مناقشة عدد من الحالات كما يلي:

1- شكل خطي (مستقيم) :

إن العلاقة الأسهل (الأبسط) بين x و y هي من الشكل الخطي : y=a+bx
إن المشكلة الآن تكمن في تعيين الثوابت a و b بحيث يكون المستقيم تمثيل جيداً

لجدول المعطيات. إن تطبيق مبدأ المربعات الصغرى ينتج من المعادلات (7-7)- المعادلات الناظمية – من أجل هذه الحالة، نحصل على المعادلتين:

$$ma + \sum_{j=1}^{m} x_j b = \sum_{j=1}^{m} y_j$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_j a + \sum_{j=1}^{m} x_j^2 b = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j \qquad (7\text{-}9)$$

إن حل جملة هذه المعادلات يعطينا:

$$a = \tfrac{1}{\Delta}[(\sum_{j=1}^{m} y_j).(\sum_{j=1}^{m} x_j^2) - (\sum_{j=1}^{m} x_j y_j).(\sum_{j=1}^{m} x_j)$$
$$b = \tfrac{1}{\Delta}[m(\sum_{j=1}^{m} x_j y_j) - (\sum_{j=1}^{m} y_j).(\sum_{j=1}^{m} x_j) \quad ; \qquad (7\text{-}10)$$
$$\Delta = m\sum_{j=1}^{m} x_j^2 + (\sum_{j=1}^{m} x_j)^2$$

مثال (1): ليكن الجدول التجريبي التالي:

x	-3	-1	1	4	5	7	10
y	-2	-1	0	1.5	2	3	4.5

لائم هذه المعطيات على شكل خط مستقيم مطبقاً طريقة المربعات الصغرى.

الحل:

لنحـــسب القـــيم التاليـــة أولاً : m=7 ، $\sum x_j = 23$ ، $\sum x_j^2 = 201$، $\sum y_j = 8$ ، $\sum x_j y_j = 89$ وبالتالي فإن المعادلات الناظمية تأخذ الشكل التالي:

$$7a + 23b = 8$$
$$23a + 201b = 89$$

وحلها يعطي القيم: a=-0.5 وb=0.5 و معادلة المستقيم تأخذ الشكل التالي :

$y=-0.5+0.5x$ أو $2y+1=x$.

2- **شكل قطعي:**

لتكن العلاقة بين x و y هي من شكل قطعي، وقبل معالجة هذه الحالة وبغية التبسيط في الرموز، لنرمز (في المعادلات الناظمية) بما يلي:

$$S_0 = m \quad ; \quad k_0 = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

$$S_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j \quad ; \quad k_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \quad ; \quad k_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 y_j \qquad (7\text{-}11)$$

....

$$S_k = \sum_{j=1}^{m} x_j^k \quad ; \quad k_k = \sum_{j=1}^{m} x_j^k y_j$$

إن أحد الأشكال القطعية المكافئية هو التابع التربيعي:

$$y = a + bx + cx^2 \qquad (7\text{-}12)$$

حيث له ثلاثة عوامل – مجاهيل –هي: c, b, a إن المعادلات الناظمية تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} ma + S_1 b + S_2 c &= k_0 \\ S_1 a + S_2 b + S_3 c &= k_1 \\ S_2 a + S_3 b + S_4 c &= k_2 \end{aligned} \qquad (7\text{-}13)$$

مثال (2):

لائم المعطيات (x_j, y_j) المعطاة في الجدول التجريبي التالي على شكل قطع مكافئ.

x	y	X^2	X^3	X^4	xy	X^2y
-2	0	4	-8	16	0	0
-1	4	1	-1	1	-4	4
0	6	0	0	0	0	0
1	6	1	1	1	6	6
2	4	4	8	16	8	16
3	0	9	27	81	0	0
4	-6	16	64	256	-24	-96
7	14	35	91	371	-14	-70

المعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$7a+7b+35c=14$$
$$7a+35b+91c=-14$$
$$35a+91b+371c=-70$$

إن حل هذه المعادلات هو: $c=-1, b=1, a=6$ و تكون المعادلة المطلوبة هي : $y=6+x-x^2$.

ملاحظة (1):

يمكن التبديل بين x و y : لكتابة المعطيات بمعادلة من الشكل القطعي التالي: $x=a+by+cy^2$.

مثال (3):

الجدول التالي حسب ليعطي المجاميع من أجل m=7 (لاحظ التغيير في تعريف المجاميع):

x	y	y^2	y^3	y^4	yx	y^2x
1	0	0	0	0	0	0
2	2	4	8	16	4	8
2	-2	4	-8	16	-4	8
5	4	16	64	256	20	80
5	-4	16	-64	256	-20	80
10	6	36	216	1296	60	360
10	-6	36	-216	1296	-60	360
7	0	112	0	3136	0	896

والمعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$7a+0b+112c=35$$
$$0a+112b+0c=0$$
$$112a+0b+313c=896$$

إن حل هذه المعادلات هو: $c=0.25\ , b=0, a=1$ و تكون المعادلة المطلوبة هي: $y^2=4(x-1)$ أو $x=1+\frac{1}{4}y^2$.

3- شكل تكعيبي:

لتكن العلاقة بين x و y هي من الشكل التكعيبي التالي:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad (7\text{-}14)$$

والمطلوب حساب العوامل $a_i \quad ; \quad (i = 0,1,2,3)$ بطريقة المربعات الصغرى سنستخدم هنا المجاميع (7-11)، إن الجدول-1- التالي يمكننا من حساب المطلوب:

الجدول-1-

X^0	x	x^2	x^3	x^4	X^5	X^6	y	xy	x^2y	X^3y
1	X_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	x_1^5	x_1^6	y_1	x_1y_1	$x_1^2y_1$	$x_1^3y_1$
1	X_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	x_2^5	x_2^6	y_2	x_2y_2	$x_2^2y_2$	$x_2^3y_2$
1	X_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	x_3^5	x_3^6	y_3	x_3y_3	$x_3^2y_3$	$x_3^3y_3$
:										:
1	X_m	x_m^2	x_m^3	x_m^4	x_m^5	x_m^6	y_m	x_my_m	$x_m^2y_m$	$x_m^3y_m$
$S_0 = m$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	k_0	k_1	k_2	k_3

والمعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 + s_3a_3 &= k_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 + s_4a_3 &= k_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 + s_5a_3 &= k_2 \\ s_3a_0 + s_4a_1 + s_5a_2 + s_6a_3 &= k_3 \end{aligned} \qquad (7\text{-}15)$$

إن حل هذه المعادلات يعط العوامل $a_i \quad ; \quad (i = 0,1,2,3)$.

مثال (4):

لائم المعطيات (x_j, y_j) المعطاة في الجدول التجريبي التالي على شكل تكعيبي باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

x	-4	-2	-1	0	1	3	4	6
y	-35.1	15.1	15.9	8.9	0.1	0.1	21.1	135

الحل :

لنكتب أولاً جدول المجاميع الآتي:

X^0	x	x^2	x^3	x^4	X^5	X^6	y	xy	x^2y	X^3y
1	-4	16	-64	256	-1024	4096	-35.1	140.4	-561.6	2246.4
1	-2	4	-8	16	-32	64	15.1	-30.2	60.4	-120.8
1	-1	1	-1	1	-1	1	15.9	-15.9	15.9	-15.9
1	0	0	0	0	0	0	8.9	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1
1	3	9	27	81	243	729	0.1	0.3	0.9	2.7
1	4	16	64	256	1024	4096	21.1	84.4	337.6	1350.4
1	6	36	216	1296	7776	46656	135.0	810.0	4860.0	29160.0
8	7	83	235	1907	7987	55643	161.1	989.1	4713.3	32622.9

وبالتالي فإن المعادلات الناظمية تعطى بالشكل التالي:

$$8a_0+7a_1+83a_2+235a_3=161.1$$
$$7a_0+83a_1+235a_2+1907a_3=989.1$$
$$83a_0+235a_1+1907a_2+7987a_3=4713.3$$
$$235a_0+1907a_1+7987a_2+55643a_3=32622.9$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات (بطريقة كروت مثلاً) نجد أن: $a_0=9.011039$ ، $a_1=-8.966140$ ، $a_2=-1.000093$ ، $a_3=0.999074$

والشكل المناسب (التكعيبي) يكون:

$$y=0.999x^3-1.000x^2-8.966x+9.011$$

إن الجدول التالي يعطي مقارنة القيمة التجريبية والقيمة المحسوبة بتلك العلاقة التكعيبية والفرق بينهما.

x	-4	-2	-1	0	1	3	4	6
y(المعطاة)	-35.1	15.1	15.9	8.9	0.1	0.1	21.1	135
y(المحسوبة)	-35.1	15.0	16.0	9.0	0.0	0.1	21.1	135
الفرق	٠	0.1	-0.1	-0.1	-0.1	٠	٠	٠

(7-2)- حساب الأخطاء:

لحساب الأخطاء بين القيمة الحقيقية $\overline{Y}_i$ (لتابع في نقطة ما (x_i,y_i)) والقيمة التجريبية y_i نعطي العلاقة التالية، والتي تحسب الجذر التربيعي لوسطي المربعات والتي يرمز لها بـ y_i RMS error of (Root Mean Square) :

$$\text{RMS error of } y_i=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(\overline{Y}_i-y_i)^2}{m}\right]} \quad (7\text{-}16)$$

مثلاً عندما نحسب $P(x_i)$ كقيمة تقريبية لـ y_i فالخطأ يكون:

$$\varepsilon = \text{RMS error of } P(x_i) = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(\bar{Y}_i - P(x_i))^2}{m}\right]} \qquad (7\text{-}17)$$

(7-3)-طريقة المربعات الصغرى من أجل التوابع المتعامدة :

بفرض أن كثيرة الحدود التقريبية في طريقة المربعات الصغرى لها الشكل التالي:

$$Y_n(x) = a_o\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots\dots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x) \qquad (7\text{-}18)$$

ولنطبق طريقة المربعات الصغرى لتحديد ثوابت $Y_n(x)$، حيث $\varphi_i(x) = x^i$

ولذلك نحسب أولاً المقادير التالية:

$$\begin{aligned}
R_1 &= a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + a_2\varphi_2(x_1) + \dots\dots + a_n\varphi_n(x_1) - y_1 \\
R_2 &= a_0\varphi_0(x_2) + a_1\varphi_1(x_2) + a_2\varphi_2(x_2) + \dots\dots + a_n\varphi_n(x_2) - y_2 \qquad (7\text{-}19) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
R_m &= a_0\varphi_0(x_m) + a_1\varphi_1(x_m) + a_2\varphi_2(x_m) + \dots\dots + a_n\varphi_n(x_m) - y_m
\end{aligned}$$

يمكن كتابة العلاقات السابقة بالشكل المختصر التالي:

$$R_j = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x_j) - y_j \quad ; \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

لنرمز أيضاً بـ:

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \dots\dots + R_m^2) \qquad (7\text{-}20)$$

ولنجعل هذا التابع أصغرياً:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a_0} &= 2\left(R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_0} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_0} + \dots\dots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_0}\right) = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial a_1} &= 2\left(R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_1} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_1} + \dots\dots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_1}\right) = 0 \qquad (7\text{-}21) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial f}{\partial a_n} &= 2\left(R_1\frac{\partial R_1}{\partial a_n} + R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_0} + \dots\dots + R_m\frac{\partial R_m}{\partial a_n}\right) = 0
\end{aligned}$$

أي بشكل عام لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\sum_{i=0}^{n}(a_i\varphi_i(x_j)-y_j)^2 \quad ; \quad (j=1,2,...,m)$$

لنحسب إذن كل مما يلي:

$$\frac{\partial R_j}{\partial a_0}=\frac{\partial}{\partial a_0}(a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+a_2\varphi_2(x_j)+\cdots+a_n\varphi_n(x_j)-y_j=\varphi_0(x_j)$$
$$\frac{\partial R_j}{\partial a_1}=\frac{\partial}{\partial a_1}(a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+a_2\varphi_2(x_j)+\cdots+a_n\varphi_n(x_j)-y_j=\varphi_1(x_j)$$
$$\frac{\partial R_j}{\partial a_2}=\frac{\partial}{\partial a_2}(a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+a_2\varphi_2(x_j)+\cdots+a_n\varphi_n(x_j)-y_j=\varphi_2(x_j)$$

....

$$\frac{\partial R_j}{\partial a_n}=\frac{\partial}{\partial a_n}(a_0\varphi_0(x_j)+a_1\varphi_1(x_j)+a_2\varphi_2(x_j)+\cdots+a_n\varphi_n(x_j)-y_j=\varphi_n(x_j)$$
$$(j=1,2,...,m) \qquad (7\text{-}22)$$

وبالتالي فإن جملة المعادلات (7-21) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&R_1\varphi_0(x_1)+R_2\varphi_0(x_2)+R_3\varphi_0(x_3)+\cdots+R_m\varphi_0(x_m)=0\\
&R_1\varphi_1(x_1)+R_2\varphi_1(x_2)+R_3\varphi_1(x_3)+\cdots+R_m\varphi_1(x_m)=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7\text{-}23)\\
&R_1\varphi_n(x_1)+R_2\varphi_n(x_2)+R_3\varphi_n(x_3)+\cdots+R_n\varphi_n(x_m)=0
\end{aligned}$$

نعوض من (7-19) قيمة R_j ونجمع الـ $(n+1)$ عامل a_i $(i=0,1,2,....,n)$ المجهولة فنحصل على مجموعة المعادلات الناظمية التالية:

$$a_0\sum_{j=1}^{m}\varphi_0^2(x_j)+a_1\sum_{j=1}^{m}\varphi_0(x_j)\varphi_1(x_j)+........+a_n\sum_{j=1}^{m}\varphi_0(x_j)\varphi_n(x_j)=\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_0(x_j)$$
$$a_0\sum_{j=1}^{m}\varphi_0(x_j)\varphi_1(x_j)+a_1\sum_{j=1}^{m}\varphi_1^2(x_j)+........+a_n\sum_{j=1}^{m}\varphi_1(x_j)\varphi_n(x_j)=\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_1(x_j)$$

....

$$a_0\sum_{j=1}^{m}\varphi_0(x_j)\varphi_n(x_j)+a_1\sum_{j=1}^{m}\varphi_1(x_j)\varphi_n(x_j)+........+a_n\sum_{j=1}^{m}\varphi_n^2(x_j)=\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_n(x_j)$$
$$j=1,2,...,m$$
$$(7\text{-}24)$$

الآن إذا كان لدينا: $if: \; i\neq j \quad \sum\varphi_i\varphi_j=0$ (شرط تعامد كثيرات الحدود)

فإن المعادلات الناظمية تأخذ الشكل المبسط التالي:

$$a_0\sum_{j=1}^{m}\varphi_0^2(x_j)-\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_0(x_j)=0$$

$$a_1\sum_{j=1}^{m}\varphi_1^2(x_j)-\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_1(x_j)=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7\text{-}25)$$

$$a_n\sum_{j=1}^{m}\varphi_n^2(x_j)-\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_n(x_j)=0$$

$$j=1,2,\dots,m$$

ومنه نجد أن:

$$a_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_i(x_j)}{\sum_{j=1}^{m}\varphi_i^2(x_j)} \quad , \quad i=0,1,2,\dots,n \quad ; \quad j=1,2,\dots,m \qquad (7\text{-}26)$$

وبشكل خاص إذا كان: $\sum\varphi_i\varphi_j=1$ فإن التعامد كما هو معلوم يسمى "منتظم" ونحصل في هذه الحالة على العوامل a_i ، $(i=0,1,2,\dots,n)$:

$$a_i=\sum_{j=1}^{m}y_j\varphi_i(x_j) \quad , \quad i=0,1,2,\dots,n \quad ; \quad j=1,2,\dots,m$$

هناك عدد من كثيرات الحدود المتعامدة منها كثيرات حدود (توابع) تشيبشيف وكذلك توابع لوجاندر وغيرها وسنتناول في هذا الفصل دراسة مسألة التقريب باستخدام كثيرات حدود (توابع) تشيبشيف و توابع لوجاندر.

(7-4)- التقريب باستخدام كثيرات حدود (توابع) تشيبشيف:

7-4-1- تعريف (2) -كثيرات حدود تشيبشيف:

تعرف كثيرات حدود تشيبشيف بالعلاقة :

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x) \quad ; \quad n\in N$$

وحيث إن $T_n(x)$ يحقق العلاقة: $T_n(x)=T_{-n}(x)$ وأن $T_n(x)$ معرف على المجال: $-1\le x\le +1$. كما نلاحظ أنه عندما: $T_0(x)=1 \quad ; \quad n=0$

و عندما : $T_1(x)=x \quad ; \quad n=1$

كما يمكن حساب $T_2(x)$ و $T_3(x)$ ......بالشكل التالي:

لنفرض أن $\theta = \cos^{-1} x$ عندئذ يكون : $T_n(x) = \cos(n\theta)$ ومنه فإن :

$$T_2(x) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x$$

استناداً إلى القانون العام:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta . \cos n\theta$$

نجد إن:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \qquad (7\text{-}27)$$

وتعرف هذه العلاقة بالعلاقة التدريجية لأي تابع من توابع تشيبشيف بدلالة تابعين سابقين.

مثلاً من أجل:

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) \quad ; \quad n=3$$
$$= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

وكذلك من أجل: $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \quad ; \quad n = 4$

وهكذا نجد أن:

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$
$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \qquad (7\text{-}28)$$
$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 - 1$$
$$T_{10}(x) = 510x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

وبشكل عام يمكننا أن نعطي علاقة عامة لهذه التوابع-كثيرات الحدود من الدرجة n - بالشكل التالي:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \tfrac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} 2^{n-2i-1} x^{n-2i} \qquad (7\text{-}29)$$

حيث: $[n/2]$ تمثل أكبر عدد صحيح لهذا الكسر و $\binom{n-i}{i}$ رمز التوافيق (أمثال ثنائي حد نيوتن)أي التي تحقق القانون: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. يمكن ملاحظة أن كثير الحدود السابق لتشيبشيف هو من الدرجة n وأن أمثال أكبر حد تساوي 2^{n-1}.

7-4-2-كثيرات حدود تشيبشيف كحل لمعادلة تفاضلية:

يمكن البرهان بسهولة على أن كثير حدود تشيبشيف $T_n(x)$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0. \qquad (7\text{-}30)$$

البرهان :

لنكتب $y=T_n(x)=\cos(n\theta)$ (أي رمزنا لكل θ بـ $\cos^{-1}x$) فنجد إن

$$\frac{dy}{dx}=y'=-n\sin n\theta.\theta'=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$$

ومنه فإن :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{-n^2.\cos n\theta}{1-x^2}+\frac{y'x}{1-x^2}$$

وبالتالي نجد أن المعادلة التفاضلية التي تحققها كثيرات حدود تشيبشيف $T_n(x)$ هي:

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

وبالعودة إلى الرمز θ نجد أن هذه المعادلة تأخذ الشكل المطلوب:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0$$

أي إن $T_n(x)$ حل خاص للمعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0$$

7-4-3-كثيرات حدود تشيبشيف كتوابع متعامدة:

كما ذكرنا في الفقرة السابقة أن كثيرحدود تشيبشيف $T_n(x)$ هو من الدرجة n وأن أمثال أكبر حد تساوي 2^{n-1}. يمكننا أيضاً البرهان على خاصة التعامد لهذه التوابع وقبل ذلك لنذكر بتعريف تعامد التوابع.

تعريف (3):

نقول أن التابعين الحقيقيين f(x) وg(x) المعرفين على المجال [a,b] متعامدين في هذا المجال إذا كان: $\int_a^b f(x).g(x)dx = 0$ كما نقول عن مجموعة التوابع الحقيقية: $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ المعرفة والمستمرة على المجال [a,b] والتي لا يطابق أي منها الصفر في هذا المجال أنها متعامدة في ذلك المجال إذا كان:

$$\int_a^b f_i(x).f_j(x)dx = 0 \quad , \quad i \neq j$$.

يمكن البرهان على أن توابع تشيبشيف السابقة متعامدة وتحقق الشرط التالي:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{T_i(x)T_j(y)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & for \quad : i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & for : i = j \neq 0 \\ \pi & for : i = j = 0 \end{cases}$$

(7-31)

ولبرهان ذلك لنفرض أن: $x = \cos\theta$ فنجد أن:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{T_i(x)T_j(y)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi} (\cos i\theta)(\cos j\theta) d\theta$$

إذا كان : $i \neq j$ فإن: $$\mathrm{I} = \left[\frac{\sin(\mathrm{i}+\mathrm{j})\theta}{2(\mathrm{i}+\mathrm{j})} + \frac{\sin(\mathrm{i}-\mathrm{j})\theta}{2(\mathrm{i}-\mathrm{j})} \right]_0^{\pi} = 0$$

وإذا كان : $i = j \neq 0$ فإن: $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos^2 \mathrm{i}\theta.\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

وإذا كان : i=j=0 فإن: $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi$$.

يمكن البرهان أيضاً على أن توابع تشيبشيف تملك n جذر في المجال [-1,+1] وليس لها أي جذر آخر خارج هذا المجال كما أن هذه التوابع قيمة عظمى تساوي الواحد بالقيمة المطلقة وذلك في النقاط التي تنعدم فيها هذه التوابع.

7-4-4-حساب قوى x بدلالة توابع تشيبشيف:

يمكن حساب قوى x بدلالة توابع تشيبشيف $T_n(x)$ فنجد أن:

من سابق نعلم أن:

$$1 = T_0(x)$$

و

$$x = T_1(x)$$

وكذلك نجد: $x^2 = \frac{1}{2}(T_0 + T_2)$ وكذلك.

$$x^3 = \tfrac{1}{4}(3T_1 + T_3)$$
$$x^4 = \tfrac{1}{8}(T_? + 4T_2 + T_4)$$
$$x^5 = \tfrac{1}{16}(10T_1 + 5T_3 + T_5)$$
$$x^6 = \tfrac{1}{32}(10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)$$
$$x^7 = \tfrac{1}{64}(35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)$$
$$x^8 = \tfrac{1}{128}(35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)$$
$$x^9 = \tfrac{1}{256}(125T_1 + 84T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9)$$
$$x^{10} = \tfrac{1}{512}(126T_0 + 210T_2 + 120T_4 + 45T_6 + 10T_8 + T_{10})$$

(7-32)

بشكل مشابه، يمكن التحقق أيضاً من العلاقة:

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{i} T_{n-2i}(x) \qquad (7\text{-}33)$$

حيث نلاحظ أن مثل كثير حدود تشيبشيف ذو الدليل الأكبر هو: $\frac{1}{2^{n-1}}$

7-4-5-استخدام كثيرات حدود (توابع) تشيبشيف في التقريب:

الآن لنرى كيف يمكننا تقريب التابع $y(x)$ بكثير حدود من الشكل:

$P(x) = a_0T_0 + a_1T_1 + ... + a_nT_n$ أي كيف نحسب الأمثال $a_i, i = 0,1,2,...,n$

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى نجد أن:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(y(x) - a_0T_0 - a_1T_1 - ...... - a_nT_n)^2\, dx \text{ ،}$$

حيث فرضنا أن: $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، يسمى تابع الوزن (Weight Function)

وباشتقاق العلاقة السابقة بالنسبة لـ a_i وجعلها معدومة وباستخدام شروط تعامد توابع تشيبشيف يمكن البرهان على أن:

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{+1} W(x)y(x)T_i(x)dx}{\int_{-1}^{+1} W(x)T_i^2(x)dx} \qquad (7\text{-}34)$$

هذه العلاقة تعطي المطلوب:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

وكذلك:

$$a_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad , \quad i \neq 0$$

مثال (5): أوجد كثير حدود التقريب من الدرجة الثالثة للتابع y(x)=sinx بدلالة كثيرات حدود تشيبشيف.

الحل: لدينا هنا طريقتان :

- الأولى باستخدام تابع الوزن W(x) لتعيين الثوابت a_i.
- الثانية والتي نجد أنها الأسهل وذلك من خلال كتابة منشور ماك لوران للتابع بالنسبة لـ x ثم تعويضها بالنسبة لـ $T_n(x)$، أي:

$$\sin x \cong x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 = T_1 - \frac{1}{24}(3T_1 + T_3) + \frac{1}{1920}(10T_1 + 5T_3 + T_5)$$

$$= \frac{169}{192}T_1 - \frac{5}{128}T_3 + \frac{1}{1920}T_5 \cong \frac{169}{192}T_1 - \frac{5}{128}T_3 (= 0.88T_1 - 0.04T_3 \cong x - 0.16x^3)$$

مثال (6): أوجد كثير حدود التقريب من الدرجة الأولى للتابع $y(x) = x^2$ (باستخدام طريقة المربعات الصغرى) بدلالة كثيرات حدود تشيبشيف ضمن المجال [0,1] وباستخدام تابع الوزن $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

الحل: يجب تحويل المجال [0,1] أولا إلى المجال [-1,+1] و يمكننا عمل ذلك بتغيير المتحول بالشكل الخطي التالي: $x = \frac{1}{2}(1+t)$ و يأخذ التابع $y(x) = x^2$ الشكل: $y(t) = \frac{1}{4}(t^2 + 2t + 1)$ وبالتالي لدينا:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{t^2+2t+1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{3}{8}$$

وكذلك:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{y(t)T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{t.(t^2+2t+1)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2}$$

ومنه فإن:

$$P(t) = a_0 t_0 + a_1 t_1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}t$$

(7-5)-التقريب باستخدام كثيرات حدود (توابع) لوجاندر:

تعريف: تعرف كثيرة حدود لوجاندر من الدرجة n بالشكل التالي:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad , \quad (n = 0,1,2,....) \qquad (7\text{-}35)$$

فمن أجل: n=0 نجد أن: $P_0(x) = 1$

ومن أجل: n=1 نجد أن: $P_1(x) = \frac{1}{2.1!}\frac{d(x^2-1)}{dx} = x$

ومن أجل: n=2 نجد أن:

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2.2!}\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

ومن أجل: n=3 نجد أن:

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3.3!}\frac{d^3(x^2-1)^3}{dx^3} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ومن أجل: n=4 نجد أن:

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4.4!}\frac{d^4(x^2-1)^4}{dx^4} = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

وهكذا نجد العلاقة التدريجية التالية:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \qquad (7\text{-}36)$$

كما يمكننا بالعكس حساب قوى x (بشكل مشابه لما تم من أجل كثيرات حدود تشيبشيف) بدلالة كثيرات حدود لوجاندر نجد أن:

$$\begin{aligned} 1 &= P_0(x) \\ x &= P_1(x) \\ x^2 &= \tfrac{1}{3}(P_0 + 2P_2) \\ x^3 &= \tfrac{1}{5}(3P_1 + 2P_3) \\ x^4 &= \tfrac{1}{35}(7P_0 + 20P_2 + 8P_4) \end{aligned} \qquad (7\text{-}37)$$

7-5-1-بعض خواص كثيرات حدود لوجاندر:

-1 $\int_{-1}^{1} x^k.P_n(x)dx = 0 \quad , \quad k = 0,1,2,...,n-1$

-2 $\int_{-1}^{1} x^n.P_n(x)dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

-3 $\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{(2n+1)}$

-4 $\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$

بعد هذه المقدمة عن توابع لوجاندر وبشكل مشابه للدراسة التي تمت لتقريب التوابع باستخدام كثيرات حدود تشيبشيف يمكننا أيضاً استخدام توابع لوجاندر لتقريب التوابع. إذن السؤال كيف يمكننا تقريب تابع ما y(x)=f(x) بكثير حدود لوجاندر $P_n(x)$ وذلك بتطبيق طريقة المربعات الصغرى ، حيث أن كثير حدود لوجاندر يمكن كتابته بالشكل:

$$Y(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + ... + a_nP_n(x) \quad (7\text{-}38)$$

فنجد:

$$I = \int_{-1}^{1} [y(x) - a_0P_0(x) - a_1P_1(x) - a_2P_2(x) + ... - a_nP_n(x)]^2 dx \quad (7\text{-}39)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للأمثال a_i وجعل هذه المشتقات معدومة نجد أن:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = -2\int_{-1}^{+1} [y(x) - a_0P_0(x) - a_1P_1(x) - a_2P_2(x) + ... - a_nP_n(x)]P_i(x)dx = 0$$

وباستخدام خواص التعامد السابقة الذكر لتوابع لوجاندر نجد أن:

$$\int_{-1}^{+1} [y(x) - a_iP_i(x)]P_i(x)dx = 0$$

والتي تعطينا:

$$a_i = \frac{\int_{-1}^{1} y(x)P_i(x)dx}{\int_{-1}^{1} P_i^2(x)dx} = \frac{1}{2}(2i+1)\int_{-1}^{+1} y(x)P_i(x)dx \,, \quad i = 0,1,2,...,n. \quad (7\text{-}40)$$

مثال (7): أوجد كثيرة حدود تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية للتابع : y(x)=sinx في المجال $[0, \pi]$ مستخدماً توابع لوجاندر.

الحل: نجري تغييراً في المتحول بالشكل التالي : $x = \frac{1}{2}(1+t)\pi$ يؤدي لتحويل المجال $[0, \pi]$ إلى المجال [-1,+1] . و يأخذ التابع y(x)=sinx الشكل الآتي بدلالة المتغير الجديد t:

$$y(t) = \sin[\tfrac{1}{2}(1+t)\pi]$$

إن كـثيرة الحـدود التقريبيـــة (مـــن الدرجـــة الثانيـــة) تأخــذ الــشكل:

$Y(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$ حيـــــــــــث أن: $P_0(x) = 1$، $P_1(x) = x$،

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ويبقى تحديد الثوابت: a_0, a_1, a_2 ويتم ذلـك مـن خـلال الدساتير السابقة بالشكل الآتي:

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sin[\tfrac{1}{2}(1+t)\pi]dt = \tfrac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \tfrac{3}{2}\int_{-1}^{+1} \sin[\tfrac{1}{2}(1+t)\pi]tdt = 0$$

$$a_2 = \tfrac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \sin[\tfrac{1}{2}(1+t)\pi]\tfrac{1}{2}(3t^2 - 1)dt = \tfrac{10}{\pi}(1 - \tfrac{12}{\pi^2})$$

و كثيرة الحدود التقريبية تكون:

$$Y(x) = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{10}{\pi}(1 - \tfrac{12}{\pi^2})\tfrac{1}{2}(3t^2 - 1) = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{10}{\pi}(1 - \tfrac{12}{\pi^2})[\tfrac{6}{\pi^2}(x - \tfrac{\pi}{2})^2 - \tfrac{1}{2}]$$

(7-6)-تقريب التوابع الكسرية – تقريب بادي (Padé):

إن بعض صفوف كثيرات الحدود لها مميزات كما لاحظنا سابقاً في استخدامها في التقريب، يوجد عـدد كـبيرمن كـثيرات الحـدود يمكـن اسـتخدامها لتقريـب أي تـابع مستمر f(x) في مجال مغلق [a,b]. لنعتبر الآن أن r(x) تابع كسري من الدرجة N لـه الشكل: $r(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ حيث أن P و q كثيري حدود بمجموع درجـات يـساوي N ، أي N=n+m حيث درجة P تساوي n ودرجة q تساوي m .

(لاحظ أن كل كثير حدود يمكن اعتباره تابعاً كسرياً إذا اعتبرنا أن: $q(x) \equiv 1$)

لنفرض إذن أن:

$$r(x) = \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P_0 + P_1x + \dots\dots + P_nx^n}{q_0 + q_1x + \dots\dots + q_mx^m} \qquad (7\text{-}41)$$

ولنفرض أننا نريد استخدام هذا التابع لتقريب التابع f(x) على مجـال مغلـق I يحتوي على الـ "٠". حتى يكون r معرفاً عنـد الـ "٠" يفـترض أن يكـون $q_0 \neq 0$ في الحقيقـــة يمكـــن أن نفـــرض أن $q_0 = 1$، و يوجـــد N+1 وســـيط : $q_1, q_2, \dots, q_m, P_0, P_1, \dots, P_n$ لتقريب f(x) بالتابع r(x).

إن تقنيـة تقريـب بـادي تختـار N+1 وسـيط بحيـث يتحقـق الـشرط : $f^{(k)}(0) = r^{(k)}(0)$ من أجل:k=0,1,2,...,N إن تقريب بادي هـو تمديـد لكـثير حـدود تايلور التقريبي لتابع كسري. في الحقيقة، عندما يكون n=N و m=0 ، فإن تقريـب بـادي هو كثير حدود تايلور N^{th} (من الدرجة N) المنشور حول الـ "٠"، أي كثير حدود مـاك لوران. لنعتبر الفرق التالي:

$$f(x)-r(x) = f(x) - \frac{P(x)}{q(x)} = \frac{f(x).q(x)-P(x)}{q(x)} = \frac{f(x)\sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} P_i x^i}{q(x)} \qquad (7\text{-}42)$$

لنفرض أن التابع f يمكن أن ينشر على شكل سلسلة ماك لوران بالشكل التالي:

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ عندئذ الفرق السابق يكتب بالشكل التالي:

$$f(x)-r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} P_i x^i}{q(x)} \qquad (7\text{-}43)$$

إن الهدف من هذا العمـل هـو اختيـار الثوابـت : $q_1, q_2, \ldots, q_m, P_0, P_1, \ldots, P_n$ بحيـث يكـون: $f^{(k)}(0) - r^{(k)}(0) = 0 \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,N$ يمكـن البرهـان أن هـذا يكافئ لأن يكون لـ (f-r) جذور عند الـ "٠" من المرتبة (N+1) وبالتالي نختار الوسطاء (المجاهيل) $q_1, q_2, \ldots, q_m, P_0, P_1, \ldots, P_n$ بحيـث يكـون البسط في الطرف الأيمـن مـن المعادلة (3-43) ، التالي:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots)(1 + q_1 x + \ldots + q_m x^m) - (P_0 + P_1 x + \ldots + P_n x^n) \qquad (7\text{-}44)$$

لا يملك حدود من درجة أقل أو تساوي N . لتبسيط الرموز، نعرف :

$$P_{n+1} = P_{n+2} = \ldots = P_N = 0$$
$$q_{m+1} = q_{m+2} = \ldots = q_N = 0$$

عندئـذ يمكـن التعـبير عـن العوامـل x^k في (3-44) بالـشكل التـالي: $(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}) - P_k$ وهكذا فإن التابع الكسري لتقريب بادي ينتج مـن حـل الــ N+1 معادلة خطية التالية: $(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}) - P_k \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,N.$ ذات N مجهول: $q_1, q_2, \ldots, q_m, P_0, P_1, \ldots, P_n$.

مثال (8): إن سلسلة منشور ماك لوران للتابع $f(x)=e^{-x}$ هي: $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i$

ولإيجاد تقريب بادي للتابع $f(x)=e^{-x}$ من الدرجة 5 حيث: n=3 و m=2 يتطلب اختيار: $P_0, P_1, P_2, P_2, q_1, q_2$ حيث أن عوامل x^k من أجل: k=0,1,2,3,4,5 تكون معدومة "٠" في العلاقة:

$$(1-x+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{6}+.....)(1+q_1x+q_2x^2)-(P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3)$$

بالنشر وتجميع حدود الجداء نحصل على ٦ معادلات خطية بـ ٦ مجاهيل:

$$x^5:\ -\tfrac{1}{120}+\tfrac{1}{24}q_1-\tfrac{1}{6}q_2=0 \quad , \quad x^2:\ \tfrac{1}{2}+q_1+q_2=P_2$$
$$x^4:\ \tfrac{1}{24}-\tfrac{1}{6}q_1+\tfrac{1}{2}q_2=0 \quad , \quad x^1:\ -1+q_1=P_1$$
$$x^3:\ -\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}q_1-q_2=P_3 \quad , \quad x^0:\ 1=P_0$$

إن حل هذه الجملة من المعادلات الخطية يعطي:

$$P_0=1,\quad P_1=-\tfrac{3}{5},\quad P_2=\tfrac{3}{20},\quad P_3=-\tfrac{1}{60},\quad q_1=\tfrac{2}{5},\quad q_2=\tfrac{1}{20},$$

وبالتالي فإن تقريب بادي للتابع المطلوب له الشكل:

$$r(x)=\frac{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+-\frac{1}{60}x^3}{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}$$

يمكن أخذ بعض القيم العددية لـ x وحساب قيمة كل من r(x) و $P_5(x)$ كثير حدود ماك لوران الخامس و $f(x)=e^{-x}$ في هذه النقاط وحساب الفرق بينهما كما هو في الجدول الآتي:

x	$f(x)=e^{-x}$	$P_5(x)$	$\lvert e^{-x}-P_5(x)\rvert$	r(x)	$\lvert e^{-x}-r(x)\rvert$
0.2	0.81873075	0670.81873	8.6×10^{-8}	0.81873075	7.75×10^{-9}
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38×10^{-6}	0.67031963	4.11×10^{-7}
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96×10^{-5}	0.54880763	4.00×10^{-6}
0.8	0.44932896	002670.449	3.26×10^{-4}	0.44930966	1.93×10^{-5}
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21×10^{-3}.	0.36781609	6.33×10^{-5}

تمارين

1- طبق طريقة المربعات الصغرى لتعيين التابع: $y(x) = ae^{bx}$ بحيث يكون هذا التابع موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول الآتي:

x_i	1	2	3	4
y_i	7	11	17	27

2- طبق طريقة المربعات الصغرى لتعيين كثيرة الحدود (التابع القطعي): $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ بحيث يكون هذا التابع موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول الآتي:

x_i	8	10	12	16	20	30	40	60	100
y_i	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	7.66	11.96	21.56	43.16

3- طبق طريقة المربعات الصغرى لتعيين التابع: $y(x) = ae^{bx}$ (أو $\ln y = \ln b + ax$) بحيث يكون هذا التابع موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول التالي:

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

4- أوجد كثير حدود المربعات الصغرى لتعيين التابع: من الدرجة الثانية والرابعة بحيث يكون موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول الآتي:

x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

5- اعد المثال السابق من اجل للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول الآتي:

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.4887	2.5015

6 - لائم المعطيات (x_j, y_j) المعطاة في الجدول التجريبي التالي على شكل تكعيبي باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	108.0	55.9	0.1	-54.1	-100.0	-131.9	-143.9	-129.9	-84.1	0	127.9

7- أوجد علاقة المربعات الصغرى القطعية (ذات الشكل: $y(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$) من أجل خمسة نقاط: $j=k-2,k-1,k,k+1,k+2 \quad , \quad (x_j,y_j)$.

8- إذا كانت $y(x_k)$ تمثل القيم الحقيقية لتابع ما و y_k تمثل القيم التقريبية، أوجد صيغة التقريب : $y(x_k)\cong y_k-\frac{3}{35}\delta^4 y_k$. (توجيه للحل: من المثال السابق خذ النقطة x_k الواقعة في المنتصف والتي تقابل t=0).

9- من أجل المثال السابق برهن أن القيم التي تحسب $y(x_n),y(x_{n-1}),y(x_1),y(x_0)$ تعطى بالعلاقات التالية:

$$y(x_0)=y_0+\tfrac{1}{5}\Delta^3 y_0+\tfrac{3}{35}\Delta^4 y_0$$
$$y(x_1)=y_1-\tfrac{2}{5}\Delta^3 y_0-\tfrac{1}{7}\Delta^4 y_0$$
$$y(x_n)=y_n-\tfrac{1}{5}\nabla^3 y_n+\tfrac{3}{35}\nabla^4 y_n$$
$$y(x_{n-1})=y_{n-1}+\tfrac{2}{5}\nabla^3 y_n-\tfrac{1}{7}\nabla^4 y_n$$

10- ليكن لدينا الجدول التجريبي الآتي:

$\overline{Y}_i$	1.00	1.41	1.73	2.00	2.24	2.45	2.65	2.83	3.00	3.16
y_i	1.04	1.37	1.70	2.00	2.26	2.42	2.70	2.78	3.00	3.14

حيث إن $\overline{Y}_i$ القيمة الحقيقية للتابع في النقطة ((x_i,y_i)) و y_i القيمة التجريبية و $P(x_i)$ قيمة تقريبية لـ y_i احسب: $P(x_i)$ في جميع النقاط و احسب RMS errorof y_i و احسب $\varepsilon=$ RMS error of $P(x_i)$.

11- طبق طريقة المربعات الصغرى لتعيين التابع(المستقيم) : $y(x)=a+bx$ حيث يكون هذا التابع موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول التالي:

x_i	-1	-0.1	0.2	1
y_i	1	1.099	0.808	1

12- طبق طريقة المربعات الصغرى لتعيين كثيرة الحدود (التابع القطعي) : $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ بحيث يكون هذا التابع موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1100	1084	1036	956	844

13- أوجد كثيرة حدود تقريب المربعات الصغرى الخطية للتابع: $y(x) = x^2$ في المجال (0,1).

14- أوجد كثيرة حدود تقريب المربعات الصغرى الخطية للتابع: $y(x) = x^3$ في المجال (-1,+1) مستخدماً توابع لوجاندر.

15- أوجد كثيرة حدود تقريب المربعات الصغرى الخطية للتابع: $y(x) = x^3$ في المجال (0,1) مستخدماً توابع لوجاندر.

16- أوجد تقريب بادي للتابع $f(x) = e^{-x}$ من الدرجة ٥. (مع: n=3 و m=2) وحيث $f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

الحل:

$$(P_0 = 1,\quad P_1 = \tfrac{27}{20},\quad P_2 = \tfrac{17}{20},\quad P_3 = \tfrac{17}{120},\quad q_1 = \tfrac{7}{20},\quad q_2 = -\tfrac{1}{5})$$

17- أوجد كثير حدود المربعات الصغرى لتعيين التابع: من الدرجة الأولى والثانية والثالثة بحيث يكون موائماً بشكل أفضل ما يمكن للنقاط التجريبية المعطاة في الجدول الآتي:

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

الفصل الثامن
الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

مقدمة:

إن كثيراً من المسائل الهندسية والفيزيائية لا يمكن التعبير عن حلها بشكل تحليلي، وبالتالي لا بد من حلها بشكل تقريبي من خلال طرائق التحليل العددي. من أهم هذه المسائل، المعادلات التفاضلية الجزئية وخاصة ذات المرتبة الثانية والتي تعبر عن ظواهر فيزيائية هامة جداً مثل معادلة الانتشار الحراري والاهتزازات وانتشار الأمواج وغير ذلك من أنواع هذه المعادلات التفاضلية الجزئية والتي ستكون موضع الفصول المقبلة. هناك العديد من الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات التفاضلية الجزئية مثل طريقة الفروق المنتهية التقليدية وطريقة العناصر المنتهية وطريقة رولاي-ريتز وطريقة كالركين التي تعتبر نقطة البداية لطريقة العناصر المنتهية والتي تعتمد على الشكل المتحولي واستبدال الفضاء غير المنتهي البعد بفضاء جزئي منتهي الأبعاد وغيرها من الطرق. سنستعرض أيضاً في دراستنا لبعض مفاهيم التحليل التابعي مثل مفهوم التوزيعات (Distributions) وفضاءات سوبولوف (Sobolev Spaces) حيث أن فضاء الحل سيكون من هذه الفضاءات من أجل مسائل القيم الحدية، كما سنتعرض للدراسة مسائل القيم الحدية بشكلها الضعيف (المتحولي) - Variational Formulation - والقوي كما سنتعرض لنظرية وجود ووحدانية الحل الشهيرة جداً (نظرية لاكس-ميليغرام) - Lax Milgram theorem -.

إن الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الشروط الحدية تعتمد على تحويل هذه المعادلات التفاضلية إلى جمل معادلات خطية تحل باستخدام الحاسوب نظراً لحاجة الحل لعدد كبير من العمليات الرياضية وحل هذه المعادلات الخطية يتم

بطرق عديدة مباشرة وغير مباشرة مثل طريقة غوص وطريقة جاكوبي وغـوص–سـايدل وطريقة التدرج المرافق وغيرها من طرق حل جمل المعادلات الجبرية الخطية.

تعريف (1)–المعادلة التفاضلية الجزئية:

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة ذات تابع لمتحولين مستقلين أو أكثر وتحوي على المشتقات الجزئية لهذا التابع ونسمي مرتبة أكبرمشتق جزئي تحويه المعادلة التفاضلية الجزئية بمرتبة المعادلة التفاضلية الجزئية.

مثال (1): المعادلة التالية:

$$x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y)$$

هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

ومن الأمثلة الشهيرة عن معادلات تفاضلية جزئية في الفيزياء، يمكن إعطاء بعض المعادلات الشهيرة التالية:

معادلة الأمواج ذات بعد واحد:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادلة الحرارة ذات بعد واحد:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادلة لابلاس ذات البعدين:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادلة بواسون ذات البعدين:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

معادلة الأمواج ذات البعدين:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

معادلة لابلاس ذات الثلاثة أبعاد:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادلة الأمواج ذات الثلاثة أبعاد:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

وهناك عدد كبير من المعادلات التفاضلية الجزئية الشهيرة والتي ليست محل دراسة المرحلة الجامعية وتترك للباحثين والمهتمين بهذا التخـصص على سـبيل المثـال معادلـة الانحفاظ الزائدية (الزائدية هو نوع من أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية الثلاثـة الـتي سنتطرق لها بعد قليل)، ذات الشكل:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0, \quad x\in R, t>0$$

ومن المعادلات الشهيرة أيضاً معادلة النقل $\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \alpha>0$. ومعادلة بوسينيسك (معادلة من المرتبة الرابعة موجية غير خطية) ومعادلة بيرجر ومعادلة الانحفاظ لأولر ومعادلة شرودينغر ومعادلة هيلمولتز وغير ذلك من المعادلات التفاضلية الجزئية المستخدمة في العلوم التطبيقية.

(8-1)- المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية:

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية التي تصف سلوك التابع u بالنسبة للمتحولات x, y:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g \qquad (8\text{-}1)$$

إذا كانت : a, b, c, d, e, f, g ثوابت فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تكون خطية بعوامل ثابتة. وإذا كانت هذه المقادير تتعلق بـ x, y فتكون المعادلة خطية. إن حل المعادلة التفاضلية الجزئية يتعلق بإشارة المقدار: b^2-ac حسب الجذور إن كانت جذوراً حقيقية أو عقدية أو مضاعفة، تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية:

1- مكافئية إذا كان: $b^2-ac=0$

2- ناقصية إذا كان: $b^2-ac<0$

3- زائدية إذا كان: $b^2-ac>0$

يمكننا معالجة الحلول التحليلية لهذه المعادلات من خلال المميز b^2-ac للمعادلة الجبرية المكونة من عوامل المشتقات من المرتبة الثانية:

$$a\lambda^2-2b\lambda+c=0$$

فإذا كانت المعادلة زائدية فإن هذه المعادلة الجبرية لها حلان حقيقيان هما:

$$\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

وباستخدام هذين الجذرين يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل التالي:

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)u+d\frac{\partial u}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial y}+fu=g$$

حيث: $h=e-a\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\right)$.

ولكننا سنترك الحلول التحليلية لمقرر آخر وسندرس حلول المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية عددياً فقط في هذا المقرر.

المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئية

(8-2)- تقريب المشتقات بدلالة الفروق المحدودة:

ليكن التابع $u=u(x)$ ومشتقاته وحيدة التعيين ومحدودة ومستمرة بالنسبة للمتحول x ويمكننا أن ننشر هذا التابع حسب تايلور:

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\tfrac{1}{2}h^2u''(x)+\tfrac{1}{6}h^3u'''(x)+\cdots \qquad (8\text{-}2)$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\tfrac{1}{2}h^2u''(x)-\tfrac{1}{6}h^3u'''(x)+\cdots \qquad (8\text{-}3)$$

وبجمع هاتين العلاقتين نجد أن:

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2u''(x)+O(h^4) \qquad (8\text{-}4)$$

حيث أن $O(h^4)$ تعني أن هناك حدوداً من الدرجة الرابعة وما فوق لـ h وبإهمال هذه الحدود الصغيرة وحل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق الثاني نجد أن:

$$u''(x)\approx\frac{\{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)\}}{h^2} \qquad (8\text{-}5)$$

بخطأ من الدرجة الثانية بالنسبة لـ h . الآن بطرح العلاقتين السابقتين بدل الجمع وإهمال الحدود من الدرجة الثالثة بالنسبة لـ h نجد أن:

$$u'(x)\approx\frac{\{u(x+h)-u(x-h)\}}{2h} \qquad (8\text{-}6)$$

بخطأ من الدرجة الأولى بالنسبة لـ h. كما يبدو العلاقة (8-6) يمكن اعتبارها كتقريب لميل المماس في نقطة ما P من منحن بميل الوتر الذي نحصل عليه من نقطتين على المنحني تقع بينهما P و يمكننا بالنظرة نفسها أن نحصل على تقريبين مماثلين لميل المماس أحدهما أمامي حيث يقرب ميل المماس بميل الوتر للنقطة P مع نقطة قبلها (على يسارها) –فنحصل على علاقة الفروق المحدودة الخلفية:

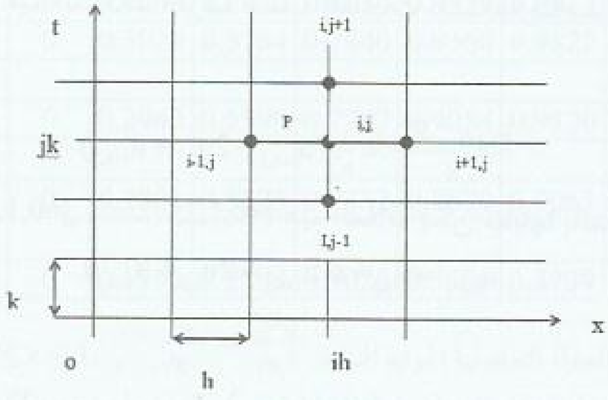
$$u'(x) \approx \frac{\{u(x)-u(x-h)\}}{h} \tag{8-7}$$

والآخر مع نقطة بعدها (على يمينها) - فنحصل على علاقة الفروق المحدودة الأمامية:

$$u'(x) \approx \frac{\{u(x+h)-u(x)\}}{h} \tag{8-8}$$

ملاحظة (1): كان من الممكن الحصول على العلاقتين الأخيرتين مباشرة من (8-2) و (8-3) بإهمال الحدود من الدرجة الثانية وما فوق بالنسبة لـ h وهنا يكون الخطأ أكبر في العلاقتين السابقتين طبعاً.

الآن إذا كان التابع u يتبع لمتحولين x و t فعندها يتم تقسيم المستوي x, t بمستقيمات متعامدة موازية لمحاور الإحداثيات بحيث تكون خطوات التقسيم على كل محور متساوية: $\delta x=h$ و $\delta t=k$ والشكل -1- التالي يبين ذلك:



الشكل-1-

حيث: $x=ih$ و $t=jk$ و i وj عددان صحيحان. وللاختصار سنرمز للتابع u عند النقطة P بـ $u(ih,jk)$ أو بالشكل $u_{i,j}=u_P$ وبالتالي يمكننا ترميز عبارات المشتقات الجزئية السابقة من المرتبة الأولى والثانية في النقطة P حسب هذا الترميز كما يلي:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right) \tag{8-9}$$

بخطأ من المرتبة الثانية بالنسبة لـ h وبنفس الشكل أيضاً لدينا:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \qquad (8\text{-}10)$$

بخطأ من المرتبة الثانية بالنسبة لـ k . وكذلك بالنسبة للمشتق الجزئي من المرتبة الأولى لدينا حسب هذا الترميز:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \qquad (8\text{-}11)$$

بخطأ من المرتبة الأولى بالنسبة لـ k.

بعد هذه المقدمة سنبدأ بدراسة بعض طرق الحل مبتدئين بطريقة الفروق المنتهية.

(8-3)-طريقة الفروق المنتهية (الطريقة الصريحة أو الظاهرية)Explicit-method

لنأخذ معادلة انتشار الحرارة في قضيب معدني:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وباستبدال قيم المشتقات الجزئية حسب العبارات السابقة فتأخذ هذه المعادلة الشكل التالي:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \qquad (8\text{-}12)$$

من أجل : j=0,1,2,.... : i=0,1,2,.... هذه العلاقة يمكن كتابتها بالشكل:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + s(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \qquad (8\text{-}13)$$

حيث: $S = \frac{k}{h^2}$.

إن العلاقة الأخيرة تعطينا الحل (درجة الحرارة) في النقطة (i.j+1) بدلالة درجات الحرارة في ثلاث نقاط في سطر سابق بشكل صريح ولذلك فقد سميت هذه الطريقة بالطريقة الصريحة.

مثال (2): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حيث : $0 \leq x \leq 1$ ومن أجل الشروط الحدية : u=0 من أجل: x=0 و x=1 و t>0 . ومن أجل شروط البدء :$u = \sin \Pi x$ من أجل : $0 \leq x \leq 1$ و t=0 ويأخذ h=0.1 و k=0.001.

الحل: يتضح من نص المسألة أن u متناظر بالنسبة للنقطة x=0.5 (في المنتصف) و سنكتفي بإيجاد الحل في نصف المجال $0\le x\le 0.5$ وبالتناظر يمكن ايجاد الحل في النصف الآخر للقضيب. لدينا هنا s=0.1 ومن عبارة الفروق في الطريقة الصريحة نجد أن هذه العبارة تأخذ الشكل:

$$u_{i,j+1} = 0.1(u_{i+1,j} + 8u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

وبالتالي بعد حساب الشروط الحدية وشروط البدء ووضعها في السطر الأول والعمود الأول ومتابعة الحسابات حسب علاقة الفروق يمكننا ترتيب النتائج في الجدول -1- التالي:

الجدول -1-

	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
t=0.000	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9563	1.000	0.9563
0.001	0	0.3060	0.5820	0.8016	0.9459	0.9913	0.9459
0.002	0	0.3029	0.5764	0.7940	0.9360	0.9822	0.9360
⋮							
0.005	0	0.2942	0.5596	0.7702	0.9054	0.9520	0.9054
⋮							
0.010	0	0.2801	0.5326	0.7332	0.8620	0.9063	0.8620
⋮							
0.100	0	0.1156	0.2198	0.3025	0.3556	0.3739	0.3556

مثال (3): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le 1$

من أجل الشروط الحدية : u=0 من أجل: x=0 و x=1 و $t\ge 0$

u = 2x من أجل $0 \le x \le 0.5$ و t=0 ، u=2(1-x) من أجل $0.5\le x \le 1$ و $t = 0$.

الحل: إن المعادلة الفرقية للمعادلة التفاضلية $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ هي:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

حيث:

$i=0,1,2,...$: $x=ih$, و .... $j=0,1,2,$: $t=jk$. لنأخذ : $h=0.1$ و $k=0.001$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة الفرقية بالشكل:

$$u_{i,j+1} = 0.1(u_{i+1,j} + 8u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

وباستخدام التناظر حول النقطة $x=0.5$ وحساب شروط البدء والشروط الحدية ووضعها في السطر الأول والعمود الأول وحساب الحل في بقية نقاط الأسطر نجد الجدول -2- التالي للحل:

الجدول -2-

	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000	0.8000
0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
0.004	0	0.2000	0.4000	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818
0.005	0	0.2000	0.3999	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732
⋮							
t=0.01	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
⋮							
t=0.02	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891	0.6486

إن الحل التحليلي لهذه المعادلة التفاضلية تحت الشروط المعطاة هو:

$$u = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sin 0.5n\pi)(\sin n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

بمقارنة هذا بحل الفروق السابق عند النقطة $x=0.3$ ووضع الفرق بين الحلين ونسبة الخطأ في الجدول -3- التالي، نجد:

الجدول -3-

	حل الفروق المنتهية عند x=0.3	الحل التحليلي عند x=0.3	الفرق	النسبة المئوية للخطأ
t=0.005	0.5971	0.5966	0.0005	0.08
t=0.01	0.5822	0.5799	0.0023	0.4
t=0.02	0.5373	0.5334	0.0039	0.7
t=0.10	0.2472	0.2444	0.0028	1.1

يمكن مقارنة الحل أيضاً عند النقطة $x=0.5$ ووضع الفرق بين الحلين ونسبة الخطأ في الجدول التالي،يلاحظ أن الحل عند هذه النقطة ليس جيداً بسبب الانقطاع للمشتق الأول $\frac{\partial u}{\partial x}$ عند هذه النقطة، الجدول -4- :

الجدول -4-

	حل الفروق المنتهية عند $x=0.5$	الحل التحليلي عند $x=0.5$	الفرق	النسبة المئوية للخطأ
t=0.005	0.8597	0.8404	0.0193	2.3
t=0.01	0.7867	0.7743	0.0124	1.6
t=0.02	0.6891	0.6809	0.0082	1.2
t=0.10	0.3056	0.3021	0.0035	1.2

بأخذ $h=0.1$ و $k=0.005$ وبالتالي $s = 0.5$ ، يمكن كتابة المعادلة الفرقية بالشكل:

$$u_{i,j+1} = 0.5(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

وبعد حساب الشروط الحدية وشروط البدء ووضعها في السطر الأول والعمود الأول ومتابعة الحسابات حسب علاقة الفروق يمكننا ترتيب النتائج في الجدول -5- الآتي:

الجدول -5-

	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.000	0.8000
0.005	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.8000	0.8000
0.010	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7000	0.8000	0.7000
0.015	0	0.2000	0.4000	0.5500	0.7000	0.7000	0.7000
0.020	0	0.2000	0.3750	0.5500	0.6250	0.7000	0.6250
⋮							
t=0.100	0	0.0949	0.1717	0.2484	0.2778	0.3071	0.2778

بمقارنة هذا الحل مع حل الفروق السابق عند النقطة $x=0.3$ ووضع الفرق بين الحلين ونسبة الخطأ في الجدول -6- الآتي، نجد:

الجدول -6-

	حل الفروق المنتهية عند x=0.3	الحل التحليلي عند x=0.3	الفرق	النسبة المئوية للخطأ
t=0.005	0.6000	0.5966	0.0034	0.57
t=0.01	0.6000	0.5799	0.0201	3.5
t=0.02	0.5500	0.5334	0.0166	3.1
t=0.10	0.2484	0.2444	0.0040	1.6

أخيراً لنأخذ بأخذ h=0.1 و k=0.01 وبالتالي $s=1$ يمكن كتابة المعادلة الفرقية بالشكل:

$$u_{i,j+1} = (u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

وبالتالي بعد حساب الشروط الحدية وشروط البدء ووضعها في السطر الأول والعمود الأول ومتابعة الحسابات حسب علاقة الفروق يمكننا ترتيب النتائج في الجدول -7- الآتي:

الجدول -7-

	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
t=0.00	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8
0.01	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.6	0.8
0.02	0	0.2	0.4	0.6	0.4	1.0	0.4
0.03	0	0.2	0.4	0.2	1.2	-0.2	1.2
0.04	0	0.2	0.0	1.4	-1.2	2.6	-1.2

(4-8)- الشروط الحدية التفاضلية :

لقد أعطيت فيما سبق الشروط الحدية على التابع u ومن الممكن أن تكون الشروط الحدية على مشتق هذا التابع و المثال التالي يوضح هذه الحالة.

مثال (4): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le 1$

من أجل الشروط الحدية : u=1 من أجل : $0 \le x \le 1$ و t=0

$\frac{\partial u}{\partial x} = u$ في النقطة x=0 ومن أجل جميع قيم t .

$\frac{\partial u}{\partial x} = -u$ في النقطة x=1 ومن أجل جميع قيم t.

الحل: إن المعادلة التفاضلية تستبدل بالمعادلة الفرقية (كما سبق) التالية:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

أو الشكل المكافئ:

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+s(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}) \qquad (1)$$

حيث: $s=\frac{k}{h^2}$. في النقطة x=0 لدينا من (4-14):

$$u_{0,j+1}=u_{0,j}+s(u_{-1,j}-2u_{0,j}+u_{1,j}) \qquad (2)$$

أما الشرط الحدي في هذه النقطة فيأخذ الشكل: $\frac{u_{1,j}-u_{-1,j}}{2h}=u_{0,j}$

(بدلالة الفرق المركزي). من المعادلتين الأخيرتين نجد:

$$u_{0,j+1}=u_{0,j}+2s[u_{1,j}-(1+h)u_{0,j}]$$

وبأخذ h=0.1 مثلاً وفي النقطة x=1

$$u_{10,j+1}=u_{10,j}+s(u_{9,j}-2u_{10,j}+u_{11,j})$$

أما الشرط الحدي في هذه النقطة فيأخذ الشكل: $\frac{u_{11,j}-u_{9,j}}{2h}=-u_{10,j}$

(بدلالة الفرق المركزي). ومنه نجد:

$$u_{10,j+1}=u_{10,j}+2s[u_{9,j}-(1+h)u_{10,j}]$$

وبأخذ k=0.0025 فإن قيمة s تساوي: s=0.25 وبالتالي فإن (1) و(2)

تأخذان الشكل: $u_{0,j+1}=\frac{1}{2}(0.9u_{0,j}+u_{1,j})$ والشكل: $u_{i,j+1}=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+2u_{i,j}+u_{i+1,j})$

من التناظر أيضاً لدينا العلاقة:

$$u_{5,j+1}=0.25(2u_{4,j}+2u_{5,j}); \quad \text{for}: i=5$$

من أجل أول خطوة وحيث أن u=1 من أجل شروط البدء ومن أجل

$t=sh^2=1/400$ لدينا جملة المعادلات الخطية التالية:

$$u_{0,1}=\tfrac{1}{2}(0.9+1)=0.95$$
$$u_{1,1}=\tfrac{1}{4}(1+2+1)=1$$
$$u_{2,1}=u_{3,1}=u_{4,1}=u_{5,1}=u_{1,1}=1$$

ومن أجل الخطوة الثانية نجد مجموعة المعادلات الخطية:

$$u_{0,2} = \tfrac{1}{2}(0.9\times 0.95+1) = 0.9275$$

$$u_{1,2} = \tfrac{1}{4}(0.95+2+1) = 0.9875$$

$$u_{2,2} = \tfrac{1}{4}(1+2+1) = 1$$

كذلك لدينا: $u_{3,2} = u_{4,2} = u_{5,2} = u_{2,2} = 1$

بمتابعة الحل وترتيبها في الجدول -8- نحصل على النتائج الآتية:

الجدول -8-

i	0	1	2	3	4	5
$u_{i,0}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
t=0.0025	0.9500	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9275	0.9875	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.0075	0.9111	0.9756	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
0.0100	0.8978	0.9648	0.9923	0.9992	1.0000	1.0000
0.0125	0.8864	0.9549	0.9872	0.9977	0.9998	1.0000
0.0150	0.8764	0.9459	0.9818	0.9956	0.9993	0.9999
0.0175	0.8673	0.9375	0.9762	0.9931	0.9985	0.9996
0.0200	0.8590	0.9296	0.9708	0.9902	0.9974	0.9991
⋮						
0.1000	0.7175	0.7829	0.8345	0.8718	0.8942	0.9017
0.2500	0.5542	0.6048	0.6452	0.6745	0.6923	0.6983
0.5000	0.3612	0.3942	0.4205	0.4396	0.4512	0.4551
1.0000	0.1534	0.1674	0.1786	0.1867	0.1917	0.1933

إن الحل التحليلي لهذه المعادلة التفاضلية تحت الشروط المعطاة هو:

$$u = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{\sec\alpha_n}{(3+4\alpha_n^2)} e^{-\alpha_n^2 t} \cos 2\alpha_n (x-0.5)\right], \quad (0 < x < 1)$$

حيث α_n هي الجذر الموجب للمعادلة: $\alpha.\tan\alpha = 0.5$، إن قيم u التحليلية المحسوبة بهذه العلاقة موضحة في الجدول -9- الآتي:

الجدول -9-

x=	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.0025	0.9460	0.9951	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
0.0050	0.9250	0.9841	0.9984	0.9999	1.0000	1.0000
0.0075	0.9093	0.9730	0.9950	0.9994	1.0000	1.0000
0.0100	0.8965	0.9627	0.9905	0.9984	0.9998	1.0000
0.0125	0.8854	0.9532	0.9855	0.9967	0.9994	0.9999
0.0150	0.8755	0.9444	0.9802	0.9945	0.9988	0.9996
0.0175	0.8666	0.9375	0.9762	0.9931	0.9985	0.9996
0.0200	0.8585	0.9286	0.9695	0.9891	0.9967	0.9985
⋮						
0.1000	0.7176	0.7828	0.8342	0.8713	0.8936	0.9010
0.2500	0.5546	0.6052	0.6454	0.6747	0.6924	0.6984
0.5000	0.3619	0.3949	0.4212	0.4403	0.4519	0.4558
1.0000	0.1542	0.1682	0.1794	0.1875	0.1925	0.1941

بمقارنة هذا الحل مع حل الفروق السابق عند النقطة x=0.2 ووضع الفرق بين الحلين ونسبة الخطأ في الجدول -10- الآتي، نجد:

الجدول -10-

	حل الفروق المنتهية عند x=0.2	الحل التحليلي عند x=0.2	الفرق	النسبة المئوية للخطأ
t=0.005	1.0000	0.9984	0.0016	0.16
t=0.050	0.9126	0.9120	0.0006	0.7
t=0.100	0.8345	0.8342	0.0003	0.04
t=0.250	0.6452	0.6454	-0.0002	-0.03
t=0.500	0.4205	0.4212	-0.0070	-0.16
t=1.000	0.1786	0.1794	-0.0008	-0.45

(5-8)-طريقة الفروق المنتهية (الطريقة الضمنية-كرانك نيكلسون)

-Implicit method-

تعتمد هذه الطريقة على استبدال المشتق الثاني بالقيمة المتوسطة للفروق المحدودة لهذا المشتق في السطرين j و j+1 و المعادلة التفاضلية الجزئية التالية مثلاً : $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ تكتب بالشكل الفرقي التالي:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{1}{2h^2}[(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})+(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})] \quad (8\text{-}14)$$

أو الشكل التالي:

$$su_{i-1,j+1}-(2+2s)u_{i,j+1}+su_{i+1,j+1}=-su_{i-1,j}-(2-2s)u_{i,j}-su_{i+1,j} \quad (8\text{-}15)$$

كما يتضح من هذه المعادلة أنها تحوي ثلاث قيم مجهولة في الطرف الأيسر منها (السطر الجديد) وثلاثة قيم معلومة في الطرف الأيمن (السطر السابق) وبما أنه لا يمكن حل هذه المعادلة بشكل صريح بمعنى أنه نحتاج تطبيق هذه المعادلة في عدد من النقاط والحصول على عدد من المعادلات الخطية بعدد القيم المجهولة بحلها نحصل على هذه القيم المجهولة ولذلك فقد سميت بالطريقة الضمنية.

مثال (5): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $0\le x\le 1$

من أجل الشروط الحدية: $u=0$ من أجل: $x=0$ و $x=1$ و $t\ge 0$

$u=2x$ من أجل $0\le x\le 0.5$ و $t=0$ ، $u=2(1-x)$ من أجل $0.5\le x\le 1$ و $t=0$.

الحل: لنأخذ $h=0.1$ و $k=0.01$ ، إن هذا التقسيم يعطي دقة جيلة للحل وهي تناسب $s=1$ وتكون المعادلة الفرقية عندئذ معطة بالشكل:

$$u_{i-1,j+1}-4u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}=-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}$$

للاختصار نرمز لـ $u_{i,j+1}$ بالرمز u_i وبما أن: $u_6=u_4$ و $u_7=u_3$ .....بسبب التناظر وبتطبيق المعادلة الفرقية على نقاط السطر الأول نجد مجموعة المعادلات الجبرية الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}
4u_1-u_2&=0.4\\
-u_1+4u_2-u_3&=0.8\\
-u_2+4u_3-u_4&=1.2\\
-u_3+4u_4-u_5&=1.6\\
-2u_4+4u_5&=1.6
\end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على الحل التالي:

$$u_1=0.1989,\quad u_2=0.3956,\quad u_3=0.5834,\quad u_4=0.7381,\quad u_5=0.7691$$

مرة ثانية بتطبيق المعادلة الفرقية على نقاط السطر الثاني نجد مجموعة المعـادلات الجبرية الخطية التالية:

$$\begin{aligned} &4u_1 - u_2 = 0.3956 \\ &-u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.1989 + 0.5834 \\ &-u_2 + 4u_3 - u_4 = 0.3956 + 0.7381 \\ &-u_3 + 4u_4 - u_5 = 0.5834 + 0.7691 \\ &-2u_4 + 4u_5 = 2 \times 0.7381 \end{aligned}$$

بحل هذه المعادلات نحصل على الحل التالي:

$$u_1 = 0.1936, \quad u_2 = 0.3789, \quad u_3 = 0.5400, \quad u_4 = 0.6461, \quad u_5 = 0.6921$$

وبعد حساب الشروط الحدية وشروط البدء ووضعها في السـطر الأول والعمـود الأول ومتابعة الحسابات حسب علاقة الفروق السابقة يمكننا ترتيب النتائج في الجدول -11- التالي:

الجدول -11-

	x = 0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.00	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.01	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691
0.02	0	0.1936	0.3789	0.5400	0.6461	0.6921
⋮	⋮					
0.10	0	0.0948	0.1803	0.2482	0.2918	0.3069
0.10 (الحل التحليلي)	0	0.0934	0.1776	1.2444	0.2873	0.3021

بمقارنة هذا الحل بحل االفروق السابق عند النقطة x=0.5 ووضـع الفـرق بـين الحلين ونسبة الخطأ في الجدول -12- التالي، نجد:

الجدول -12-

	حل الفروق المنتهية عند x=0.5	الحل التحليلي عند x=0.5	الفرق	النسبة المئوية للخطأ
t=0.01	0.7691	0.7743	-0.0052	-0.7
t=0.02	0.6921	0.6809	0.0112	1.6
t=0.10	0.3069	0.3021	0.0048	1.6

(8-6)- طريقة جاكوبي- Jacobi method

لتكن المعادلة الفرقية لمعادلة كرانك نيكلسون للمعادلة التفاضلية السابقة (معادلة الحرارة): $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2h^2}[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})] \quad (8\text{-}16)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ $u_{i,j+1}$ نجد:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \tfrac{1}{2}s[(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) + (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})] \quad (8\text{-}17)$$

وبكتابة المجاهيل $u_{i-1,j+1}$، $u_{i,j+1}$، $u_{i+1,j+1}$ (في السطر j+1) بشكل مبسط (على التتالي) بالشكل: u_{i-1}، u_{i1}، u_{i+1} فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$u_i = \tfrac{1}{2}s(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + b_i \quad (8\text{-}18)$$

حيث b_i معلوم ويساوي: $b_i = u_{i,j} + \tfrac{1}{2}s(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$

من العلاقة (8-18) يمكننا الحصول على العلاقة التكرارية التالية، والتي تعرف بعلاقة جاكوبي:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{1}{2}s(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + b_i \quad (8\text{-}19)$$

يبرهن أن هذه العلاقة تتقارب فقط من أجل: $0<s\le 0.5$ يمكن تعديل العلاقة الأخيرة بشكل طفيف وتحسينها بالشكل:

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}s(u_{i-1}^n - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^n) + b_i \quad (8\text{-}20)$$

أو الشكل المكافئ:

$$u_i^{(n+1)} = \frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) + \frac{b_i}{1+s} \quad (8\text{-}21)$$

هذه العلاقة مناسبة لحلّ جميع قيم s الصغيرة وتتقارب بشكل أسرع من العلاقة السابقة (8-19) وتسمى العلاقة (8-21) علاقة جاكوبي التكرارية.

(8-7)- طريقة غوص-سايدل-Gauss-Siedel method

لنبدل في العلاقة: $u_i = \tfrac{1}{2}s(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + b_i$ مركبات الحل التي حسبت في الخطوات السابقة فتأخذ هذه العلاقة الشكل التالي:

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{2}s(u_{i-1}^{(n+1)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + b_i \qquad (8\text{-}22)$$

أو الشكل المكافئ:

$$u_i^{(n+1)} = \frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + \frac{b_i}{1+s} \qquad (8\text{-}22')$$

العلاقة التكرارية الأخيرة تسمى علاقة غوص-سايدل التكرارية.

مثال (6) : حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le 1$

للشروط الحدية وشروط البدء : $u=0$ من أجل : $x=0$ و $x=1$ و $t \ge 0$ و $u=2x$ من أجل $0 \le x \le 0.5$ و $t=0$ ، $u=2(1-x)$ من أجل $0.5 \le x \le 1$ و $t=0$. من أجل : $h=0.1$ و $k=0.01$، بطريقة جاكوبي ثم طريقة غوص- سايدل.

الحل: لدينا هنا $s=1$ وبالتالي تأخذ علاقة جاكوبي:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{n} + u_{i+1}^{n}) + \tfrac{b_i}{1+s}$$

الشكل التالي:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_{i-1}^{n} + u_{i+1}^{n}) + \tfrac{b_i}{2}$$

مع:

$$b_i = u_{i,j} + \tfrac{1}{2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) = \tfrac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$

ومنه:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_{i-1}^{n} + u_{i-1}^{n} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

ومنه نحصل على مجموعة المعادلات الخطية بعد إعطاء القيم $i=1,2,3,4,5$:

$$u_1^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^n + 0.4)$$
$$u_2^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_1^n + u_3^n + 0.8)$$
$$u_3^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^n + u_4^n + 1.2)$$
$$u_4^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_3^n + u_5^n + 1.6)$$
$$u_5^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(2u_4^n + 1.6)$$

بحل مجموعة المعادلات السابقة واستخدام شرط التناظر من أجل $i=5$ (أي $u_4^n = u_6^n$) نحصل بتكرار مناسب على جدول الحل -13- الآتي:

الجدول -13-

i	i=0	1	2	3	4	5
n	$u_{i,0}=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8
n=2	0	0.2	0.4	0.6	0. 75	0.8
n=3	0	0.2	0.4	0.5875	0.75	0.7750
n=4	0	0.2	0.3969	0.5875	0.7406	0.7750
n=5	0	0.1992	0.3969	0.5844	0.7406	0.7703
n=6	0	0.1992	0.3959	0.5844	0.7387	0.7703
n=7	0	0.1990	0.3959	0.5836	0.7387	0.7693
⋮	⋮					
n=11	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691

أما طريقة غوص- سايدل المعرفة بالعلاقة:

$$u_i^{(n+1)} = \frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + \frac{b_i}{1+s}$$

حيث: $b_i = u_{i,j} + \frac{1}{2}s(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$ حيث s=1 تقودنا إلى العلاقة التكرارية التالية: $u_i^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$

وباستخدام شرط التناظر من أجل i=5 (أي $u_4^n = u_6^n$) نحصل على مجموعة المعادلات:

$$u_1^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^n + 0.4)$$
$$u_2^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_1^{(n+1)} + u_3^n + 0.8)$$
$$u_3^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^{(n+1)} + u_4^n + 1.2)$$
$$u_4^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_3^{(n+1)} + u_5^n + 1.6)$$
$$u_5^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(2u_4^{(n+1)} + 1.6)$$

وبتكرار مناسب نحصل على جدول الحل -14- الآتي:

الجدول -14-

i	i=0	1	2	3	4	5
n	$u_{i,0}=0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.8
n=2	0	0.2	0.4	0.6	0. 75	0.775
n=3	0	0.2	0.4	0.5875	0.7406	0.7703
n=4	0	0.2	0.3969	0.5844	0.7387	0.7693
n=5	0	0.1992	0.3959	0.5836	0.7382	0.7691
n=6	0	0.1990	0.3957	0.5835	0.7381	0.7691
n=7	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691

يتضح من الجدولين السابقين أننا كررنا عملية التقريب إحدى عشرة مرة في طريقة جاكوبي بينما كرر التقريب سبع مرات في طريقة غوص- سايدل للحصول على التقريب نفسه وبالنتيجة إن طريقة غوص-سايدل أسرع مرتين تقريباً من طريقة جاكوبي.

(8-8)- طريقة الاسترخاء المتتالي:

إن معادلة الفروق لكرانك-نيكلسون وحسب غوص-سايدل للمعادلة التفاضلية $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (معادلة الحرارة)، هي المعادلة:

$$u_i^{(n+1)}=\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n})+\frac{b_i}{1+s} \qquad (8\text{-}23)$$

لنضيف ونطرح للطرف الأيمن لهذه المعادلة المقدار u_i^n فنحصل على المعادلة:

$$u_i^{(n+1)}=u_i^n+[\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n})+\frac{b_i}{1+s}-u_i^n] \qquad (8\text{-}24)$$

في طريقة الاسترخاء المتتالي تم تطوير تلك العلاقة باستخدام المعامل ω بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)}&=u_i^n+\omega[\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n})+\frac{b_i}{1+s}-u_i^n] \\ &=\omega[\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n})+\frac{b_i}{1+s}]-(\omega-1)u_i^n \end{aligned} \qquad (8\text{-}25)$$

حيث ω ثابت يسمى معامل الاسترخاء قيمته في غالب المسائل تتراوح بين 1 و 2 وأفضل قيمة له من أجل معدل تقارب أعظمي تكون: $\omega_b=\frac{2}{1+\sqrt{(1-\mu^2)}}$ حيث: $\mu=\frac{s}{1+s}\cos\frac{\pi}{N}$ و (N-1) مجموع عدد العقد الداخلية في الشبكة على طول الصف t.

يبرهن أن نسب التقارب لطريقة جاكوبي وطريقة غوص- سايدل وطريقة الاسترخاء تتعين بتناسب طردي على التتالي مع المقادير:

$$|\log(\omega_b - 1)|, \quad 2|\log \mu|, \quad |\log \mu|$$

وذلك بشكل نظري أما عملياً فيبرهن أن نسب التقارب لطريقة جاكوبي وطريقة غوص- سايدل وطريقة الاسترخاء تتعين بتناسب مع عدد مرات التكرار. فمن أجل المثال الأخير مثلاً ومن أجل طريقة الاسترخاء حيث العلاقة التكرارية من أجل: s=1 و N=10 و $\mu = 0.4756, (\omega_b - 1) = 0.064$

$$|\log \mu| = 0.323, \quad 2|\log \mu| = 0.646, \quad |\log(\omega_b - 1)| = 1.19$$

وبعد تبديل قيمة b_i:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}\omega(u_{i}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \tfrac{b_i}{1+s}] - (\omega-1)u_i^n \qquad (8\text{-}26)$$

ومن أجل خطوة زمنية أولى نجد جملة المعادلات الخطية:

$$u_1^{(n+1)} = 0.266(u_2^n + 0.4) - 0.064u_1^n$$
$$u_2^{(n+1)} = 0.266(u_1^{(n+1)} + u_3^n + 0.8) - 0.064u_2^n$$
$$u_3^{(n+1)} = 0.266(u_2^{(n+1)} + u_4^n + 1.2) - 0.064u_3^n$$
$$u_4^{(n+1)} = 0.266(u_3^{(n+1)} + u_5^n + 1.6) - 0.064u_4^n$$
$$u_5^{(n+1)} = 0.266(2u_4^{(n+1)} + 1.6) - 0.064u_5^n$$

حيث أن $u_4^{(n+1)} = u_6^{(n+1)}$ بالتناظر. بحل المعادلات الأخيرة وترتيبها في جدول الحل -15- التالي، نجد:

الجدول -15-

i	i=0	1	2	3	4	5
n	$u_{i,0} = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
n=1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.7872
n=2	0	0.2	0.4	0.6	0. 7434	0.7707
n=3	0	0.2	0.4	0.5849	0.7386	0.7692
n=4	0	0.2	0.3960	0.5836	0.7382	0.7691
n=5	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691

يتضح أننا احتجنا باستخدام طريقة الاسترخاء خمسة تقريبات فقط للحصول على التقريب نفسه (الدقة) في الطرق السابقة مما يدل على أن هذه الطريقة أسرع من تلك الطرق ومع ذلك فإنه في هذا المثال خطوة التقارب ليست جيلة كما يجب بسبب أن شرط البدء u=2x تابع خطي للمتحول x مما يجعل التغير في التابع u يزداد باتجاه القطر بدءاً من القيمة التي فيها التناظر x=0.5.

مثال (7): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le 1$

من أجل الشروط الحدية وشروط البدء : u=1 من أجل : t=0 و 0<x<1

u=0 من أجل x=0 و x=1 و t≥0. ومن أجل : s=1 حسب طريقة الاسترخاء المتتالي.

الحل: لدينا هنا s=1 وبالتالي $\mu=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{10}=0.4756,\quad \omega=1.064$

إن المعادلة الفرقية تعطى بالشكل التالي:

$$u_i^{(n+1)}=\tfrac{1}{4}(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n}+u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+\tfrac{b_i}{1+s}]-0.064u_i^n$$

نطبق هذه المعادلة من أجل الخطوة الأولى للزمن فنحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$u_1^{(n+1)}=\tfrac{\omega}{4}(u_2^n+1)-0.064u_1^n$$
$$u_2^{(n+1)}=\tfrac{\omega}{4}(u_1^{(n+1)}+u_3^n+2)-0.064u_2^n$$
$$u_3^{(n+1)}=\tfrac{\omega}{4}(u_2^{(n+1)}+u_4^n+2)-0.064u_3^n$$
$$u_4^{(n+1)}=\tfrac{\omega}{4}(u_3^{(n+1)}+u_5^n+2)-0.064u_4^n$$
$$u_5^{(n+1)}=\tfrac{\omega}{4}(2u_4^{(n+1)}+2)-0.064u_5^n$$

بحل هذه الجملة الخطية من المعادلات ومن أجل خطوات مناسبة نحصل على جدول الحل – 16– الآتي:

الجدول –16–

i	i=0	1	2	3	4	5
n	$u_{i,0}=0$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
n=0	0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
n=1	0	0.4680	0.8585	0.9624	0.9900	0.9947
n=2	0	0.4644	0.8566	0.9616	0.9890	0.9945
n=3	0	0.4641	0.8564	0.9613	0.9890	0.9945

بحل هذا المثال بطريقة غوص سايدل، حيث العلاقة التكرارية:

$$u_i^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

ومن أجل أول سطر نحصل على جملة المعادلات الخطية:

$$u_1^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^{n} + 1)$$
$$u_2^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_1^{(n+1)} + u_3^{n} + 2)$$
$$u_3^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_2^{(n+1)} + u_4^{n} + 2)$$
$$u_4^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(u_3^{(n+1)} + u_5^{n} + 2)$$
$$u_5^{(n+1)} = \tfrac{1}{4}(2u_4^{(n+1)} + 2)$$

وبحل هذه الجملة الخطية وبتكرار مناسب للحل نحصل على جدول الحل –17– الآتي:

الجدول –17–

i	i=0	1	2	3	4	5
n	$u_{i,0} = 0$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
n=0	0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
n=1	0	0.5	0.875	0.9688	0.9922	0.9961
n=2	0	0.4688	0.8594	0.9629	0.9898	0.9949
n=3	0		.			
n=4	0					
n=5	0	0.4641	0.8564	0.9613	0.9890	0.9945

ملاحظة (2)– تفسير كلمة فوق الاسترخاء "Over- relaxation":

لنأخذ المعادلة الفرقية: $u_i = \frac{1}{2}s(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + b_i$

حيث إن : $b_i = u_{i,j} + \frac{1}{2}s(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$

فيمكننا أن نكتب:

$$b_i - [u_i - \tfrac{1}{2}s(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})] = 0 \qquad (8\text{-}27)$$

إن قيم الحل الدقيق فقط هي التي تجعل هذه المعادلة محققة (الطرف الأيمن معدوم) وهو غير معدوم في الطرق العددية السابقة ويسمى هذا الفرق بالباقي، العلاقة (8-27) تستعمل لتعيين قيم المجاهيل $u_i^{(n+1)}$ بدلالة القيم المعلومة $u^{(n+1)}$ و u^n، فعلى سبيل المثال طريقة غوص–سايدل تعين $u_i^{(n+1)}$ بالمعادلة:

$$b_i - [u_i^{(n+1)} - \tfrac{1}{2} s(u_{i-1}^{(n+1)} - 2u_i^{(n+1)} + u_{i+1}^{n})] = 0 \qquad (8\text{-}28)$$

يقال، هذا الإجراء إنه يسترخي الباقي. عندما تحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ $u_i^{(n+1)}$ نحصل على المعادلة $u_i^{(n+1)} = \frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + \frac{b_i}{1+s}$ التي تكتب بالشكل:

$$\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + \frac{b_i}{1+s} - u_i^{(n+1)} = 0 \qquad (8\text{-}29)$$

وبتبديل الحد $u_i^{(n+1)}$ بالحد u_i^n نحصل على الباقي:

$$\frac{s}{2(1+s)}(u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+1}^{n}) + \frac{b_i}{1+s} - u_i^n = c \qquad (8\text{-}30)$$

حيث يكون الفرق $u_i^{(n+1)} - u_i^n$ محسوباً بتكرار واحد لغوص- سايدل: $u_i^{(n+1)} = u_i^n + c$ ، أما هذا الفرق في طريقة الاسترخاء فيحسب بالتكرار:

$$u_i^{(n+1)} = u_i^n + \omega c, \quad (\omega > 1)$$

إن قيم ω في المجال $0<\omega<1$ تعطي مايسمى بطريقة تحت الاسترخاء (Under relaxation U.R).

(8-9)- المعادلات المكافئية (من أجل بعدين):

في حالة بعدين، يمكننا أخذ المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad , \quad 0 \le x \le a \ \text{و} \ 0 \le y \le b \qquad (8\text{-}31)$$

وحيث أن التابع u معلوم في البدء في جميع نقاط المنطقة (المستطيل) $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ بشكل مشابه لحالة البعد الواحد نعرف نقاط الشبكة في منطقة الحل (المستطيل) في جملة الإحداثيات: (x,y,t) بالشكل:

$$x = ih(=i\delta x) \quad , \quad y = jk(=j\delta y) \quad , \quad t = nr(=n\delta t)$$

حيث إن: i,j,n أعداد صحيحة موجبة فإن التابع u يتعين في النقطة (i,j,n) من الشبكة بالشكل: $u(ih,jk,nr) = u_{i,j,n}$ و يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية السابقة بشكل فرقي بالشكل:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,n+1} - u_{i,j,n}}{r} &= \frac{\lambda}{h^2}(u_{i-1,j,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i+1,j,n}) + \\ &+ \frac{\lambda}{k^2}(u_{i,j-1,n} - 2u_{i,j,n} + u_{i,j+1,n}) \end{aligned} \qquad (8\text{-}32)$$

هذه المعادلة تبدو سهلة الحل ولكن ذلك غير صحيح لأنه يبرهن أنه حتى تكون هذه العلاقة صالحة للتطبيق يجب تحقق الشرط: $\lambda(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2})\delta t \le 1/2$ وهذا يوجب أن تكون قيمة δt صغيرة بقدر كاف.

وبشكل مشابه يمكننا إعطاء علاقة كرانك-نيكلسون من أجل بعدين:

$$\frac{u_{i,j,n+1}-u_{i,j,n}}{r}=\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j,n+1}\right] \quad (8\text{-}33)$$

(8-10)- مسألة التقارب واستقرار الحل

إن مسألة التقارب في التحليل العددي هي من المسائل الهامة، تعني هذه المسألة حل مجموعة المعادلات التي تنتج أثناء حل المعادلات التفاضلية الجزئية وتقارب هذا الحل ثم استقراره بمعنى استقرار الخطأ الناتج عن الحل أي ازدياد الخطأ مع ازدياد العمليات الحسابية أو تناقص الخطأ مع هذا الازدياد لعدد تلك العمليات الحسابية.

8-10-1- معالجة مسألة التقارب تحليلياً

يمكن البحث عن هذا التقارب في مسائل المعادلات التفاضلية الجزئية بأنواعها الثلاثة المكافئي والناقصي والزائدي. أي البحث عن تقارب الحل u كتقريب للمعادلة التفاضلية الجزئية من الحل الدقيق U للمعادلة التفاضلية نفسها. نرمز للخطأ بين هذين الحلين بالرمز $e=U-u$. ولنعالج هذه المسألة مثلاً من أجل المعادلة المكافئية (معادلة الحرارة) $0<x<1$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1$ حيث أن U معلومة: من أجل $0<x<1$ عندما $t=0$ وكذلك معلومة عندما $x=0, x=1,\ t\ge 0$ ، عندئذ التقريب باستخدام الطريقة الظاهرية أو الصريحة لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

وفي نقاط الشبكة $u_{i,j}=U_{i,j}-e_{i,j},\quad u_{i,j+1}=U_{i,j+1}-e_{i,j+1},\ldots$

بالتعويض في معادلة الفروق الأخيرة نجد:

$$\begin{aligned} e_{i,j+1} &= se_{i-1,j}+(1-2s)e_{i,j}+se_{i+1,j}+U_{i,j+1}-U_{i,j}+ \\ &\quad +s(2U_{i,j}-U_{i-1,j}-U_{i+1,j}) \end{aligned} \quad (8\text{-}34)$$

وحسب نظرية (منشور) تايلور لدينا:

$$U_{i,j+1} = U(x_i+h, t_j) = U_{i,j} + h(\tfrac{\partial U}{\partial x})_{i,j} + \tfrac{h^2}{2!}\tfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i + \theta_1 h, t_j)$$

$$U_{i-1,j} = U(x_i-h, t_j) = U_{i,j} - h(\tfrac{\partial U}{\partial x})_{i,j} + \tfrac{h^2}{2!}\tfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i - \theta_2 h, t_j)$$

$$U_{i,j+1} = U(x_i, t_j + k) = U_{i,j} + k(\tfrac{\partial U}{\partial x})_{i,j} + \tfrac{h^2}{2!}\tfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j + \theta_3 h)$$

حيث أن: $0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1, \quad 0 < \theta_3 < 1$

بالتعويض في المعادلة (4-34) نجد:

$$(8\text{-}35)\; e_{i,j+1} = se_{i-1,j} + (1-2s)e_{i,j} + se_{i+1,j} + k\{\tfrac{\partial U}{\partial t}(x_i, t_j + \theta_3 k) - \tfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i + \theta_4 h, t_j)\}$$

حيث أن: $-1 < \theta_4 < 1$.

مما سبق نجد أن المعادلة الأخيرة هي معادلة فرقية ومن هذه المعادلة نجد:

$$\left|e_{i,j+1}\right| \le s\left|e_{i-1,j}\right| + (1-2s)\left|e_{i,j}\right| + s\left|e_{i+1,j}\right| + kM$$

$$\le sE_j + (1-2s)E_j + sE_j + kM = E_j + kM$$

إن: E_j تمثل القيمة المطلقة لأكبر خطأ في السطر j و M يمثل القيمة المطلقة للحد الأعلى للمقدار بين القوسين { } في العلاقة (8-35) من أجل جميع قيم j مع ملاحظة أنه عندما $s \le \frac{1}{2}$ تكون جميع أمثال e في العلاقة (8-35) موجبة أو معدومة. بما أن هذه العلاقة صحيحة لجميع قيم i :

$$E_{j+1} \le E_j + kM \le (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM$$

ونحصل على العلاقة:

$$E_j \le E_0 + jkM = tM$$

لأن القيم الابتدائية لـ u وU هي نفسها أي $E_0 = 0$. عندما $h \to 0$ فإن: $k = sh^2 \to 0$ أيضاً وكذلك: $M \to (\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2})_{i,j}$

وبما أن U هو حل المعادلة التفاضلية الجزئية $0 < x < 1$,$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ فإن نهاية قيمة M صفر و نهاية قيمة E_j صفر، وبما أن $\left|U_{i,j} - u_{i,j}\right| \le E_j$. و u و U تتقارب من عندما $h \to 0$ مع الشرط $s \le \frac{1}{2}$. وعندما $s > \frac{1}{2}$ فإن المعادلة (8-35) تنتهي إلى ∞ عندما $h \to 0$. على كل لاحاجة لعمل ذلك حالياً لأن هدفنا هو إيجاد الشرط اللازم

للحصول على حل عددي مناسب متقارب ومستقر حيث إنه سنجد أن هذا الشرط هو $s \leq \frac{1}{2}$ وأن عدم الاستقرار يكون من أجل $s < \frac{1}{2}$.

إن البرهان في الأعلى يقتضي بأن يكون كل من المشتقات الجزئية $\frac{\partial U}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ مستمراً بانتظام ومحدوداً في مجال الحل. كان هذا بالنسبة للمثال الذي أوردناه من خلال الطريقة الصريحة (وسنعالج التقارب بطريقة غوص-سايدل فيما بعد) حيث كان المشتق $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ مبتدئاً بصفر على الرغم من انقطاع في المشتق $\frac{\partial U}{\partial x}$. إذا فرضنا أن U له مشتقات مستمرة ومحدودة من مرتبة أكبر من 3 بالنسبة لـ t ومن المرتبة 6 بالنسبة لـ x، فإن خطأ التقسيم يكون من مرتبة h^2، باستثناء عندما يكون $s = \frac{1}{6}$ فإنه في هذه الحالة يكون من مرتبة h^4.

8-10-2- دراسة الاستقرار تحليلياً (الطريقة المصفوفاتية)

هناك غير طريقة لدراسة مسألة الاستقرار، ثمة طريقة المصفوفات وطريقة سلسلة فورييه وسنكتفي في هذا الكتاب بدراسة الاستقرار بالطريقة الأولى، لنأخذ معادلة الحرارة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1$$

U=0 عندما $x = 1$ $x = 0,$ و U غير معلومة (مجهولة) عندما t=0 عندئذ التقريب باستخدام الطريقة الظاهرية أو الصريحة لهذه المعادلة يعطى بالعلاقة:

$$u_{i,j+1} = su_{i,j} + (1`-2s)u_{i,j} + su_{i+1,j} \tag{8-36}$$

وهي تقودنا إلى المعادلات:

$$\begin{aligned}
u_{1,j+1} &= 0 + (1-2s)u_{1,j} + su_{2,j}, \\
u_{2,j+1} &= \quad su_{1,j} + (1-2s)u_{2,j} + su_{3,j}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{N-1,j+1} &= \qquad\qquad su_{N-2,j} + (1-2s)u_{N-1,j} + 0,
\end{aligned} \tag{8-37}$$

حيث $N\delta x = Nh = 1$ و $u_{0,j} = u_{N,j} = 0$ والتي تكتب مصفوفاتياً بالشكل:

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2s) & s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & s & (1-2s) & s & \\ & & & \ddots & \\ & & & s & (1-2s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{bmatrix} \quad (8\text{-}38)$$

أو بالشكل:

$$u_{j+1} = Au_j \quad (8\text{-}39)$$

حيث u_j يشير إلى شعاع العمود:

$$\begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

والمصفوفة A تشير للمصفوفة المربعة(N-1):

$$A = \begin{bmatrix} (1-2s) & s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & s & (1-2s) & s & \\ & & & \ddots & \\ & & & s & (1-2s) \end{bmatrix} \quad (8\text{-}40)$$

وبالتالي:

$$u_j = Au_{j-1} = A(Au_{j-2}) = ... = A^j u_0 \quad (8\text{-}41)$$

حيث u_0 هو شعاع القيم الابتدائية. لنفرض أن هناك أخطاء مرتكبة في جميع النقاط المحورية على طول t=0 وأننا بدأنا الحساب بشعاع القيم u_0^* بدلاً من u_0، عندئذ يمكننا أن نحسب:

$$u_1^* = Au_0^*, \quad u_2^* = Au_1^* = A^2 u_0, ..., u_j^* = A^j u_0^* \quad (8\text{-}42)$$

وذلك مع فرض أنه لا توجد أخطاء أخرى. لنعرف خطأ الشعاع بالعلاقة:

$$e = u - u^*$$

عندئذ: $e_j = u_j - u_j^* = A^j(u_0 - u_0^j) = A^j e_0$.

نرى أن علاقة تراكم الخطأ هي نفسها التي تحسب u . كما نرى أنه عندما تكون المعادلات الفرقية خطية الشكل فإن تراكم الخطأ يكون في سطر واحد فقط، ذلك لأن الخطأ المرتكب عند تطبيق الحل على عدة أسطر ينتج من جمع كل الأخطاء المرتكبة لكل سطر بمفرده. تكون طريقة الفروق المحدودة مستقرة عندما يبقى الخطأ e_j محدود عندما $j \to \infty$. يمكن التحقق من ذلك أيضاً بالتعبير عن شعاع الخطأ بدلالة الأشعة الخاصة لـ A.

لنفرض أن القيم $(N-1)$ الخاصة λ_s للمصفوفة A، (s=1,2,...,N-1) مختلفة كلها عن بعضها البعض عندئذ الأشعة V_s الخاصة الموافقة لها تشكل مجموعة أشعة مستقلة خطياً، وبما أن $AV_s = \lambda_s V_s$ حسب تعريف القيم الخاصة ، فإن شعاع الخطأ e_0 ذو الـ (N-1) مركبة $e_{1,0}, \quad e_{2,0},...,e_{N-1,0}$ يكتب بشكل وحيد بدلالة الـ N-1 شعاع خاص ، أي أن:

$$e_0 = \sum_{s=1}^{N-1} c_s V_s \tag{8-43}$$

وبشكل تام لدينا (N-1) معادلة بـ (N-1) مجهول $c_1, c_2,..., c_{N-1}$:

$$\begin{bmatrix} e_{1,0} \\ e_{2,0} \\ \\ \\ e_{N-1,0} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \upsilon_{1,1} \\ \upsilon_{2,1} \\ \\ \\ \upsilon_{N-1,1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \upsilon_{1,2} \\ \upsilon_{2,2} \\ \\ \\ \upsilon_{N-1,2} \end{bmatrix} + ... + c_{N-1} \begin{bmatrix} \upsilon_{1,N-1} \\ \upsilon_{2,N-1} \\ \\ \\ \upsilon_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \tag{8-44}$$

حيث الـ e و الـ υ معلومة ومستقلة. إن الأخطاء على طول السطر t=k تنتج من الخطأ الابتدائي e_0 وتعطى بالشكل:

$$e_1 = Ae_0 = A\sum c_s V_s = \sum c_s AV_s = \sum c_s \lambda_s V_s \tag{8-45}$$

هذا يبين أن الأخطاء لن تزداد أسياً مع ازدياد j ويبرهن أن القيمة الخاصة الأكبر بالقيمة المطلقة يجب أن تكون أصغر أو تساوي 1 . إن المصفوفة A يمكن أن تكتب بالشكل التالي:

$$A=\begin{bmatrix}(1-2s) & s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & & \cdots & & \\ & s & (1-2s) & s & \\ & & s & (1-2s) & \end{bmatrix}= \tag{8-46}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2\end{bmatrix}$$

أي أن: $A=I+s$ حيث أن المصفوفة T_{N-1} المربعة من المرتبة (N-1) حيث قيمها الخاصة وأشعتها الخاصة تعطى بالعلاقات:

$$\lambda_s=-4\sin^2(\tfrac{S\pi}{2N}),\quad s=1,2,...,N-1 \tag{8-47}$$

$$V_s=(\sin\tfrac{s\pi}{N},\sin\tfrac{2s\pi}{N},....,\sin\tfrac{(N-1)s\pi}{N}),\quad s=1,2,...,N-1 \tag{8-48}$$

هذه القيم تحقق العلاقة: (8-49) $T_{N-1}V_s=\lambda_s V_s$.

وباستخدام الخاصة: أنه إذا كانت القيم الخاصة للمصفوفة B هي λ عندئذ القيم الخاصة لـ f(B) تكون $f(\lambda)$ ، ينتج من هذه الخاصة أن القيم الخاصة لـ A هي :

$$1+s\{-4\sin^2(\tfrac{s\pi}{2N})\} \tag{8-50}$$

وبالتالي فإن شرط استقرار الطريقة الصريحة يكون :

$$\left|1+-4s\sin^2(\tfrac{s\pi}{2N})\}\right|\le 1 \tag{8-51}$$

وبأخذ الطرف التالي من المتباينة السابقة:

$$-1\le 1+s\{-4s\sin^2(\tfrac{s\pi}{2N})\}$$

نجد:

$$s\le \tfrac{1}{2}\sin^2(\tfrac{s\pi}{2N})>\tfrac{1}{2} \tag{8-52}$$

ومنه نحصل على شرط الاستقرار النهائي التالي: $s \le \frac{1}{2}$.

(8-11)- طريقة كرانك نيكلسون الضمنية

لندرس الآن استقرار الحل بالنسبة لطريقة كرانك-نيكلسون الضمنية، إن المعادلات الفرقية لهذه الطريقة والتي أعطيت سابقاً بالعلاقة الآتية:

$$-su_{i-1,j+1} + (2+2s)u_{i,j+1} - su_{i+1,j+1} = su_{i-1,j} + (2-2s)u_{i,j} + su_{i+1,j} \quad (8\text{-}53)$$

تكتب بشكل مصفوفاتي على الشكل:

$$\begin{bmatrix} (2+2s) & -s & & & \\ -s & (2+2s) & -s & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & & -s & (2+2s) & -s \\ & & & -s & (2+2s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \quad (8\text{-}54)$$

$$= \begin{bmatrix} (2-2s) & s & & & \\ s & (2-2s) & s & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & s & (2-2s) & s & \\ & & s & (2-2s) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$(2I - sT_{N-1})^{-1}(2I + sT_{N-1}) = A$$

وبالتالي:
$$u_{j+1} = (2I - sT_{N-1})^{-1}(2I + sT_{N-1})u_j$$

وبالمناقشة السابقة بنفسها لمعادلات الفروق المنتهية فإن الاستقرار يكون عندما تكون القيمة المطلقة لكل من القيم الخاصة للمصفوفة:

$$(2I - sT_{N-1})^{-1}(2I + sT_{N-1}) = A$$

تكون أقل من 1، وبما أن القيم الخاصة لـ T_{N-1} تساوي:

$$\lambda_s = -4\sin^2(\tfrac{s\pi}{2N}), \quad s = 1,2,\dots,N-1$$

فإن القيم الخاصة للمصفوفة A تساوي:

$$\frac{2 - 4s\sin^2(\frac{s\pi}{2N})}{2 + 4s\sin^2(\frac{s\pi}{2N})}, \quad s = 1,2,\dots,N-1 \quad (8\text{-}55)$$

ومن الواضح أن هذا المقدار أصغر من 1 من أجل كل القيم الموجبة لـ s ، وهذا يبرهن استقرار طريقة كرانك – نيكلسون مهما تكن قيمة s .

مبرهنة-1- (حول القيم الخاصة لمصفوفة ثلاثية القطر)

القيم الخاصة لمصفوفة N×N :

$$A=\begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}$$ ،

(حيث b,c حقيقيين لهما نفس الإشارة و a حقيقي أوعقدي)

تعطى بالعلاقة:

$$\lambda_s = a + 2\{b\sqrt{(c/b)}\}\cos(\tfrac{s\pi}{N+1}), \quad s = 1,2,\ldots,N \qquad (8\text{-}56)$$

والشعاع الخاص الموافق x_i المقابل لـ λ_i ولتكن مركباته $v_1, v_2, \ldots, v_n$ يعطى بالعلاقة:

$$\mathrm{v}_k = \mathrm{c}\sin\frac{\mathrm{ik}\pi}{\mathrm{N}+1} \qquad (8\text{-}57)$$

حيث c ثابت يمكن أخذه مساوياً $\sqrt{\frac{2}{N+1}}$ وذلك للحصول على $|x_i| = 1$.

البرهان: لتكن المصفوفة،

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

عندئذ $\lambda_s = a + b\mu_s$ حيث μ_s القيم الخاصة للمصفوفة B، ويكفي تعيين هذه القيم الخاصة للمصفوفة B. يمكننا الوصول للتحقق من النتيجة ولكننا سنحاول بناء هذا البرهان. لنضع:

$$B_N(\mu) = \det(\mu I - B) = \begin{vmatrix} \mu & -1 & & & \\ -1 & \mu & -1 & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & -1 & \mu & -1 \\ & & & -1 & \mu \end{vmatrix}$$

وبالنشر نجد العلاقة: $B_N(\mu) = \mu B_{N-1}(\mu) - B_{N-2}(\mu)$

لدينا إضافة لذلك: $B_1(\mu) = \mu, \quad B_2(\mu) = \mu^2 - 1$

ولكي تحقق B_2 العلاقة التكرارية السابقة سنأخذ $B_0(\mu) = 1$، لنرمز بـ $\mu = 2x, \quad p_N(x) = B_N(\mu)$ عندئذ : $p_N(x) = 2xp_{N-1}(x) - p_{N-2}(x)$ هذه العلاقة تحقق كثير حدود تشيبشيف المعطى بالعلاقة المثلثية:

$$\sin(N+1)\varphi = 2\cos\varphi \sin N\varphi - \sin(N-1)\varphi, \quad x = \cos\varphi$$

وهذا يعطي العلاقة. للحصول على الشروط الابتدائية نأخذ:

$p_N(x) = \dfrac{\sin((N+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$، p_N كثير حدود تشيبشيف.

إن أصفار $B_N(\mu)$ هي إذن نفسها أصفار $\sin\left((N+1)\arccos\dfrac{\mu}{2}\right)$، أي $\arccos\dfrac{\mu_s}{2} = \dfrac{s\pi}{N+1}$ وبالنتيجة: $\mu_s = 2\cos\dfrac{s\pi}{N+1}$. أن مركبات الشعاع الخاص المرافق q_s يحقق العلاقة:

$$(q_s)_{k+1} = 2\cos(\tfrac{s\pi}{N+1})(q_i)_k - (q_i)_{k-1}.$$

وحسب ما سبق نجد: $(q_i)_k = c\sin(\frac{ik\pi}{N+1})$

ويمكننا أن نجد نتيجة مماثلة للمصفوفات المعطة حسب شروط النهايات.

سندرس بعد ذلك التقارب من أجل شروط حدية على شكل مشتقات (ستوضح ذلك بمثال عن معادلة كرانك- نيكلسون- الضمنية ولهذا سنقدم النظريتين التمهيديتين قبل ذلك.

نظرية تمهيدية -1-: (نظرية جيرشغورين-Gerschgorin's theorem)

إن طويلة أكبر قيمة خاصة للمصفوفة المربعة A لا تتجاوز أكبر مجموع لطويلات العناصر في أي صف أو عمود.

البرهان : لتكن λ_i القيمة الخاصة للمصفوفة المربعة A و x_i الشعاع الخاص المقابل لـ λ_i ولتكن مركباته : $v_1, v_2, ..., v_n$. عندئذ المعادلة : $Ax_i = \lambda_i x_i$ وبشكل مفصل تكتب بالشكل:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_1 + ... + a_{1,n}v_1 = \lambda_i v_1, \\
&a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_1 + ... + a_{2,n}v_1 = \lambda_i v_2, \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{s,1}v_1 + a_{s,2}v_1 + ... + a_{s,n}v_1 = \lambda_i v_s, \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{8-58}
$$

لتكن v_s أكبر طويلة لـ $v_1, v_2, ..., v_n$. لنختر المعادلة رقم s ولنقسمها على v_s فنجد:

$$\lambda_i = a_{s,1}(\tfrac{v_1}{v_s}) + a_{s,2}(\tfrac{v_2}{v_s}) + ... + a_{s,n}(\tfrac{v_s}{v_s})$$

وبالتالي، بأخذ القيمة المطلقة نجد:

$$|\lambda_i| = |a_{s,1}| + |a_{s,2}| + ... + |a_{s,n}|$$

وذلك لأن: $\left|(\frac{v_i}{v_s})\right| \le 1, \quad i = 1,2,...,n.$

وبما أن القيم الخاصة لمنقول المصفوفة A هي نفسها للمصفوفة A فإن النظرية صحيحة من أجل الأعمدة.

نظرية تمهيدية-2-: (نظرية براوير-Brauer's theorem)

لتكن p_s مجموع القيم المطلقة للحدود الواقعة على طول السطر s باستثناء العنصر a_{ss}. عندئذ كل قيمة خاصة للمصفوفة A تقع داخل أو على حدود محيط دائرة على الأقل من الدوائر التالية: $|\lambda - a_{ss}| = p_s$

البرهان: من النظرية التمهيدية -1- لدينا:

$$\lambda_i = a_{s,1}(\frac{v_1}{v_s}) + a_{s,2}(\frac{v_2}{v_s}) + ... + a_{s,n}(\frac{v_n}{v_s})$$

وبالتالي:

$$\left|\lambda_i - a_{s,s}\right| = \left|a_{s,1}(\frac{v_1}{v_s}) + ... + 0 + ... + a_{s,n}(\frac{v_n}{v_s})\right|$$
$$\leq \left|a_{s,1}\right| + \left|a_{s,2}\right| + ... + 0 + ... + \left|a_{s,n}\right|$$

وهو المطلوب.

(8-12)- التقارب من أجل شروط حدية على شكل مشتقات

سندرس التقارب من أجل شروط حدية على شكل مشتقات وسنوضح ذلك من خلال معادلة كرانك-نيكلسون- الضمنية:

$$(2I - sT_{N-1})u_{j+1} = (2I + sT_{N-1})u_j = \{4I - (2I - sT_{N-1})\}u_j,$$

والتي تكتب أيضاً بالشكل التالي: $Bu_{j+1} = (4I - B)u_j$ وهي تؤدي إلى المعادلة:

$$u_{j+1} = (4B^{-1} - I)u_j \qquad (8\text{-}59)$$

حيث أن:

$$B = \begin{bmatrix} (2+2s) & -s & & & & \\ -s & (2+2s) & & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & (2+2s) & -s \\ & & & & -s & (2+2s) \end{bmatrix}$$

ومعادلات الفروق المحدودة ستكون مستقرة عندما تكون القيمة المطلقة لكل قيمة خاصة للمصفوفة $(4B^{-1} - I)$ لا تزيد عن 1 ، أي يكون لدينا $\left|\frac{4}{\lambda} - 1\right| \leq 1$ حيث أن λ هي القيمة الخاصة للمصفوفة B. وهذا يكافئ الشرط $\lambda \geq 2$.

من المصفوفة B، لدينا $\max p_s = 2s, \quad a_{s,s=2+2s}$ وبتطبيق نظرية براوير نجد:

$$\left|\lambda - 2 - 2s\right| \leq 2s$$

ومنه نجد:

$$-2s \leq \lambda - 2 - 2s \leq 2s$$

أو:

$$2 \leq \lambda \leq 2 + 4s$$

وهذا يبرهن بأن المعادلات ستكون دون الخضوع لأي شرط مستقرة عندما $\lambda \le 2$ لكل قيم s . لنتم هذا المثال كما بدأنا بمعرفة معيار الاستقرار من أجل الشروط الحدية، ولنأخذ معادلة الحرارة:

معيار الاستقرار للشروط الحدية، (معادلة الحرارة):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ ، } 0<x<1$$

والشروط:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1(u - v_1) \quad : x = 0, \quad t \ge 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -h_2(u - v_2) \quad : x = 1, \quad t \ge 0$$

حيث h_1, h_2, v_1, v_2 ثوابت و $h_1 \ge 0, \quad h_2 \ge 0$. عندما تكون الشروط الحدية مقربة بمعادلات الفروق المركزية التالية:

$$\frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = h_1(u_{0,j} - v_1)$$
$$\frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h} = -h_2(u_{N,j} - v_2), \quad (Nh = 1),$$

والمعادلة التفاضلية مقربة بالطريقة الصريحة:

$$u_{i,j+1} = su_{i-1,j} + (1-2s)u_{i,j} + su_{i+1,j},$$

وبحذف $u_{i-1,j}$ و $u_{N+1,j}$ نحصل على المعادلات المكتوبة مصفوفاتياً بالشكل:

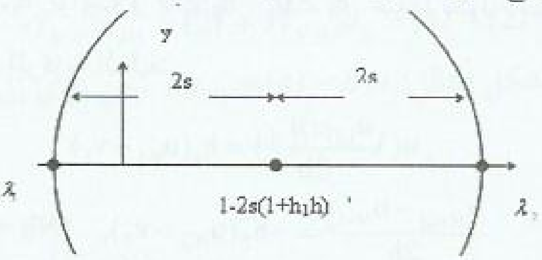
$$\begin{bmatrix} u_{0,j+1} \\ u_{1,j+1} \\ \\ u_{N-1,j+1} \\ u_{N,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{1-2s(1+h_1h)\} & 2s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & s & (1-2s) & s \\ & & & 2s & \{1-2s(1+h_2h)\} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \\ u_{N-1,j} \\ u_{N,j} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2sh_1v_1h \\ 0 \\ \\ 0 \\ 2sh_2v_2h \end{bmatrix} .$$

وبما أن كل مركبة من العمود الأخير ثابت فإن المصفوفة التي تحدد تراكم الخطأ هي:

$$\begin{bmatrix} \{1-2s(1+h_1h)\} & 2s & & & \\ s & (1-2s) & s & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & s & (1-2s) & s \\ & & & 2s & \{1-2s(1+h_2h)\} \end{bmatrix}$$

وبتطبيق نظرية براوير حيث أن: $a_{ss}=1-2s(1+h_1h), \quad p_s=2s$ نرى أن قيمها الخاصة تتوضع على الدائرة أو داخلها: $\left|\lambda-\{1-2s(1+h_1h)\}\right|\le 2s$



ومن الشكل السابق نجد: $\lambda_1=1-2s(2+h_1h), \quad \lambda_2=1-2sh_1h$

وللاستقرار لدينا: $|\lambda_1|\le 1, \quad |\lambda_2|\le 1$

ومنه: $-1\le 1-2s(2+h_1h)\le 1$ يؤدي إلى: $s\le 1/(2+h_1h)$

و $-1\le 1-2sh_1h)$ يؤدي إلى: $s\le 1/h_1h$ والأقل منهما (الأصغر) هو:

$$s\le 1/(2+h_1h)$$

وبشكل مشابه نجد: $s\le 1/(2+h_2h)$

وللاستقرار عامة لدينا الشرط: $s\le \min\{1/(2+h_1h), 1/(2+h_2h)\}$

(8-13)- معادلات كرانك-نيكلسون

من السهل أن نرى معادلات طريقة كرانك-نيكلسون للمسألة المعالجة تراكم الخطأ بالعلاقة:

$$e_{j+1}=(4B^{-1}-I)e_j \qquad (8\text{-}60)$$

حيث:

$$B=\begin{bmatrix} \{2+2s(1+h_1h)\} & -2s & & & \\ -s & (2+2s) & -s & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -s & (2+2s) & -s \\ & & & -2s & \{2+2s(1+h_2h)\} \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}61)$$

هذه الطريقة تكون مستقرة عندما تكون القيم الخاصة للمصفوفة B تتجاوز 2. بتطبيق نظرية براوير، $\left|\lambda-\{2+2s(1+h_1h)\}\right|\le 2s$ و $2+2sh_1h\le\lambda$ و التقارب غير مشروط، أي مهما كانت قيمة s. (هناك طريقة ثانية لدراسة مسألة الاستقرار كما ذكرنا هي طريقة الاستقرار باستخدام سلاسل فوربيه - Fourier Series- ولن نتطرق لها في هذا الكتاب).

(8-14)- تقارب طريقة غوص–سايدل التكرارية

سندرس تقارب غوص–سايدل التكرارية من أجل المعادلة:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ، \quad 0<x<1$$

ولنأخذ معادلة كرانك–نيكلسون الضمنية مستخدمين طريقة غوص–سايدل التكرارية المعطاة سابقاً بالمعادلة التالية:

$$u_i^{(n+1)}=\rho(u_{i-1}^{(n+1)}+u_{i+1}^{n})+\frac{b_i}{1+s} \qquad (8\text{-}62)$$

حيث: $$b_i=u_{i,j}+\frac{1}{2}s(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j})$$

و $$\rho=\frac{s}{2(1+s)}$$

ومنه: $$u_1^{(n+1)}=\rho u_2^{(n)}+c_1$$

حيث c_1 ثابت قيمته معلومة. وبشكل مشابه نجد أيضاً:

$$u_2^{(n+1)}=\rho u_3^{(n)}+\rho u_1^{(n)}+\text{const}$$
$$=\rho u_3^{(n)}+\rho^2 u_2^{(n)}+c_2$$

حيث const عدد غير معلوم، $c_2=c.c_1$

$$u_3^{(n+1)}=\rho u_4^{(n)}+\rho^2 u_3^{(n)}+\rho^3 u_2^{(n)}+c_3+\ldots \qquad (8\text{-}63)$$

مكننا من كتابة ماسبق بالشكل:

$$\begin{vmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ u_3^{(n+1)} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 & & & \\ 0 & \rho^2 & \rho & 0 & & \\ 0 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 0 & \\ & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \cdots & & \rho^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \\ \\ u_{N-1}^{(n)} \end{bmatrix} + c,$$

أي:

$$u^{(n+1)} = Au^{(n)} + c \tag{8-64}$$

حيث c هو شعاع مجهول و $N.h = N.\delta x = 1$ وعندما يتقارب $u^{(n)}$, $u^{(n+1)}$ من الحل الدقيق ومن العلاقة المصفوفاتية الأخيرة نجد المعادلة المصفوفاتية:

$$u = Au + c \tag{8-65}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد شعاع الخطأ e المعرف بالعلاقة:

$$e^{(n)} = u - u^{(n)}$$

يحقق العلاقة التكرارية:

$$e^{(n+1)} = Ae^{(n)} = A(Ae^{(n-1)}) = \dots = A^{n+1}e^{(0)} \tag{8-66}$$

وبما أن المصفوفة A مربعة من المرتبة (N-1) والشعاع $e^{(0)}$ ذو (N-1) مركبة فيمكننا كتابة $e^{(0)}$ بدلالة الـ (N-1) الأشعة الخاصة للمصفوفة A: $e^{(0)} = \sum_{s=1}^{N-1} c_s V_s$

ومنه:

$$e^{(1)} = Ae^{(0)} = \sum c_s AV_s = \sum c_s \lambda_s V_s, \tag{8-67}$$

لأن: $AV_s = \lambda_s V_s$ (بحسب تعريف القيم الخاصة) والخلاصة:

$$e^{(n)} = \sum c_s \lambda_s^n V_s,$$

وحتى يكون : $e^{(n)} \to 0$ عند ازدياد قيم n يجب أن يكون أكبر القيم الخاصة التالية أقل من 1: $|\lambda_1|, \ |\lambda_2|, \ |\lambda_3|, \dots, |\lambda_{N-1}|$ وحسب نظرية جيرشغورين (إن طويلة أكبر قيمة خاصة للمصفوفة المربعة A لا تتجاوز أكبر مجموع لطويلات العناصر في أي صف أو عمود). نجد،

$$|\lambda_{max}| \leq \rho + \rho^2 + ... + \rho^{N-1} \quad (8\text{-}68)$$

حيث: $\rho = \frac{s}{2(1+s)} < 1$ بسبب أن $s > 0$ و نجد:

$$|\lambda_{max}| \leq \frac{\rho-\rho^N}{1-\rho} < \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{s}{2+s} < 1 \quad (8\text{-}69)$$

وهو المطلوب.

حل المعادلات التفاضلية الجزئية الناقصية

تظهر عادة المعـادلات التفاضـلية الناقـصية عملياً (في الفيزيـاء والميكانيـك) في معادلات التوازن ومن أشهر هذه الأنواع معادلة بواسون ذات الشكل:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \quad (8\text{-}70)$$

من أجل: $(x,y) \in R$ و $u(x,y) = g(x,y) \quad for: (x,y) \in S$ و S هي حدود R

وحيث R هي المنطقة: $R = \{(x,y) \setminus a < x < b, c < y < d\}$

ومعادلة لابلاس المماثلة:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad (8\text{-}71)$$

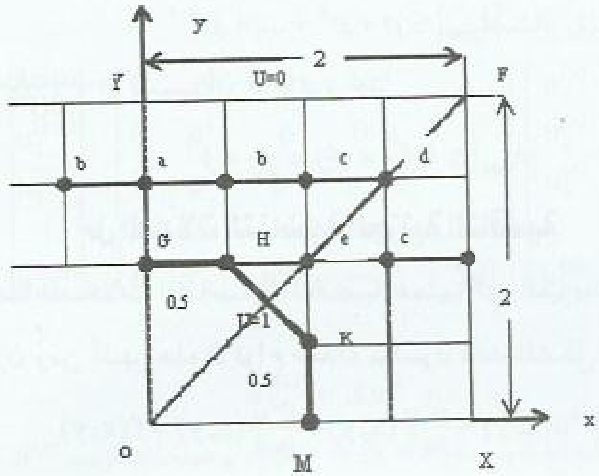
(8-15)- طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلات الناقصية

إن حل المعادلات الناقصية بطريقة الفروق المنتهية يماثـل مـا تم عملـه أثنـاء حـل المعادلات المكافئية من استبدال المشتقات الجزئية بالفروق المناسبة ولذلك يكفـي إعطـاء الأمثلة لبيان ذلك.

مثال (1): حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (الناقصية):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + 2 = 0$$

في المنطقة المعطاة بأنبوب اسطواني الشكل مقطعه متنـاظر بالنـسبة للمحـورين ox, oy الموضح في الشكل -1- الآتي والذي يمثل فقط ربـع المقطـع (يكفـي بـسبب التناظر) الواقع بين XFY و GHKM والشروط الحدية معطـاة بالـشكل الآتـي، علـى المحيط XFY قيمة u=0 وعلـى المحيط GHKM قيمـة u=1. خـذ مربعـات الـشبكة بالشكل h=0.5 .



الشكل -1-

الحل : لنرمز للقيم التقريبية للحل في نقاط الشبكة (كما هو مبين على الشكل) بالرموز التالية على الترتيب: a,b,c,d,e . باستبدال قيم المشتقات في المعادلة التفاضلية بالفروق نجد أن المعادلة الفرقية (ذات الخمس نقاط) تأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})+2=0$$

وبما أن:

$$x=ih, \quad y=jh, \quad h=0.5$$

فنجد:

$$2(u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j})+1=0$$

وبتطبيق هذه المعادلة على نقاط الشبكة نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\begin{aligned}
&2(2b+1-4a)+1=0\\
&2(c+a+1-4b)+1=0\\
&2(d+b+e-4c)+1=0\\
&2(2c-4d)+1=0\\
&2(2c+2-4e)+1=0
\end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن:

A=0.737, b=0.724, c=0.658, d=0.454, e=0.954

إن هذا الحل ليس دقيقاً بشكل جيد وسبب ذلك يعود إلى كبر خطوة التقسيم في الشبكة السابقة وبخاصة الحل عند النقطة e فيه خطأ كبير ويعود ذلك لأن الزوايا الداخلية عند النقطتين H و K تتجاوز 180.

(8-16)- مسألة الشروط الحدية التفاضلية (لمسألة انتشار الحرارة):

لندرس الآن معادلة انتشار الحرارة على سطح ناقل للكهرباء إلى الوسط الخارجي والشروط الحدية التفاضلية لهذه المسألة والتي تعطى بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{q}{K} \qquad (8\text{-}72)$$

حيث K ,λ ثوابت تتعلق بانتشار الحرارة و q عدد وحدات الحرارة المولدة بوحدة المساحة بالثانية. يمكننا لذلك دراسة المثال العددي الآتي.

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (الناقصية):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=-16$$

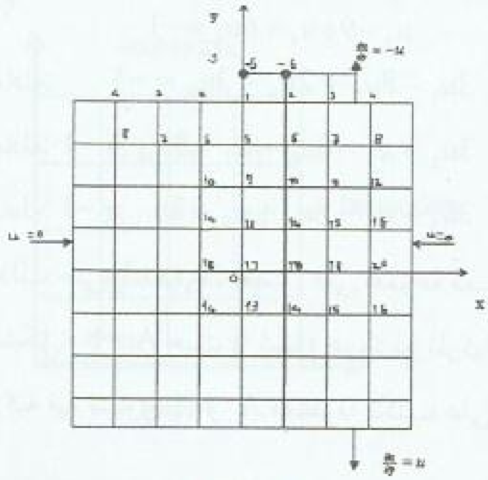
في جوار المربع $x=\pm 1, y=\pm 1$، والشروط الحدية:

$u=0$ عندما x=1 و $\frac{\partial u}{\partial y}=-u$ عندما y=1

ولدينا التناظر بالنسبة لـ ox, 0y أي:

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$ على 0y ، $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ على 0x

خذ الشبكة التربيعية مع الخطوة h=0.25 وسمي نقاط الشبكة كما هو في الشكل -2- الآتي.



الشكل -2-

الحل: إن المعادلة الفرقية المكافئة لهذه المعادلة التفاضلية تعطى بالشكل:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})+\frac{3}{h^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})=16$$

وبتعويض قيمة h=0.25 نجد أن:

$$u_{i+1,j}+3u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+3u_{i,j-1}-8u_{i,j}=-1$$

هذه المعادلة يمكن أن تمثل بشكل نموذج أعداد كما يلي :

$$\begin{bmatrix} & 3 & \\ 1 & -8 & 1 \\ & 3 & \end{bmatrix} u=-1$$

عند النقطة المحيطية 1

نجد المعادلة: $u_2+3u_{-5}+u_2+3u_5-8u_1=-1$

وباستخدام علاقة الشرط الحدي والفرق المركزي لهذا الشرط (المشتق الجزئي الأول) نجد: $\frac{u_{-5}-u_5}{2h}=2(u_{-5}-u_5)=-u_1$

وبحذف u_{-5} نحصل على: $-9\frac{1}{2}u_1+2u_2+6u_5=-1$

وبشكل مشابه في النقاط 2 و 3 و 4 نحصل على المعادلات:

$$u_1-9\tfrac{1}{2}u_2+u_3+6u_6=-1$$
$$u_2-9\tfrac{1}{2}u_3+u_4+6u_7=-1$$
$$u_3-9\tfrac{1}{2}u_4+6u_8=-1$$

وفي النقطة 5 نجد المعادلة: $3u_1-8u_5+2u_6+3u_9=-1$

وفي النقطة 6 نجد المعادلة: $3u_2+u_5-8u_6+u_7+3u_{10}=-1$

وفي النقطة 7 نجد المعادلة: $3u_3+u_6-8u_7+u_8+3u_{11}=-1$

وهكذا بإتمام ذلك حتى النقطة 20 نحصل على مجموعة معادلات خطية تكتب بشكل مصفوفات بالشكل: Au=b حيث u شعاع عمود ذو المركبات: $u_1,u_2,...,u_{20}$ و b شعاع عمود كل مركبة فيه تساوي 1- و A مصفوفة تكتب على شكل مصفوفة مجزأة بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}(B-1\frac{1}{2}I) & 6I & & & \\ 3I & B & 3I & & \\ & 3I & B & 3I & \\ & & 3I & B & 3I \\ & & & 6I & B\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-8 & 2 & & \\ 1 & -8 & 1 & \\ & 1 & -8 & 1 \\ & & 1 & -8\end{bmatrix}$$

وبحل جملة هذه المعادلات نجد الحل التالي:

$$u_1 = 3.067,\ u_2 = 2.909,\ u_3 = 2.411,\ u_4 = 1.496,\ u_5 = 3.720$$
$$u_6 = 3.527,\ u_7 = 2.917,\ u_8 = 1.801,\ u_9 = 4.169,\ u_{10} = 3.949$$
$$u_{11} = 3.258, u_{12} = 2.000, u_{13} = 4.431,\ u_{14} = 4.195, u_{15} = 3.455$$
$$u_{16} = 2.113, u_{17} = 4.518, u_{18} = 4.276, u_{19} = 3.520, u_{20} = 2.150$$

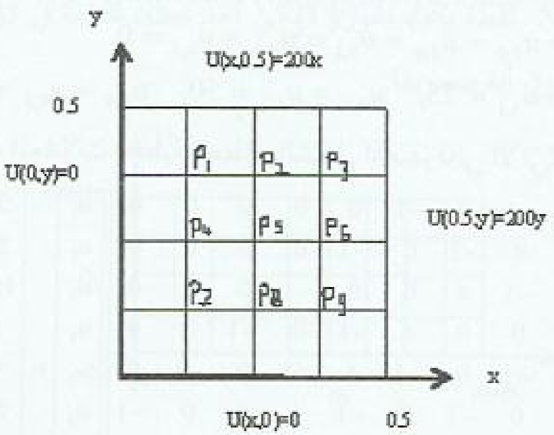
مثال (3) : حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (الناقصية):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$

من أجل المنطقة: $R=\{(x,y)\setminus 0<x<0.5, 0<y<0.5\}$

والشروط الحدية: $u(0,y)=0, u(x,0)=0, u(x,0.5)=200x, u(0.5,y)=200y$

الحل: لنجزئ المنطقة إلى 4 صفوف و4 أعمدة متساوية (16مربع)كما في الشكل -3-:



الشكل -3-

إن المعادلة الفرقية تأخذ الشكل:

$$4u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i-1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}=0$$

من أجل : i=1,2,3, j=1,2,3وبتطبيق هذه العلاقة على نقاط الشبكة من P_1 حتى P_9 نحصل على المعادلات الخطية التالية: (حيث $u_i=u(P_i)$)

في النقطة P_1 : $4u_1-u_2-u_4=u_{0,3}+u_{1,4}$

في النقطة P_2 : $4u_2-u_3-u_1-u_5=u_{2,4}$

في النقطة P_3 : $4u_1-u_2-u_4=u_{0,3}+u_{1,4}$

في النقطة P_4 : $4u_4-u_5-u_1-u_7=u_{0,2}$

في النقطة P_5 : $4u_5-u_6-u_4-u_2-u_8=0$

في النقطة P_6 : $4u_6-u_5-u_3-u_9=u_{4,2}$

في النقطة P_7 : $4u_7-u_8-u_4=u_{0,1}+u_{1,0}$

في النقطة P_8: $4u_8-u_9-u_7-u_5=u_{2,0}$

في النقطة P_9: $4u_9-u_8-u_6=u_{3,0}+u_{4,1}$

حيث نحصل على الطرف الأيمن لهذه المعادلات من الشروط الحدية، لدينا من الشرط:

$$u(0,y)=0,u(x,0)=0,u(x,0.5)=200x,u(0.5,y)=200y$$

$$u_{1,0}=u_{2,0}=u_{3,0}=u_{0,1}=u_{0,2}=u_{0,3}=0$$

$$u_{1,4}=u_{4,1}=25,\quad u_{2,4}=u_{4,2}=50,\quad u_{3,4}=u_{4,3}=75$$

ونحصل على جملة المعادلات الخطية المعطة بالشكل المصفوفاتي الآتي:

$$\begin{bmatrix}4&-1&0&-1&0&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&-1&0&0&0&0\\0&-1&4&0&0&-1&0&0&0\\-1&0&0&4&-1&0&-1&0&0\\0&-1&0&-1&4&-1&0&-1&0\\0&0&-1&0&-1&4&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&4&-1&0\\0&0&0&0&-1&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&0&-1&0&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\\u_8\\u_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\50\\150\\0\\0\\50\\0\\0\\25\end{bmatrix}$$

وبحل هذه الجملة من المعادلات الخطية بطريقة غوص-سايدل نجد الحل الآتي:

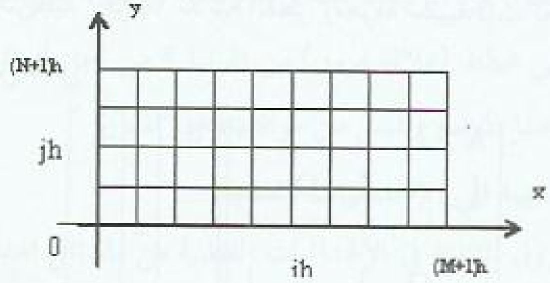
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.75 \\ 37.50 \\ 56.25 \\ 12.50 \\ 25.00 \\ 37.50 \\ 6.25 \\ 12.50 \\ 18.75 \end{bmatrix}$$

مثال (4): (مسألة بواسون-ذات بعدين-) لنأخذ مسألة بواسون الآتية:

$$\Delta u = f, \quad in : R =]0, a[\times]0, b[$$
$$u = g \;\; for : \Gamma = \partial R$$

حيث $\Gamma = \partial R$ هي حدود المنطقة R والمطلوب إيجاد الحل u الذي يحقق المعادلة والشروط السابقة باستخدام طريقة الفروق المنتهية.

الحل: لنأخذ الشبكة (الشكل -4-) التالية، بخطوة h تحتوي على M+2 نقطة باتجاه المحور الأفقي x و N+2 نقطة باتجاه المحورy (يمكن أخذ خطوة مختلفة في كل اتجاه والقيام بخطوات الحل نفسها دون أية صعوبة):



الشكل -4-

إذن نريد تقريباً للحل في N.M نقطة داخلية. عملياً نستخدم علاقة الفروق المنتهية الكلاسيكية من أجل 5 نقاط: نرمز بـ u_{ij} لتقريب u في النقطة $(x_i, y_i) = (ih, jh)$ ونقرب المشتق الثاني للتابع، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

بالفرق: $\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$

وذلك من أجل كل نقطة من نقاط الشبكة و تأخذ المعادلة التفاضلية الشكل الفرقي التالي:

$$u_{i-1,j} - 2u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = h^2 f(x_i, y_i)$$
$$\forall i = 1,2,\dots,M, \quad \forall j = 1,2,\dots,N$$

إن الحل معلوم في نقاط الحدود كما هو مبين في المسألة، فإذا رقمنا المجاهيل المتسلسلة سطر بسطر ورمزنا بـ: $\tilde{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{Mj})^t$ للشعاع المعبر عن المجاهيل في السطر j فنجد أن:

$$\tilde{u}_{j-1} + A\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j+1} = \tilde{f}_j, \quad j = 1,2,\dots,N$$

حيث أنه في هذه المعادلة المصفوفاتية لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & +1 & & & \\ +1 & -4 & +1 & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & +1 & -4 & +1 \\ & & & +1 & -4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة تناظرية شريطية (حزمة) ثلاثية القطر ومعرفة سلبية ذات بعد M. كما يمكننا كتابة ماسبق بشكل كامل:

$$\begin{bmatrix} A & I & & & \\ I & A & I & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & I & A & I \\ & & & I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \bar{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \bar{f}_N \end{bmatrix}$$

حيث أن الطرف الثاني يشمل قيم u في النهايات.

من المعلوم أن هذا التقريب هو من المرتبة 2 بالنسبة لـ h.

مبرهنة (1): إن التقريب المعرف بالعلاقات التالية، هو من المرتبة 2.

$$\begin{bmatrix} A & I & & & \\ I & A & I & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & I & A & I \\ & & & I & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \\ \\ \\ \tilde{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \\ \\ \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix} ، A = \begin{bmatrix} -4 & +1 & & & \\ +1 & -4 & +1 & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & O & +1 & -4 & +1 \\ & & & & +1 & -4 \end{bmatrix}$$

البرهان: نفرض أن f مستمر وقابل للاشتقاق مرتين، أي $f \in C^2(R)$، وهذا يؤدي لأن يكون u قابلاً للاشتقاق ومستمراً 4 مرات. وبتطبيق علاقة تايلور نجد:

$$u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y) = 2\left(\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,y)\right) + O(h^6) \qquad (8\text{-}73)$$

إن الحدود الفردية تنعدم بسبب الفرق و في نقطة (i,j) نحصل على :

$$(\Delta u)_{ij} = (\Delta_5 u)_{ij} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij} + O(h^4) \qquad (8\text{-}74)$$

وهذا يبرهن على أن $\Delta_5 u$ تقريب من المرتبة 2.

ملاحظة (1): نستخدم أحياناً مخطط (علاقة) فروق منتهية بتسع نقاط (بدلاً من خمس نقاط) للتعبير عن عبارة المشتق الثاني $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}(\Delta_9 u)_{ij} = 4u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + 4u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1} - 20u_{i,j} + \\ + 4u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + 4u_{i,j+1} + 4u_{i-1,j+1} = 6h^2 f_{i,j}\end{aligned} \qquad (8\text{-}75)$$

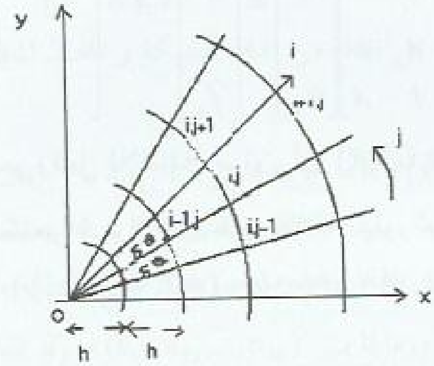
هذه العلاقة تكون من المرتبة 2 بشكل عام ومن المرتبة 4 عندما f=0. وبالتالي إذا رغبنا الحصول على مخطط (علاقة فروق) من المرتبة 4 من أجل أي f يكفي تعديل التعبير في الطرف، وهذا الموضوع ليس من مواضيع هذا المقرر.

(8-17)- الفروق المنتهية في الإحداثيات القطبية:

إن مسألة الفروق المنتهية في الإحداثيات القطبية من المسائل الهامة في التحليل العددي حيث تكون لدينا شروط حدية دورية لمسألة ما تقتضي الحل باستخدام الإحداثيات القطبية ولنأخذ مثالاً على ذلك مسألة لابلاس التي تكتب قطبياً كما يلي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad (8\text{-}76)$$

لنعرف نقاط الشبكة في المستوي القطبي (r,θ)، من تقاطع الدوائر r=ih(i=1,2,...) ، والخطوط المستقيمة $\theta = j\delta\theta,\ j = 0,1,2,...$. كما في الشكل -5- التالي الذي يبين الشبكة في الإحداثيات القطبية (r,θ).



الشكل -5-

إن معادلة لابلاس في النقطة (i,j) يمكن أن تقرب بالمعادلة الفرقية القطبية التالية:

$$\frac{(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})}{h^2}+\frac{1}{ih}\frac{(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})}{2h}+\frac{1}{(ih)^2}\frac{(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})}{(\delta\theta)^2}=0 \qquad (8\text{-}77)$$

من هذه المعادلة نجد:

$$(1-\tfrac{1}{2i})u_{i-1,j}+(1+\tfrac{1}{2i})u_{i+1,j}-2\{1+\tfrac{1}{(i\delta\theta)^2}\}u_{i,j}+ \\ +\tfrac{1}{(i\delta\theta)^2}u_{i,j-1}+\tfrac{1}{(i\delta\theta)^2}u_{i,j+1}=0 \qquad (8\text{-}78)$$

إذا كتبت هذه المعادلة بالتفصيل من أجل i=1,2,...,n و j=1,2,...,m وإذا فرضنا أن الشروط الحدية معلومة من أجل i=0, i=(n+1), j=0, j=(m+1) عندئذ نحصل على الشكل المصفوفاتي التالي: Au=b حيث b هو شعاع عمود يحدد من القيم الحدية و u شعاع عمود منقولة هو:

$$(u_{1,1},u_{1,2},...,u_{1,m},...,u_{2,1},...,u_{2,m},...,u_{n,1},u_{n,2},...,u_{n,m})$$

و A هي مصفوفة تكتب بالشكل التجزيئي التالي:

$$A=\begin{bmatrix} B_1 & (1-\frac{1}{2})I & & & & \\ (1-\frac{1}{2})I & B_2 & (1+\frac{1}{4})I & & & \\ & (1-\frac{1}{6})I & B_3 & (1+\frac{1}{6})I & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & (1-\frac{1}{2(n-1)})I & B_{n-1} & (1+\frac{1}{2(n-1)})I \\ & & & & (1-\frac{1}{2n})I & B_n \end{bmatrix}$$

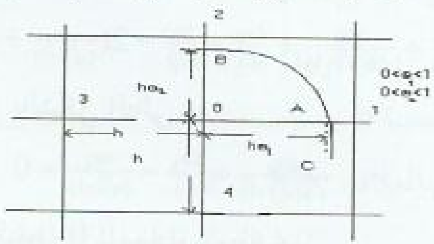
حيث أن كل مصفوفة B, I هي مصفوفة $m\times m$ و تعطى المصفوفة B بالشكل:

$$B_p=\begin{bmatrix} -2\{1+\frac{1}{(p\delta\theta)^2}\} & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & & & \\ \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & -2\{1+\frac{1}{(p\delta\theta)^2}\} & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & & \\ & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & -2\{1+\frac{1}{(p\delta\theta)^2}\} & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & -2\{1+\frac{1}{(p\delta\theta)^2}\} & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} \\ & & & \frac{1}{(p\delta\theta)^2} & -2\{1+\frac{1}{(p\delta\theta)^2}\} \end{bmatrix}$$

(8-18)-علاقات المشتقات بالقرب من حدود منحن عند استخدام شبكة مربعة

عندما تكون الحدود منحنية في الشبكة فإن العلاقات التي تم استخدامها سابقاً لا يمكن استخدامها من أجل تقريب المشتق الأول والثاني بالقرب من المنحني. في هذه الفقرة سنجد كيف يمكننا إيجاد العلاقة التقريبية لهذه المشتقات بالقرب من المنحني. لذلك نفرض أن الشبكة مربعة بخطوة مقدارها h ، وحسب نشر تايلور لدينا (الشكل - 6 -):

$$u_A=u_0+h\theta_1\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\theta_1^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+O(h^3)$$
$$u_3=u_0-h\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+O(h^3) \qquad (8\text{-}79)$$



الشكل - 6 -

لنحذف $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ من المعادلتين السابقتين فنجد:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)}u_A - \frac{(1-\theta_1)}{\theta_1}u_0 - \frac{\theta_1}{(1+\theta_1)}u_3\right\} \qquad (8\text{-}80)$$

بخطأ من مرتبة h^2 وبشكل مشابه بحذف $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ يؤدي إلى:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left\{\frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)}u_A + \frac{2}{(1+\theta_1)}u_3 - \frac{2}{\theta_1}u_0\right\} \qquad (8\text{-}81)$$

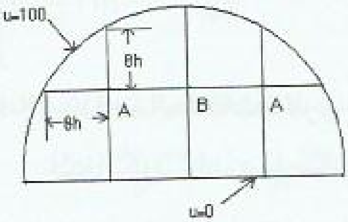
وبالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

نجد أن هذه المعادلة تقرب بالمعادلة:

$$\frac{2u_A}{\theta_1(1+\theta_1)} + \frac{2u_B}{\theta_2(1+\theta_2)} + \frac{2u_3}{(1+\theta_1)} + \frac{2u_4}{1+\theta_2} - 2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)u_0 = h^2 f_0 \qquad (8\text{-}82)$$

مثال (5) : لنأخذ معادلة لابلاس ذات البعدين: $\nabla^2 u = 0$ ولتكن منطقة الحل هي منحن مغلق على شكل نصف دائرة نصف قطرها 2h وإذا كانت قيمة التابع u=100 معلومة على المحيط، وكذلك على نصف القطر u=0، المطلوب، احسب الحل في نقاط الشبكة المربعة ذات الخطوة h مستخدماً طريقة الفروق المنتهية(الشكل – 7 –).



الشكل – 7 –

الحل: من العلاقة:

$$\frac{2u_A}{\theta_1(1+\theta_1)} + \frac{2u_B}{\theta_2(1+\theta_2)} + \frac{2u_3}{(1+\theta_1)} + \frac{2u_4}{1+\theta_2} - 2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)u_0 = h^2 f_0$$

وبتطبيق الحل عند النقطة A للمعادلة المعطاة (الشكل) نجد:

$$\frac{200}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} + \frac{200}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} + \frac{2u_B}{\sqrt{3}} - \frac{200}{\sqrt{3}} - 2\left(\frac{1}{(\sqrt{3}-1)} + \frac{1}{(\sqrt{3}-1)}\right)u_A = 0$$

بإصلاح هذه المعادلة تصبح بالشكل التالي :

$$\frac{400}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} + \frac{2u_B}{\sqrt{3}} - \frac{4u_A}{(\sqrt{3}-1)} = 0$$

كذلك، وبتطبيق الحل عند النقطة B للمعادلة المعطاة نجد:

$$u_A + u_A + 100 + 0 - 4u_B = 0$$

أي:

$$2u_A + 100 - 4u_B = 0$$

وبحل المعادلتين الناتجتين نجد:

$$u_A = 70.4634926, \quad u_B = 60.231746$$

(8-19)- طريقة تحسين دقة الحل- شبكة "ريشاردسون"Richardson

لتحسين الحل يخطر بالبال أولاً أن نأخذ شبكة بخطوة أصغر، هذا صحيح ولكن الحل سيكون طويلاً جداً، ولذلك تم أخذ طرق أخرى، سنذكر فيما يلي طريقة ريشاردسون التي تعتمد على تصغير الخطوة، ثم طريقة تصحيح الحل.

8-19-1- طريقة تصغير الخطوة:

نفرض أن u هو الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية وأن u_1 و u_2 الحلان في النقطة نفسها من الشبكة اللذان يقابلان الخطوتين (على الترتيب) h_1 و h_2 لهذه المعادلة أيضاً عندئذ لدينا:

$$\begin{aligned} u - u_1 &= A h_1^p \\ u - u_2 &= A h_2^p \end{aligned} \tag{8-83}$$

(خطأ التقارب يتناسب مع h^p). ومنه نجد:

$$u = \frac{h_2^p u_1 - h_1^p u_2}{h_2^p - h_1^p} \tag{8-84}$$

فمن أجل علاقة بخمس نقاط لمعادلة لابلاس:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

إن خطأ التجزيء لمنطقة مستطيلة لقيم ملساء حدودية معلومة يكون متناسباً مع h^2. في هذه الحالة ومن أجل $h_1 = 2h_2$:

$$u = u_2 + \tfrac{1}{3}(u_2 - u_1)$$

وعندما لا تكون قيمة p معلومة يمكن تقديرها مثلاً، بفرض أن $h_1 = 2h_2 = 4h_3$ التي تعطي العلاقة: $2^p = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$.

8-19-2- طريقة التصحيح

نستخدم في هذه الطريقة حدود تصحيح للمعادلة الفرقية، ويمكن شرح هذه الطريقة من خلال معالجة مسألة لابلاس السابقة: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

لنأخذ الفروق المركزية من المرتبة الرابعة:

$$h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta_x^2 u - \frac{1}{12}\delta_x^4 u$$
$$h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta_y^2 u - \frac{1}{12}\delta_y^4 u \qquad (8\text{-}85)$$

حيث δ_x^2 و δ_y^2 تمثل الفروق من المرتبة الثانية ناتجة من الفروق الموازية للمحور ox، والمحور oy أي:

$$\delta_x^2 u_{i,j} = \delta_{x^u_{i+\frac{1}{2},j}} - \delta_{x^u_{i-\frac{1}{2},j}} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \qquad (8\text{-}86)$$

وبالتالي ، ومن معادلة لابلاس: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ نجد:

$$\delta_x^2 u + \delta_y^2 u = \frac{1}{12}(\delta_x^4 u + \delta_y^4 u) \qquad (8\text{-}87)$$

وبحل المعادلة:

$$\delta_x^2 u + \delta_y^2 u = 0 \qquad (8\text{-}88)$$

نجد التقريب الأولي للحل وهو علاقة الفروق ذات النقاط الخمسة نفسها:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0$$

يمكن الحصول على دقة أكبر (تحسين) للحل وذلك بملاحظة الطرف الأيمن في العلاقة (8-87) كما يمكن تحسين الحل بأخذ علاقة فروق بتسع نقاط فمثلاً من أجل معادلة لابلاس ومن أجل الشبكة التالية ذات الخطوة h (الشكل-8-):

الشكل – 8 –

وبالرمز للابلاسيان بالرمز $\nabla^2 u$ وبأخذ:

$$\xi = h\tfrac{\partial}{\partial x}, \quad \eta = h\tfrac{\partial}{\partial y}, \quad D^2 = \tfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \tag{8-89}$$

وهكذا نجد:

$$\xi^2 + \eta^2 = h^2\nabla^2, \quad \xi\eta = h^2 D^2 \tag{8-90}$$

$$\xi^4 + \eta^4 = (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\xi^2\eta^2 = h^2(\nabla^4 - 2D^4)$$

وبما أن سلسلة تايلور تكتب بالشكل:

$$u(x+h) = (1 + h\tfrac{d}{dx} + \dots + \tfrac{h^n}{n!}\tfrac{d^n}{dx^n} + \dots)u(x) = (e^{h\frac{d}{dx}})u(x), \tag{8-91}$$

ينتج أن: $u_1 = e^{\xi}u_0, \quad u_2 = e^{\eta}u_0, \quad u_5 = e^{\xi+\eta}u_0, \dots$

ولأن معادلة بواسون تناظرية بالنسبة للمشتقات، لنعرف المجاميع التناظرية التالية:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ s_2 &= u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \\ s_3 &= u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} \end{aligned} \tag{8-92}$$

وبتعويض u_1 و u_2 و .... بدلالة u_0 ونشرالمؤثرات الأسية في قوى ξ, η يمكننا أن نجد:

$$\begin{aligned} s_1 &= 4u_0 + h^2\nabla^2 u_0 + \tfrac{1}{12}h^4(\nabla^4 - 2D^4)u_0 + \tfrac{1}{360}h_6(\nabla^6 - 3D^4\nabla^2)u_0 + \dots \\ s_2 &= 4u_0 + 2h^2\nabla^2 u_0 + \tfrac{1}{6}h^4(\nabla^4 + 4D^4)u_0 + \tfrac{1}{180}h^6(\nabla^6 + 12D^4\nabla^2)u_0 + \dots \\ s_3 &= 4u_0 + 4h^2\nabla^2 u_0 + \tfrac{4}{3}h^4(\nabla^4 - 2D^4)u_0 + \tfrac{8}{45}h^6(\nabla^6 - 3D^4\nabla^2)u_0 + \dots \end{aligned} \tag{8-93}$$

بحذف $D^4 u_0$ بين s_1 و s_2 نجد:

$$\nabla^2 u_0 = \tfrac{4s_1 + s_2 - 20u_0}{6h^2} - \tfrac{1}{12}h^2\nabla^2 u_0 + O(h^4) \tag{8-94}$$

من أجل معادلة بواسون لدينا: $\nabla^2 u = f$ وبالتالي : $\nabla^4 u = \nabla^2 f$

وبالنسبة لمعادلة لابلاس تنعدم أمثال h^2, h^4 و تصبح علاقة الفروق لتسع نقاط بالشكل التالي: $4s_1 + s_2 - 20u_0 = 0$

هذه العلاقة التقريبية أكثر دقة كما هو معلوم من علاقة النقاط الخمسة لمعادلة لابلاس: $s_1 - 4u_0 = 0$ حيث يكون الخطأ المقتطع في العلاقة بتسع نقاط من الدرجة h^6 في حين يكون الخطأ المقتطع في العلاقة بخمس نقاط من الدرجة h^2. نبين أن العلاقة الفرقية ذات التسع نقاط لمعادلة بواسون $\nabla^2 u = f$ تكتب بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} .u = 6h^2 f + \tfrac{1}{2} h^4 \nabla^2 f \qquad (8\text{-}95)$$

(8-20)- توضيحات لحل مجموعة المعادلات الفرقية الناقصية

عند حل المعادلات التفاضلية الناقصية نحصل على عدد كبير جداً من المعادلات الجبرية قد يصل الى عشرات الآلاف والتي يصعب حلها. من الطبيعي عدم استخدام الطرق المباشرة (مثل طريقة مقلوب المصفوفة أو طريقة الحذف الغوصي وطريقة كرامر- الفصل الثالث-) لحل هذه المجموعة من المعادلات تستخدم عادة الطرق غير المباشرة (التكرارية) للحل مثل طريقة جاكوبي وطريقة غوص – سايدل وطريقة الاستيفاء الخارجي للبمان وطريقة الاتجاهات المتناوبة وطريقة التدرج المرافق وغيرها من الطرائق.

لنأخذ مثلاً معادلة لابلاس أو معادلة بواسون (الناقصيتين)، تقرب معادلة بواسون بعلاقة فروق ذات خمس نقاط بالشكل:

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j} \qquad (8\text{-}96)$$

فيكون لدينا مجموعة المعادلات المعطة بالشكل المصفوفاتي التالي :

$$A.U{=}b \qquad (8\text{-}97)$$

$$\begin{bmatrix} B & I & & & \\ I & B & I & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & I & B & I \\ & & & I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \\ \cdot \\ \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ \\ \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}98)$$

حيث :

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 \\ & & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad U_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,n} \end{bmatrix}, b_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ b_{i,2} \\ \vdots \\ b_{i,n} \end{bmatrix}$$

وبشكل أوضح:

$$
A=\left[\begin{array}{c:c:c:c}
\begin{matrix}-4&1&0&\cdots&0\\1&-4&1&&\\&1&-4&1&\\&&\ddots&\ddots&\\&&1&-4&1\\&&0&1&-4\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&\\0&0&0&&1\\0&0&&0&1\end{matrix} & & \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & & & \\ \hdashline
\begin{matrix}1&0&&&&0\\0&1&0&&&\\0&0&1&&&\\&&&\ddots&&\\0&0&0&&1&0\\0&0&&&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}-4&1&0&\cdots&0\\1&-4&1&&\\&1&-4&1&\\&&\ddots&\ddots&\\&&1&-4&1\\&&0&1&-4\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&\\0&0&0&&1\\0&0&&0&1\end{matrix} & \\
 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & & \\ \hdashline
 & \begin{matrix}1&0&&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&\\0&0&0&&1\\0&0&&0&1\end{matrix} & \begin{matrix}-4&1&0&\cdots&0\\1&-4&1&&\\&1&-4&1&\\&&\ddots&\ddots&\\&&1&-4&1\\&&0&1&-4\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&\\0&0&0&&1\\0&0&&0&1\end{matrix} \\
 & & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ \hdashline
 & & &
\end{array}\right]
$$

بشكل عام، كما هو موضح في الأمثلة السابقة فإن عناصر المصفوفة لعلاقة الفروق ذات الخمسة نقاط لمسألة ناقصية تعطى بالشكل:

$$
\begin{bmatrix}
A_1 & B_1 & & & & \\
C_2 & A_2 & B_2 & & & \\
 & C_3 & A_3 & B_3 & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & C_{n-1} & A_{n-1} & B_{n-1} \\
 & & & & C_n & A_n
\end{bmatrix}
$$

حيث إن A_i, B_i, C_i هي مصفوفات حزمية.

(8-21)-الطرق التكرارية غير المباشرة لحل معادلة بواسون التفاضلية الناقصية

هناك عدد من الطرائق (غير المباشرة) مثل طريقة جاكوبي و طريقة غوص-سايدل و طريقة ليبمان في الاستيفاء الخارجي و طريقة الاتجاهات المتناوبة (الضمنية) وطريقة الاسترخاء وغيرها من الطرق وسنكتفي في هذا المقرر بدراسة طريقة جاكوبي و طريقة غوص-سايدل وطريقة ليبمان في الاستيفاء الخارجي و طريقة الاتجاهات المتناوبة (الضمنية) وطريقة الاسترخاء.

8-21-1-طريقة جاكوبي(لمعادلة بواسون التفاضلية الناقصية)Jacobi-method

سيتم شرح هذه الطريقة من خلال معالجة معادلة بواسون التفاضلية الناقصية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y)=0$$

ولتكن منطقة الحل هي المنطقة المستطيلة S ذات الأبعاد ph, qh ولنفرض أن الحل u معلوم على حدود المنطقة S وبتقسيم هذه المنطقة على شكل شبكة من المربعات ذات الخطوة h. حيث أن نقاط الشبكة محددة بالشكل: $x_i=ih;\quad i=0,1,2,...,p$

$$y_j=jh;\quad j=0,1,2,...,q$$

عندئذ تأخذ المعادلة التفاضلية السابقة الشكل الفرقي التالي:

$$u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+h^2f_{i,j}=0$$

والتي تعطي الشكل: $u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i,j-1}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+h^2f_{i,j})$

وطريقة جاكوبي لهذه المعادلة الفرقية تكون:

$$u^{(n+1)}_{i,j}=\frac{1}{4}(u^{(n)}_{i-1,j}+u^{(n)}_{i,j-1}+u^{(n)}_{i+1,j}+u^{(n)}_{i,j+1}+h^2f_{i,j})\qquad(8\text{-}99)$$

من أجل النقاط داخل الشبكة، أما بالنسبة للنقاط على الحدود (محيط المنطقة S) لدينا:

$$u^{(n+1)}_{i,j}=b_{i,j};\quad i=0,p;\quad j=0,q$$

يبرهن أن هذه الطريقة لا تتسارع بشكل كبير مقارنة مع الطرق غير المباشرة الأخرى وتسارعها يتناسب مع النظيم لطريقة جاكوبي التالي، والذي يعرف بأنه أكبر القيم الخاصة لمصفوفة هذه الطريقة:

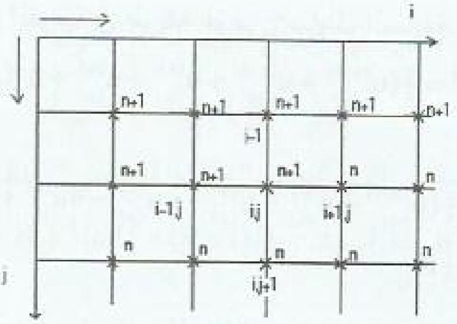
$$\rho=\rho(J)=\frac{1}{2}(\cos\tfrac{\pi}{p}+\cos\tfrac{\pi}{q})\qquad(8\text{-}100)$$

8-21-2-طريقة غوص-سايدل (لمعادلة بواسون التفاضلية الناقصية)

Gauss-Siedel method

هذه الطريقة تختلف عن سابقتها بأنها تلاحظ المركبات-القيم التكرارية- التي حسبت في آخر خطوة، فإذا فرضنا أن القيم التكرارية للحل في الخطوة (n+1) قد حسبت من أجل الأسطر : j=1,2,...,j-1 وكذلك وفق السطر j قد حسبت حتى النقطة

(i-1,j) وبالتالي فإن قيمة الحل في النقطة (i,j) وفي الخطوة (n+1) تعطى، حسب الشكل -9- التالي:



الشكل -9-

بالعلاقة التالية:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + h^2 f_{i,j}) \qquad (8\text{-}101)$$

تسمى هذه العلاقة، غالباً، بعلاقة "طريقة الاستيفاء الخارجي لليمان" حسب مخطط غوص- سايدل لمعادلة بواسون. إن تقارب هذه الطريقة يتم عندما $R_{i,j} \to 0$ حيث:

$$R_{i,j} = u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)} + h^2 f_{i,j} \qquad (8\text{-}102)$$

أي يكون من أجل ذلك $u_{i,j}^{(n+1)}$ في المعادلة الفرقية السابقة:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + h^2 f_{i,j}) \qquad (8\text{-}103)$$

هي قيمة محسنة لـ $u_{i,j}^{(n)}$.

إن الخطأ في الخطوة-التكرار- (n+1) يعطى بالعبارة: $\left|e^{(n+)}\right| = \rho\left|e^{(n)}\right|$ حيث e هو الخطأ في أي نقطة من نقاط الشبكة بين الحل الدقيق والحل التقريبي الناتج من حل المعادلات الفرقية السابقة، و ρ -نظيم مصفوفة التكرار- يعطى من أجل هذه الطريقة بالعلاقة: $\rho = \rho(G) = (\rho(J))^2 = \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q})^2$

مما يبرهن أن طريقة غوص – سايدل أسرع من طريقة جاكوبي بمقدار الضعف وأن هذا التقارب يتعلق بـ p وq فكلما كانت خطوة الشبكة أصغر – أي p وq أكبر- تكون نسبة التقارب أصغر (تناسب عكسي).

8-21-3-طريقة ليبمان في الاستيفاء الخارجي (لمعادلة بواسون التفاضلية الناقصية) Unextrapolated Liebmann method (أو طريقة S.O.R)

لنكتب المعادلة الفرقية في طريقة غوص-سايدل السابقة:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + h^2 f_{i,j}) \tag{8-104}$$

بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= u_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)} + h^2 f_{i,j}) \\ &= u_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{4} R_{i,j} \end{aligned} \tag{8-105}$$

حيث $\frac{1}{4}R_{i,j}$ هو تغير قيمة $u_{i,j}$ خلال خطوة تكرار واحدة في طريقة غوص-سايدل. بالنسبة لطريقة ليبمان يعطى عادة تغير لـ $u_{i,j}^{(n)}$ قيمته أكبر من تغير طريقة غوص-سايدل، ويعطى عندئذ التكرار من أجل النقاط الداخلية للشبكة بالعلاقة:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= u_{i,j}^{(n)} + \frac{1}{4}\theta R_{i,j} \\ &= u_{i,j}^{(n)} + \lambda(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)} + h^2 f_{i,j}) \end{aligned} \tag{8-106}$$

حيث: $\lambda = \frac{1}{4}\theta$ ثابت موجب، وبشكل عملي : $\frac{1}{4} \le \lambda \le \frac{1}{2}$

أما من أجل النقاط على الحدود لدينا : $u_{i,j}^{(n+1)} = b_{i,j}; \quad i = 0, p; \quad j = 0, q$

يمكن كتابة العلاقة الأخيرة (5-76) بدلالة θ بالشكل:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \theta\{\frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} + h^2 f_{i,j})\} + (1-\theta)u_{i,j}^{(n)}$$

وهذا يبين أن التكرار حسب هذه الطريقة عبارة عن تركيب خطي (تهجين) لعلاقة غوص (5-71) التالية:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + h^2 f_{i,j})$$

مع التكرار $u_{i,j}^{(n)}$ ذي الخطوة n.

8-21-4-دراسة تقارب طريقة ليبمان في الاستيفاء الخارجي (لمعادلة بواسون التفاضلية الناقصية)

إن أفضل قيمة لـ λ حسبما برهن العالم "فرانكل" للحصول على معدل أعظمي لتقارب الحل هو أصغر قيمة لجذور المعادلة التربيعية التالية:

$$\lambda^2 t^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

حيث أن:

$$t = \cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q}$$

ومن أجل قيم p,q الكبيرة فإن أفضل القيم لـ λ تكون:

$$\lambda_{opt} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وهذه هي قيمة λ التي تجعل "الجذر الطيفي"-نظيم المصفوفة- أصغرياً، لمصفوفة التكرار في طريقة ليمان : $(I-\theta L)^{-1}\{\omega U-(\theta-1)I\}$، عندما يعتبر كتابع لـ θ.

يبرهن أن تقارب طريقة ليمان تتعلق بقيمة θ وأن أفضل قيمة هي من أجل : $\theta_b = 1.9$ وهذا يعطي معدل تقارب بـ 40 مرة أفضل من تقارب طريقة غوص-سايدل حيث $\theta = 1$، وهذا المعدل في التقارب أكبر مرتين من المعدل المعطى من أجل تقدير قيمة أصغر لـ θ مثل $\theta = 1.875$.

في الحقيقة لا توجد عبارة تحسب θ_b باستثناء معادلة بواسون المحققة في منطقة مستطيلة أو أسطوانة دورانية وحسابها يتعلق بتقدير النظيم "الجذر الطيفي" $\rho(J)$ لمصفوفة التكرار في طريقة جاكوبي (L+U) أو على تقدير النظيم $\rho(G)$ لمصفوفة التكرار في طريقة غوص-سايدل $(I-L)^{-1}U$، كما يبرهن أن:

$$\rho(G) = \rho^2(J)$$

وأن: $\theta_b = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(G)}}$، هناك عدد من الطرق لحساب الثابت θ_b ونترك ذلك للمختصين.

5-21-8-طريقة الاتجاهات المتناوبة (الضمنية)- Alternating-Direction implicit method أو طريقة ADI- لـ Peaceman-Rachford

يمكن استخدام هذه الطريقة أيضاً في حل المعادلات التفاضلة المكافئية، حيث أنه من مزايا هذه الطريقة عند أخذ خطوة زمن واحدة والتي توافق تكرار واحد وحيث العدد $\rho = (\delta x)^2 / \delta t$ يستخدم كوسيط تسارع تقارب لهذه الطريقة.

لنعالج وفق هذه الطريقة المعادلة الناقصية:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+gu=f(x,y) \qquad (8\text{-}107)$$

حيث الثابت $g \geq 0$. هذه المعادلة تقرب في كل نقطة من نقاط الشبكة التربيعية ذات الخطوة h بالمعادلة الفرقية التالية:

$$(-u_{i-1,j}+2u_{i,j}-u_{i+1,j})+(-u_{i,j-1}+2u_{i,j}-u_{i,j+1})+h^2gu_{i,j}=h^2f_{i,j} \qquad (8\text{-}108)$$

لنحل هذه المعادلة من أجل كل حد بين القوسين، أي كل مشتق، عندئذ يمكن أن نكتب:

$$-u_{i-1,j}+2u_{i,j}-u_{i+1,j}+\tfrac{1}{2}h^2gu_{i,j}+\rho u_{i,j}=$$
$$=\rho u_{i,j}+u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}-\tfrac{1}{2}h^2gu_{i,j}+h^2f_{i,j}$$

وكذلك:

$$-u_{i,j-1}+2u_{i,j}-u_{i,j+1}+\tfrac{1}{2}h^2gu_{i,j}+\rho u_{i,j}=$$
$$=\rho u_{i,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}-\tfrac{1}{2}h^2gu_{i,j}+h^2f_{i,j}$$

حيث أن ρ وسيط عددي.

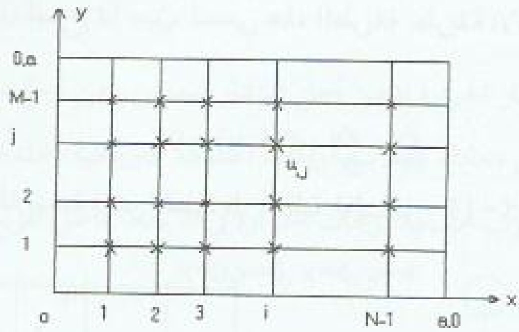
إن الطريقة التكرارية المتناوبة الاتجاهات Peaceman-Rachford (A.D.I) عندئذ تعرف بالمعادلات:

$$-u^{(n+1)}_{i-1,j}+(2+\tfrac{1}{2}h^2g+\rho)u^{(n+1)}_{i,j}-u^{(n+1)}_{i+1,j}=$$
$$=u^{(n)}_{i,j-1}-(2+\tfrac{1}{2}h^2g-\rho)u^{(n)}_{i,j}+u^{(n)}_{i,j+1}+h^2f_{i,j}$$

و كذلك:

$$-u^{(n+2)}_{i,j-1}+(2+\tfrac{1}{2}h^2g+\rho)u^{(n+2)}_{i,j}-u^{(n+2)}_{i,j+1}=$$
$$=u^{(n+1)}_{i-1,j}-(2+\tfrac{1}{2}h^2g-\rho)u^{(n+1)}_{i,j}+u^{(n+1)}_{i+1,j}+h^2f_{i,j}$$

لنفرض أن منطقة التكامل هي مستطيلة الشكل، مقطعة بواسطة (M+1) مستقيماً متوازية وموازية للمحور oy، و (N+1) مستقيماً متوازية وموازية للمحور ox، حسب الشكل -10- التالي:



الشكل -10-

وبفـرض أن $u_{i,j}^{(n)}$ حسبت في كل نقاط الشبكة بدلالة القيم الابتدائية $u_{i,j}^{(0)}$ وبدلالة القيم الحدية، وبالتالي نحصل على (M-1) معادلة خطية من المعادلة التكرارية مطبقة في كل نقطة من نقاط الشبكة الواقعة على المستقيم الموازي للمستقيم ox وحيث j ثابت، وهذه الجملة من المعادلات تحتوي على القيم التكرارية:

$$u_{1,j}^{(n+1)}, u_{2,j}^{(n+1)}, \dots, u_{M-1,j}^{(n+1)}$$

وبما أن كل من هذه المعادلات لا تحتوي على أكثر من ثلاثة مجاهيل، فإن هذه الجملة من الـ (M-1) معادلة تحل بطريقة الحذف الغاوصي. ومن أجل كل مجموعة لكل سطر تحل، فإن معادلة التكرار تعطي مجموعة مماثلة من (N-1) معادلة لحساب التقريب رقم (n+2) للحل u عموداً عموداً. يبرهن أنه من أجل ذات الوسيط العددي ρ لكل خطوة تكرارية فإن تقارب الحل يتم من أجل جميع قيم $\rho > 0$ وأن أفضل قيمة لهذا التقارب يتم من أجل القيمة:

$$\rho = \sqrt{\{(\tfrac{1}{2}h^2 g + 4\sin^2 \tfrac{\pi}{2R})(\tfrac{1}{2}h^2 g + 4\cos^2 \tfrac{\pi}{2R})\}}$$

حيث R هي أكبر قيمة لـ M وN.

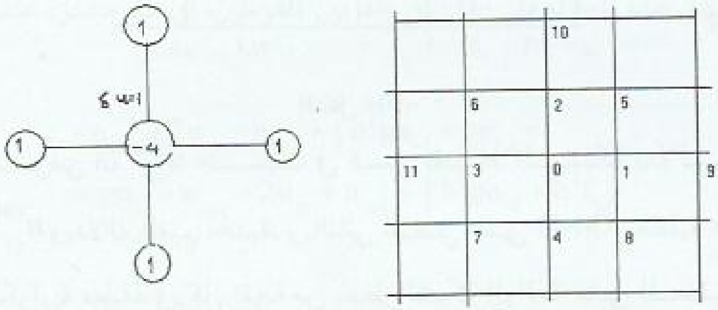
6-21-8- طريقة الاسترخاء (Relaxation method)

هذه الطريقة غير مستخدمة بكثرة لحل المعادلات التفاضلية الناقصية بشكل عملي، إذا أعطيت قيم مختلفة للوسيط العددي ρ لكل خطوة تكرارية، يبرهن أن

تقارب الحل يكون أسرع مما سبق، تسمى هذه الطريقة بطريقة الاسترخاء، فلو أخذنا مثلاً معادلة بواسون:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y)=0 \qquad (8\text{-}109)$$

ولنأخذ الشبكة التربيعية ذات الخطوة h التالية (الشكل-11-):



الشكل-11-

ومن أجل النقطة المركزية o ومن أجل علاقة فروق ذات الخمسة نقاط، فإن معادلة بواسون السابقة تأخذ الشكل الفرقي التالي:

$$u_1+u_2+u_3+u_4-4u_0+h^2 f_0=0$$

إن الحل الدقيق (التحليلي) لكل المعادلات الفرقية سيجعل الطرف الأيسر معدوماً، أما القيم الأخرى لـ u فلن تجعل هذا الطرف معدوماً وسيكون مقداراً ما سنرمز له بالباقي R (Residual). وهذا الباقي عند النقطة الصفرية يعطى بالعلاقة:

$$R_0=u_1+u_2+u_3+u_4-4u_0+h^2 f_0=0 \qquad (8\text{-}110)$$

كما أن بقية البواقي التي تحتوي على الحد u_0 هي:

$$\begin{aligned}
R_1&=u_0+u_5+u_9+u_8-4u_1+h^2 f_1\\
R_2&=u_5+u_{10}+u_6+u_0-4u_2+h^2 f_2\\
R_3&=u_0+u_6+u_{11}+u_7-4u_3+h^2 f_3\\
R_4&=u_8+u_0+u_7+u_{12}-4u_4+h^2 f_4
\end{aligned} \qquad (8\text{-}111)$$

تبين لنا هذه العلاقات أن تغيراً مقداره $\delta=+1$ للحد u_0 يغير الفروق R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 (على الترتيب) بمقدار $(-4,1,1,1,1)$.

مثال (6):

لنفرض أن انتشار الحرارة u من أجل انتشار ببعدين ومن أجل مادة عامل انتشار الحرارة فيها ثابت، يحقق معادلة لابلاس، وبأخذ الشبكة التربيعية ذات خطوة تساوي 1 (الشكل-12-)، المطلوب حساب درجات الحرارة في 9 نقاط داخل المربع:

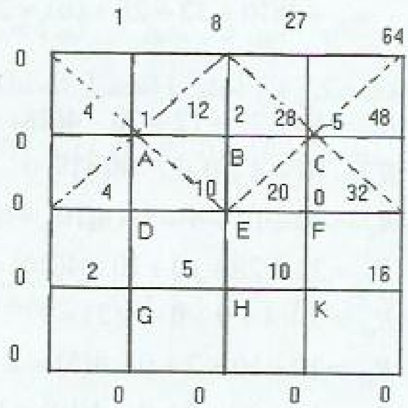
$$x=0, y=0, x=4, y=4$$

وحيث لدينا الشروط:

i) $u=0$ على طول: $x=0$ and $y=0$

ii) $u=x^3$ على طول: $y=4$.

iii) u تتغير خطياً على طول: $x=4$ ومستمرة في الزوايا.



الشكل-12-

الحل: إن قيم u الحدية كما هو مبين في الشكل السابق، موضحة في أعلى وعلى يسار الشبكة، بينما القيم الابتدائية فتحسب (توجد في النقاط الداخلية) من المعادلة التالية: $u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + h^2 f_0)$ وذلك مع أخذ h=2 (أي المربع كله). لنأخذ على سبيل المثال $f_0 = 0$ في هذه الحالة نجد:

$$u_E = \tfrac{1}{4}(32+8+0+0) = 10$$
$$u_C = \tfrac{1}{4}(64+8+10+32) \approx 28$$
$$u_A = \tfrac{1}{4}(8+0+0+10) \approx 4$$
$$u_B = \tfrac{1}{4}(28+8+4+10) \approx 12, \ldots$$

(من أجل معادلة بواسون، حيث تحتوي الحد $h^2 f_0$ و $h=2$ من أجل u_E و $h=CE=\sqrt{2}$ من أجل u_C و $h=1$ من أجل u_B).

إن البواقي الابتدائية تكون:

$$R_A = 12+1+0+4-4(4)=1,$$
$$R_B = 28+8+4+10-4(12)=2,..$$

وبالمتابعة بنفس العمل نجد درجات الحرارة (الحل) في الخمس نقاط التالية:

$$u_K = \tfrac{1}{4}(0+0+32+10) \approx 10$$
$$u_G = \tfrac{1}{4}(0+0+10+0) \approx 2$$
$$u_H = \tfrac{1}{4}(0+10+10+2) \approx 5$$
$$u_D = \tfrac{1}{4}(2+10+4+0) \approx 4$$
$$u_F = \tfrac{1}{4}(10+32+28+10) = 20$$

وكذلك حساب الفروق:

$$R_C = 48+27+12+20-4(28) = -5$$
$$R_D = 10+4+0+2-4(4) = 0$$
$$R_E = 20+12+4+5-4(10) = 1$$
$$R_F = 32+28+10+10-4(20) = 0$$
$$R_G = 5+4+0+0-4(2) = 1$$
$$R_H = 10+10+2+0-4(5) = 2$$
$$R_K = 16+20+5+0-4(10) = 1$$

وهكذا نتابع العمل ....إن هذه الطريقة كما يتضح طويلة وبغية الحصول على دقة في الحسابات يتم حلّ المعادلات باستخدام الحاسوب وإذا اعتبرنا أننا وصلنا إلى جملة المعادلات الخطية Ax=b وأن الحل x يقرب بالشعاع *x بحيث يكون الفرق التالي أصغر من مقدار صغير δ : $\left|x_i - x_i^*\right| \le \delta$، بما أن الحل x مجهول فنقول بأنه كلما كان الشعاع : $\left|r\right| = \left|b - Ax^*\right| \le \delta$ صغيراً وأصغر من δ بالقيمة المطلقة فإن الحل يكون أقرب من الحل الدقيق.

(8-22)- الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية الزائدية من المرتبة الثانية

8-22-1-الحالة العامة-(طريقة المميزات)

لنأخذ المعادلة التفاضلية الزائدية العامة ذات الشكل:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+e=0 \qquad (8\text{-}112)$$

حيث أن: a, b, c, e ثوابت فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تكون خطية بعوامل ثابتة. وإذا كانت هذه المقادير تتعلق بـ x, y فتكون المعادلة خطية. ومن الممكن أن تكون هذه المقادير في الحالة المعالجة تابعة للمشتقات الجزئية الأولى $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ ولكنها ليست تابعة للمشتقات من المرتبة الثانية $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ يمكن أن نبين أنه في أية نقطة في المستوي xoy هناك اتجاهان يمكن من أجلهما اختصار المعادلة السابقة لمعادلة تفاضلية تامة (تفاضل تام)، وهذا يبسط شكل المعادلة بالنسبة لهذين الاتجاهين بخلاف كما لو كانت المشتقات الجزئية مأخوذة بالنسبة لاتجاهات أخرى. من أجل ذلك نفرض أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p \text{ و } \frac{\partial u}{\partial y}=q \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=r \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=s \text{ و } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=t$$

عندئذ نجد أن:

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=rdx+sdy \qquad (8\text{-}113)$$

$$dq=\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy=sdx+tdy \qquad (8\text{-}114)$$

والمعادلة (8-112) تكتب بالشكل:

$$ar+bs+ct+e=0 \qquad (8\text{-}115)$$

كما نعلم فإن $\frac{dy}{dx}$ هو ميل المماس للمنحني C في المستوي xoy الذي تحقق في كل نقطة منه، القيم t,s,r,p,q,u المعادلة (8-112)، لنحذف من المعادلة (8-115) r,t مع ملاحظة المعادلتين (8-113) و (8-114) فنجد:

$$\frac{a}{dx}(dp-sdy)+bs+\frac{c}{dy}(dq-sdy)+e=0$$

أي :

$$s\{a(\tfrac{dy}{dx})^2 - b(\tfrac{dy}{dx}) + c\} - \{a\tfrac{dp}{dx}.\tfrac{dy}{dx} + c\tfrac{dq}{dx} + e\tfrac{dy}{dx}\} = 0 \qquad (8\text{-}116)$$

لنختار الآن المنحني C بحيث يكون ميل المماس في أية نقطة منه جذراً للمعادلة:

$$a(\tfrac{dy}{dx})^2 - b(\tfrac{dy}{dx}) + c = 0 \qquad (8\text{-}117)$$

ومن المعادلة (8-116) نجد أنه من أجل هذا الاتجاه تتحقق المعادلة الآتية:

$$a\frac{dp}{dx}.\frac{dy}{dx} + c\frac{dq}{dx} + e\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (8\text{-}118)$$

وهذا يدل على أنه في كل نقطة p(x,y) من منطقة الحل هناك اتجاهان يعطيان بجذري المعادلة (8-117) ويتحقق من أجلهما المعادلة التفاضلية (8-118).

تعريف (1): نسمي الاتجاهين المعطيين بجذري المعادلة (8-117) بالاتجاهات المميزة، وتكون المعادلة التفاضلية الجزئية (8-112) معادلة مكافئية أو ناقصية أو زائدية حسب قيمة مميز المعادلة (8-117): $b^2 - 4a.c$، إن كان (على الترتيب) صفراً أو سالباً أو موجباً. سنأخذ في هذه الدراسة فقط الحالة الزائدية ولذلك نفرض أن المعادلة من هذا النوع وأن جذور المعادلة (8-117) هي: $\frac{dy}{dx} = f$ و $\frac{dy}{dx} = g$ وبالتالي نعتبر أن المنحني المار من النقطة p(x,y) الذي ميل المماس في كل نقطة منه هو f يسمى بالمنحني المميز f.

و في الحالة المدروسة هناك منحنيان مميزان يمران بكل نقطة من منطقة الحل. إن أفضل الأمثلة الشهيرة في حالة المعادلة الزائدية معادلة الأمواج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ وفي حالة المعادلة المكافئية معادلة الحرارة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

وفي حالة المعادلة الناقصية معادلة لابلاس: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

مثال (1): لنأخذ المعادلة التفاضلية

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, p, q)$$

إن الاتجاهات المميزة لهذه المعادلة تعطى بالجذور m_1, m_2 للمعادلة التربيعية:

$$ym^2 - xm + y = 0, \quad m = dy/dx$$

حيث تكون حسب قيمة المميز: ($x^2 - 4y^2$) زائدية أو ناقصة أو مكافئية أي:

تكون المعادلة زائدية عندما: $|x| > 2|y|$

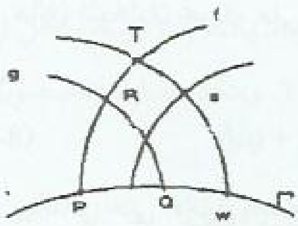
وتكون المعادلة مكافئية عندما: $|x| = 2|y|$

وتكون المعادلة ناقصية عندما: $|x| < 2|y|$

8-22-2-الحل – التحليلي–للمعادلة التفاضلية الزائدية (بطريقة المميزات)

لنأخذ المعادلة السابقة (8-118) حيث وجدنا أنه على طول الإتجاهين المميزين للمعادلة التفاضلية تتحقق هذه المعادلة ، لنضرب هذه المعادلة بـ dx فنجد:

$$a.\frac{dy}{dx}dp + cdq + edy = 0 \qquad (8\text{-}119)$$



وبفرض أن المعادلة التفاضلية زائدية الشكل، وأن جذور المعادلة المميزة:

$$a(\tfrac{dy}{dx})^2 - b(\tfrac{dy}{dx}) + c = 0$$

الشكل -1-

حقيقية مختلفة من الشكل: $\frac{dy}{dx} = f$ و $\frac{dy}{dx} = g$

وليكن Γ منحن غير مميز يتحقق من أجله شروط البدء لكل من u,p,q . لنفرض أيضاً أن P,Q نقطتان متجاورتان من المنحني Γ وأن المنحني المميزf المار من النقطة P يتقاطع مع المنحني المميز g المار من النقطة Q في النقطة $R(x_R, y_R)$ كما في الشكل -1- التالي:

كتقريب نفرض أن الأقواس QR, PR قربتا على الترتيب بالمستقيمات f_P, g_Q، عندئذ المعادلتين السابقتين: $\frac{dy}{dx} = f$ و $\frac{dy}{dx} = g$ تقربان بالشكل :

$$\begin{aligned} y_R - y_P &= f_P(x_R - x_P) \\ y_R - y_Q &= g_Q(x_R - x_Q) \end{aligned} \qquad (8\text{-}120)$$

وهما معادلتان تحويان على المجهولين x_R, y_R

كما أن المعادلة: $a.\frac{dy}{dx}dp + cdq + edy = 0$

تكتب بالشكل:

$$afdp + cdq + edy = 0 \tag{8-121}$$

أو بالشكل:

$$agdp + cdq + edy = 0 \tag{8-122}$$

المعادلة الأولى تقرب على طول PR بالشكل:

$$a_P f_R (P_R - P_P) + c_P (q_R - q_P) + e_P (y_R - y_P) = 0 \tag{8-123}$$

المعادلة الثانية تقرب على طول QR بالشكل:

$$a_Q g_Q (P_R - P_Q) + c_Q (q_R - q_Q) + e_Q (y_R - y_Q) = 0 \tag{8-124}$$

هاتان المعادلتان تحويان على المجهولين q_R و P_R و يمكننا تحديد u في النقطة R من المعادلة :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = pdx + qdy \tag{8-125}$$

وبالتالي حتى الآن تم حساب: x_R ، y_R و q_R و P_R وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (8-125) كما يلي:

$$\mathrm{u_R - u_P = \tfrac{1}{2}(P_P + P_R)(x_R - x_P) + \tfrac{1}{2}(q_P + q_R)(y_R - y_P)} \tag{8-126}$$

هذا التقريب الأول لـ u_R والذي يحسن باستبدال القيم المحورية للعوامل المتعلقة بوسطي هذه القيم. و المعادلتان:

$$\begin{aligned} y_R - y_P &= f_P (x_R - x_P) \\ y_R - y_Q &= g_Q (x_R - x_Q) \end{aligned} \tag{8-127}$$

تأخذان الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} y_R - y_P &= \tfrac{1}{2}(f_P + f_R)(x_R - x_P) \\ y_R - y_Q &= \tfrac{1}{2}(g_Q + g_R)(x_R - x_Q) \end{aligned} \tag{8-128}$$

وكذلك المعادلتان:

$$\begin{aligned} a_P f_R (P_R - P_P) + c_P (q_R - q_P) + e_P (y_R - y_P) &= 0 \\ a_Q g_Q (P_R - P_Q) + c_Q (q_R - q_Q) + e_Q (y_R - y_Q) &= 0 \end{aligned} \tag{8-129}$$

تأخذان الشكل التالي:

$$\tfrac{1}{2}(a_Q + a_R)\tfrac{1}{2}(g_Q + g_R)(P_R - P_Q) + \tfrac{1}{2}(c_Q + c_R)(q_R - q_Q) + \tfrac{1}{2}(e_Q + e_R)(y_R - y_Q) = 0 \qquad (8\text{-}130)$$

$$\tfrac{1}{2}(a_P + a_R)\tfrac{1}{2}(f_P + f_R)(P_R - P_P) + \tfrac{1}{2}(c_P + c_R)(q_R - q_P) + \tfrac{1}{2}(e_P + e_R)(y_R - y_P) = 0$$

والعلاقة:

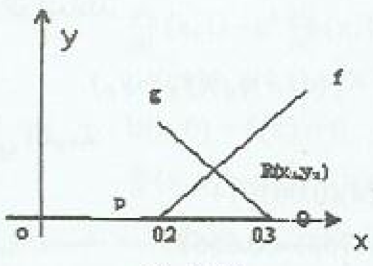
$$u_R - u_P = \tfrac{1}{2}(P_p + P_R)(x_R - x_P) + \tfrac{1}{2}(q_p + q_R)(y_R - y_p) \qquad (8\text{-}131)$$

تعطي قيمة u_R المحسنة، ثم نتابع العمل لنحصل على قيمة محسنة أقرب من الحل الدقيق. يبرهن أنه كلما كانت النقطة P قريبة من النقطة Q يكون عدد مرات التكرار للحصول على الحل الأفضل أقل. بهذه الطريقة يمكننا إذن حساب الحل في نقاط الشبكة R, S وبالعمل نفسه نوجد الحل في النقطة T وهكذا نتابع للحصول على الحل في النقاط الأخرى.

مثال (2): استخدم طريقة المميزات لإيجاد الحل للمعادلة الخطية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

على أول منحن مميز بين النقطة x=0.2 والنقطة x=0.3 وحيث y>0 و u تحقق الشروط: $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x$, $u = 0.2 + 5x^2$، وعلى طول مستقيم البدء y=0 من أجل $0 \le x \le 1$.



الشكل -2-

الحل: إن شرط البدء للمشتق الجزئي $\frac{\partial u}{\partial x} = p$ يساوي 10x وبالتالي ميل المميزات تكون:

$(\frac{dy}{dx})^2 - u^2 = 0$ أي: $(\frac{dy}{dx}) = \pm u$ وبالتالي: f=u=-g

ومنه: $u = 0.2 + 5x^2 = f = -g$ وبما أن $\frac{\partial u}{\partial y} = p$ وحسب شروط البدء p=10x

و $q = 3x = \frac{\partial u}{\partial y}$ كذلك لدينا $a = 1, b = e = 0, c = -u^2$ وحسب الشكل -2-:

$$f_P = 0.4, \quad g_Q = -0.65, \quad P_P = 2.0, \quad P_Q = 3.0$$
$$u_P = 0.4, \quad u_Q = 0.65, \quad q_P = 0.6, \quad q_Q = 0.9,$$
$$c_P = -0.16, \quad c_Q = -0.4225$$

ومن المعادلتين:

$$y_R - y_P = f_P(x_R - x_P)$$
$$y_R - y_Q = g_Q(x_R - x_Q)$$

نكتب:

$$y_R = 0.4(x_R - 0.2)$$
$$y_R = -0.65(x_R - 0.3)$$

ومنه نحصل على التقريب الأول: $x_R = 0.26190, \quad y_R = 0.024762$

كذلك من المعادلتين:

$$a_P f_R(P_R - P_P) + c_P(q_R - q_P) + e_P(y_R - y_P) = 0$$
$$a_Q g_Q(P_R - P_Q) + c_Q(q_R - q_Q) + e_Q(y_R - y_Q) = 0$$

نكتب:

$$0.4(P_R - 2.0) - 0.16(q_R - 0.6) = 0$$
$$-0.65(P_R - 3.0) - 0.4225(q_R - 0.9) = 0$$

حل هاتين المعادلتين هو: $P_R = 2.45524; \quad q_R = 1.73810$

كما أن المعادلة:

$$u_R - u_P = \tfrac{1}{2}(P_P + P_R)(x_R - x_P) + \tfrac{1}{2}(q_P + q_R)(y_R - y_P)$$

تعطي القيمة:

$$u_R = 0.4 + \tfrac{1}{2}(2.0 + 2.45524)(0.0619) +$$
$$\tfrac{1}{2}(1.73810 + 0.6)(0.024762) = 0.55677$$

ومن أجل التقريب الثاني (تحسين الحل) لدينا:

$$f_R = -g_R = u_R = 0.56684; \quad c_R = -u_R^2 = -0.32131$$

ومن المعادلتين:

$$y_R - y_P = \tfrac{1}{2}(f_P + f_R)(x_R - x_P)$$
$$y_R - y_Q = \tfrac{1}{2}(g_Q + g_R)(x_R - x_Q)$$

لدينا:

$$x_R = 0.25578, \quad y_R = 0.02668$$

كذلك من المعادلتين:

$+a_R)\frac{1}{2}(g_Q+g_R)(P_R-P_Q)+\frac{1}{2}(c_Q+c_R)(q_R-q_Q)+$

$\frac{1}{2}(e_Q+e_R)(y_R-y_Q)=0$

$\frac{1}{2}(a_P+a_R)\frac{1}{2}(f_P+f_R)(P_R-P_P)+\frac{1}{2}(c_P+c_R)(q_R-q_P)+$

$\frac{1}{2}(e_P+e_R)(y_R-y_P)=0$

لدينا: $P_R = 2.52876, \quad q_R = 1.67637 \ , \ u_R = 0.55677$

أخيراً المعادلة:

$$u_R - u_P = \frac{1}{2}(P_P + P_R)(x_R - x_P) + \frac{1}{2}(q_P + q_R)(y_R - y_P)$$

تعطي قيمة u_R المحسنة التالية:

$$u_R^{(1)} = 0.5668, \quad u_R^{(2)} = 0.5568, \quad u_R^{(3)} = 0.5567$$

نبين أن الحل باستخدام طريقة الفروق المنتهية من أجل u_R سيكون 0.5567.

(8-23)- طريقة الفروق المنتهية

كما ذكرنا فإن النوع الثالث والشهير من المعادلات التفاضلية الجزئية هو المعادلات الزائدية ومن أهم أنواعها معادلة الأمواج الشهيرة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in]0,1[\ ; \forall t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad \forall x \in]0,1[$$

حيث c ثابت. لتطبيق طريقة الفروق المنتهية نفرض أن $x = i\delta x = ih, \quad t = j\delta t = jk$ عندئذ المعادلة التفاضلية السابقة تأخذ بلالة الفروق المركزية الشكل الآتي:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - c^2 \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0$$

وبأخذ c=1 أي بأخذ المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

تكتب عندئذ المعادلة الفرقية السابقة لهذه المعادلة التفاضلية بالشكل:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})-\frac{1}{k^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})=0$$

أو بالشكل المكافئ التالي:

$$u_{i,j+1}=s^2u_{i-1,j}+2(1-s^2)u_{i,j}+s^2u_{i+1,j}-u_{i,j-1} \quad : \quad s=\frac{c.k}{h}$$

مثال (3): لنأخذ المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0, \quad 0<x<1$$

$$u(x,0)=\sin(\pi x), \quad 0<x<1$$

مع الشروط الحدية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1$$

إن الحل التحليلي لهذه المسألة يعطى بالعلاقة: $u(x,t)=\sin(\pi x)\cos(2\pi t)$

بحل هذه المعادلة بطريقة الفروق المحدودة من أجل $h=0.1,\ k=0.05$ نجد الحل التالي (جدول -1-)حيث $s=1; n=10; c=2$:

جدول -1-

x_i	$u_{i,20}$
0.0	0.0000000000
0.1	0.3090169944
0.2	0.5877852523
0.3	0.8090169944
0.4	0.9510565163
0.5	1.0000000000
0.6	0.9510565163
0.7	0.8090169944
0.8	0.5877852523
0.9	0.3090169944
1.0	0.0000000000

وهي إجابات قريبة جداً من الحل الدقيق (التحليلي).

ملاحظة (1): يمكننا حل المعادلة التفاضلية الزائدية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0$$

بتخفيض مرتبتها بالشكل التالي: نفرض أن $\frac{\partial u}{\partial x}=p$ و $\frac{\partial u}{\partial t}=q$ عندئذ تأخذ المعادلة التفاضلية الشكل التالي: $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial t},\quad \frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial t}$

والذي يكتب بدلالة الفروق المنتهية بالشكل:

$$\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{q_{i,j+1}-q_{i,j}}{\delta t}$$

$$\frac{q_{i+1,j}-q_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{\delta t}$$

وباستخدام طريقة فورييه: ولأن الخطأ الابتدائي في p وq على طول t=0 يعطى بالشكل $Ae^{\beta x\sqrt{-1}}$, $Be^{\beta x\sqrt{-1}}$ على الترتيب، حيث A, B ثوابت و $x = i\delta x$. عندئذ يمكننا أن نفرض أن الخطأ في حساب القيم المحسوبة لـ $p_{i,j}$ و $q_{i,j}$ سوف يساوي على الترتيب $Ae^{\beta x\sqrt{-1}}\xi^j$, $Be^{\beta x\sqrt{-1}}\xi^j$. وبتعويض هذه الأخطاء في العلاقات:

$$\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{q_{i,j+1}-q_{i,j}}{\delta t};\quad \frac{q_{i+1,j}-q_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{\delta t}$$

لأن الخطأ في p وq يحقق نفس المعادلات الفرقية لـ p وq ، وهذا يقود لـ:

$$\rho A(e^{\beta\delta x\sqrt{-1}}-e^{-\beta\delta x\sqrt{-1}})=2B(\xi-1)$$

$$\rho B(e^{\beta\delta x\sqrt{-1}}-e^{-\beta\delta x\sqrt{-1}})=2A(\xi-1)$$

حيث: $\rho = \delta t/\delta x$. وبحذف A/B نجد:

$$(\xi-1)^2=-\rho^2\sin^2\beta\delta x.$$

وبالتالي:

$$\xi=1\pm(\sqrt{-1})\rho\sin\beta\delta x.$$

ومن أجل ρ حقيقي:

$$|\xi|=(1+\rho^2\sin^2\beta\delta x)^{\frac{1}{2}}>1$$

وبما أنه من أجل الاستقرار لدينا $|\xi|\le 1$ فإن العلاقة الأخيرة غير مستقرة من أجل جميع قيم ρ الحقيقية. إن تحليلاً مشابهاً لما سبق يبين أن العلاقات التالية:

$$\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{q_{i,j+1}-q_{i,j-1}}{2\delta t}$$

$$\frac{q_{i+1,j}-q_{i-1,j}}{2\delta x}=\frac{p_{i,j+1}-p_{i,j-1}}{2\delta t}$$

التي تستخدم الفروق المركزية المنتهية تكون مستقرة من أجل $\rho\le 1$

هذه العلاقة تمكننا من حساب $p_{i,j+1}$ و $q_{i,j+1}$ بشكل صريح من سطرين لاحقين للشبكة بعد السطر الأول والذي يكون قد حسب بطريقة أخرى.

مثال (4): لتكن المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ والشروط الحدية:

$u=0 \quad \text{when } x=0 \text{ and } 1, t\geq 0$ والشروط الابتدائية:

$$u=\frac{1}{8}\sin\pi x,\ \frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{when } t=0 \text{ and } 0\leq x\leq 1$$

استخدم علاقة الفروق المنتهية التالية:

$$u_{i,j+1}=s^2 u_{i-1,j}+(1-s^2)u_{i,j}+s^2 u_{i+1,j}-u_{i,j-1} \quad : \quad s=\frac{k}{h}$$

وتقريب الفروق المركزية لشرط المشتق لحساب الحل من أجل x=0(0.1)1 و t=0(0.1)0.5. ثم قارن الحل التحليلي $u=\frac{1}{8}\sin\pi x\cos\pi t$ مع الحل العددي في عدة نقاط.

الحل: لدينا (s=1) ومنه علاقة الفروق تأخذ الشكل:

$$u_{i,j+1}=u_{i-1,j}+u_{i+1,j}-u_{i,j-1} : j\geq 1$$

الشرط الحدي: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{i,1}-u_{i,-1}}{2\delta t}=0,\ j=0$ يعطي: $u_{i,1}=\frac{1}{2}(u_{i-1,0}+u_{i+1,0})$

إن المسألة تناظرية عند $x=0.5$. إن القيم التحليلية التالية لـ u تطابق القيم العددية من أجل دقة 4 أرقام بعد الفاصلة (جدول -2-):

(جدول -2-)

t	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
t=0.01	0	0.0367	0.0699	0.0962	0.1131	0.1189
0.2	0	0.0312	0.0594	0.0818	0.0962	0.1011
0.3	0	0.0227	0.0432	0.0594	0.0699	0.0735
0.4	0	0.0119	0.0227	0.0312	0.0368	0.0386
0.5	0	0	0	0	0	0

مثال (5): العلاقات المقابلة للمعادلة التفاضلية $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ هي:

$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial q}{\partial x},\quad \frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial x}$ ، يمكن كتابة العلاقتين الأخيرتين بعلاقات الفروق التالية، بين أن شرط استقرار كلاهما هو $\delta t/\delta x\leq 1$.

$$a)\quad \frac{1}{2\delta x}(p_{i+1,j}-p_{i-1,j})=\frac{1}{\delta t}\{q_{i,j+1}-\frac{1}{2}(q_{i+1,j}+q_{i-1,j})\}$$

$$\frac{1}{2\delta x}(q_{i+1,j}-q_{i-1,j})=\frac{1}{\delta t}\{p_{i,j+1}-\frac{1}{2}(p_{i+1,j}+p_{i-1,j})\}$$

و كذلك:

$$\text{b)}\quad \frac{1}{\delta x}(p_{i+\frac{1}{2},j}-p_{i-\frac{1}{2},j})=\frac{1}{\delta t}(q_{i,j+1}-q_{i,j})$$

$$\frac{1}{\delta x}(q_{i,j+1}-q_{i-1,j+1})=\frac{1}{\delta t}(p_{i-\frac{1}{2},j+1}-p_{i-\frac{1}{2},j})$$

الحل: نعـوض $p_{i,j}=Ae^{\beta i\delta x\sqrt{-1}}\xi^j$, $q_{i,j}=Be^{\beta i\delta x\sqrt{-1}}\xi^j$ في المعـادلات ونحـذف A/B فنجد: $\xi=\cos\beta\delta x\pm(\rho\sin\beta\delta x)\sqrt{-1};\ \rho=\delta t/\delta x$ ومنه:

$$|\xi|^2=(\cos^2\beta\delta x+\rho^2\sin^2\beta\delta x)<1 \text{ for}: \rho\leq 1.$$

ونفس الشيء بالنسبة للمعادلة الثانية (b).

مثال (6): لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

سنبين من خلال هذا المثال أنه عندما يكون المنحني المميز الابتـدائي هـو نفسه منحني مميز عندها لا يكون للمعادلة التفاضلية حل إلا إذا حققت شـروط البـدء علاقـة تفاضلية ضرورية من أجل هذا المنحني المميز. وعندها يكـون الحـل وحيـداً علـى طـول المنحني الابتدائي ولا يوجد حلول من أجل النقاط خـارج المـنحني. بمعنـى أنـه لا يمكننـا استخدام طريقة المميزات تلك للحل خارج نقاط المنحني الابتدائي. في هذا المثل المعادلة المميزة تكتب بالشكل:

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

$$(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

وبالتالي فالمنحنيات المميزة هي المستقيمان : Y+3x=c & y-2x=c

(c ثابت) وبفرض أن المنحني الابتدائي هو : y-2x=0 عندئذ العلاقة التفاضـلية علـى طول هذا المستقيم: $a.\frac{dy}{dx}dp+cdq+edy=0$ تكتب بالـشكل: $2dp-6dq=0$ وبعـد المكاملة نجد: p-3q=c وهي تحقق شروط البدء : u=2, p=-2, q=1 و يمكننا اسـتنتاج أن أحد الحلول الذي يحقق هذه الشروط يعطى بالشكل :

$u=2+(y-2x)+A(y-2x)^2)A$ ثابت ما).

وهذا الحل وحيد على طول المستقيم y-2x=0 لكنه ليس حلاً في نقاط المستوي xoy .

(8-24)- المعادلات شبه الخطية

لنأخذ المعادلة ذات الشكل:

$$a.\frac{du}{dx}+b\frac{du}{dy}+c=0 \qquad (8\text{-}132)$$

وبفرض أن C منحن في المستوي xoy حيث يكون تفاضل التابع u باتجاهات مماسه للمنحني C مستقلة عن المشتقات الجزئية في الاتجاهات الأخرى. بمعنى أن قيم التابع u على المنحني C تحقق المعادلة التفاضلية، وبالتالي لدينا:

$$ap+bq+c=0 \quad و \quad du=pdx+qdy$$

من هاتين المعادلتين لدينا:

$$q(bdx-ady)+adu+cdx=0$$

نختار اتجاه المنحني C بحيث تتحقق في نقاطه العلاقة التالية: $bdx-ady=0$

وبالتالي: $adu+cdx=0$ ومنه نجد: $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{du}{c}$ وبالمكاملة على طول المنحني المميز نجد:

$$u=-\int\frac{c}{a}dx$$

مثال (7): بين أن حل المعادلة التفاضلية $\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dy}=x+y$ في النقطة (2.1) هو $u=-1\frac{1}{3}$ أعطي من أجل u=0 على المحور oy وذلك باستخدام التكامل التحليلي.

الحل: على طول المنحني المميز وفي النقطة (2.1) هو $y=x^2-3$ وعلى طول هذا المنحني المميز لدينا:

$$u=\int(x+y)dx=\int(x+x^2-3)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-3x$$

وفي النقطة (2.1) لدينا: $u=-1\frac{1}{3}$

(8-25)- معادلة النقل(الانتشار)

هذه المسألة تصف نقل كمية ما في مجرى (مثل نقل-انتشار- التلوث في الماء)، تعطى بالمعادلة الزائدية بالشكل، (سيتم معالجة المسألة بشكل مفصل عددياً في الفصل السابع، وسنكتفي في هذا الفصل بدراسة المنحنيات المميزة مع الإشارة إلى الحل العددي بشكل سريع):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+C(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=f(x,t) \qquad (8\text{-}133)$$

8-25-1- **تعريف -2- المميزات:** ثم خاصة هامة لمعادلة النقل (نجدها أيضاً في معادلة الأمواج) هي أن الحل لهذه المعادلة ينتشر بشكل خطي مع السرعة c. نسمي هذا المنحني بالمنحني المميز.

لنأخذ في المعادلة (1) تغيير المتحولات التالية:

$$X = \alpha x + \beta y, \quad T = \gamma x + \mu t, \quad u(x,t) = U(X,T)$$

ولنأخذ للسهولة: $f(x,t) = 0$

وبملاحظة أن:

$$u(x,t) = U(X,T) \Rightarrow$$

$$du = \frac{\partial U}{\partial X} dX + \frac{\partial U}{\partial T} dT \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial U}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial U}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha\dfrac{\partial U}{\partial X} + \gamma\dfrac{\partial U}{\partial T} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \beta\dfrac{\partial U}{\partial X} + \mu\dfrac{\partial U}{\partial T} \end{cases}$$

عندئذ المعادلة التفاضلية تأخذ الشكل: $(\beta = ca)\dfrac{\partial U}{\partial X} + (\mu + c\gamma)\dfrac{\partial U}{\partial T} = 0$

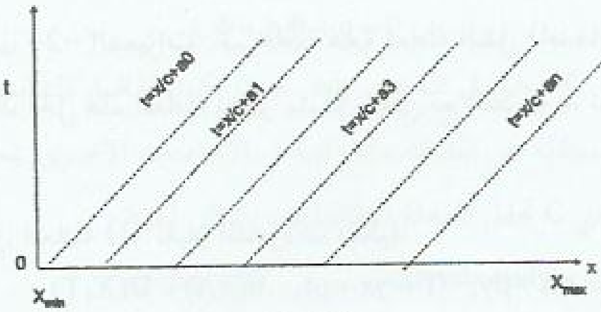
وبأخذ $\beta = -c\alpha$ عندئذ تأخذ المعادلة الشكل الآتي: $\dfrac{\partial U}{\partial T} = 0$

وبالتالي: $u(x,t) = U(X) = u(\alpha x - c\alpha t) = u(x - ct)$

بمعنى أن u يبقى ثابتاً على طول المستقيمات:

$x\text{-}ct=cste$ أو : $t=x/c+cste$

هذه المستقيمات (ذات الميل 1/c) هي المنحنيات المميزة لمعادلة النقل. الحل u(x,0) ينتشر على طول المستقيمات. الشكل التالي يبين هذه المستقيمات، الشكل -3- :



الشكل -3-

طرق عددية متقدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية

كما هو معلوم فإن الطرق العددية تدخل في الحالات الصعبة والمعقدة بشكل عام، أي عندما لا كون هناك حل تحليلي، وهكذا بالنسبة للمعادلات التفاضلية فهناك عدد منها لا يمكن حله بالطرق التقليدية المعروفة ولذلك نلجأ عادة إلى الطرق العددية لحلها. سنهتم في هذا الفصل بحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الشروط الحدية وبطرق مختلفة عما قدمناه في الفصول السابقة أي بالفروق المنتهية وسنستخدم تقنية إدخال الفضاءات التابعية في الحل.

وسنستعرض أيضاً في دراستنا بعض مفاهيم التحليل التابعي مثل مفهوم التوزيعات (Distributions) وفضاءات سوبولوف (Sobolev Spaces) و فضاء الحل سيكون من هذه الفضاءات لمسائل القيم الحدية، و ندرس مسائل القيم الحدية بشكلها الضعيف (المتحولي)- Variational Formulation - والقوي كما نبحث في نظرية وجود ووحدانية الحل الشهيرة جداً (نظرية لاكس-ميليغرام)- Lax Milgram theorem-، حيث أن الاتجاه الحديث في دراسة حل مسائل القيم الحدية تسير وفق الشكل الذي نقدمه فيما يلي.

(8-26)- التوزيعات وفضاءات سوبولوف:

تعريف-1- الفضاء $L^1(A)$:

هو مجموعة التوابع القابلة للجمع -المكاملة وفق مفهوم لوبيغ-وهي تشكل فضاءً شعاعياً مع عملية جمع التوابع وضربها بعدد حيث أن عملية تركيب التوابع

القابلة للجمع مغلقة ويكون شكل التكامل في هذا الفضاء تابعياً خطياً، A مجموعة مفتوحة غير خالية من R^n.

تعريف-2- الفضاء $L^1_{loc}(\Omega)$:

نقول: التابع المعرف تقريباً في كل مكان من Ω قابل للمكاملة موضعياً على المجموعة Ω إذا كان هذا التابع ينتمي إلى $L^1(A)$ من أجل كل مجموعة A قابلة للقياس و $A \subset\subset \Omega$ (حيث أن الرمز $\subset\subset$ يدل على أن $\overline{A} \subset \Omega$ و $\overline{A}$ متراص-أي A محتواة بتراص في Ω - ، Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من R^n. نرمز لمجموعة هذه التوابع القابلة للتكامل موضعياً بالرمز $L^1_{loc}(\Omega)$.

تعريف-3-الفضاء $L^P(\Omega)$:

يعرف الفضاء $L^P(\Omega)$ من أجل Ω مجموعة مفتوحة في R^n بأنه الفضاء المكون من التوابع القابلة للتكامل من المرتبة P وفق مفهوم لوبيغ، أي التوابع المحققة للخاصة: $\int_\Omega |f(x)|^P dx < M < +\infty$ ويعرف النظيم في هذا الفضاء بالشكل: $\|f\|_{L^P(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^P dx)^{\frac{1}{P}}$ ويبرهن أن هذا الفضاء هو فضاء باناخ (تام).

تعريف-4- الفضاء $L^2(\Omega)$:

يمكن تعريف هذا الفضاء مباشرة أو اعتباره حالة خاصة من أجل P=2 وبالتالي نجد أن هذا الفضاء هو فضاء هلبرت ويعرف الجداء الداخلي فيه بأحد الأشكال (حسب الحالة المذكورة):

1- $(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx$ عندما تكون التوابع مركبة

2- $(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ عندما تكون التوابع حقيقية

والنظيم في هذا الفضاء يكون: $\|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

تعريف-5- دعامة تابع –Support of function–

إذا كان f تابعاً حقيقياً ما مستمراً على المجموعة المفتوحة R^n فتسمي لصاقة المجموعة التالية: $\{x / f(x) \neq 0\}$ بدعامة التابع f ونرمز للدعامة بالرمز(Supp(f) ، إذن لدينا:

$$Supp(f) = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}}.$$

تعريف-6- الفضاء $D(\Omega)$ **(أو** $C_0^\infty(\Omega)$**):**

لتكن Ω مجموعة مفتوحة غير خالية من R^n، الفضاء $D(\Omega)$ (أو $C_0^\infty(\Omega)$) هو الفضاء المكون من التوابع القابلة للمفاضلة عدد غير منته من المرات والتي لها دعامة متراصة في Ω.

(8-27)- التوابع النظامية:

لتكن $\{f_\varepsilon\}$ أسرة من التوابع التي تنتمي للفضاء $D(R^n)$، نقول إن هذه الأسرة من التوابع نظامية إذا حققت الشروط الآتية:

1- $f_\varepsilon(x) \geq 0$

2- $\int_{R^n} f_\varepsilon(x)dx = 1$

3- $Suppf_\varepsilon(x) \subset B(0,\varepsilon)$ حيث: $B(0,\varepsilon) = \{x \in R_n \setminus |x| \leq \varepsilon\}$.

نظرية(1) : الفضاء $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ كثيف في الفضاء $L^p(\Omega)$ إذا كان $1 \leq P < \infty$

أي: $\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega)$.

(8-28)- التقارب في الفضاء $D(\Omega)$:

لتكن متتالية التوابع $\{\varphi_i\}$ ، $\varphi_i \in D(\Omega)$، نقول أن هذه المتتالية تتقارب من التابع $\varphi \in D(\Omega)$، عندما $i \to \infty$، إذا تحقق الشرطان التاليان:

1- لأي عدد i توجد مجموعة متراصة تحوي جميع دعامات φ_i.

2- متتالية المشتقات $\{\varphi_i^{(n)}\}$ تتقارب بانتظام إلى $\varphi^{(n)}$ عندما $i \to \infty$ من أجل كل $n \in N$.

(8-29)- التوزيعات:

لتكن Ω مجموعة مفتوحة من R^n، نسمي توزيعاً على Ω، كل تابع خطي f مستمر ومعرف على الفضاء $D(\Omega)$. أي إذا وجد تطبيق $f: D(\Omega) \to R$ بحيث يكون f خطي.

تعريف-7- **فضاء الثنوية** $D'(\Omega)$: Dual space

إن مجموعة التوزيعات تشكل فضاء، يسمى فضاء الثنوية والذي نرمز له بالرمز $D'(\Omega)$.

خواص:

1- الفضاء $D'(\Omega)$ هو فضاء شعاعي.

2- $D(\Omega) \subset D'(\Omega)$ بشكل كثيف

مثال (1): لنأخذ التابع الشهير، تابع هيفسيد (Heavside) المعرف كما يلي :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & if \quad : x > 0 \\ 0.5 & if \quad : x = 0 \\ 0 & if \quad : x < 0 \end{cases}$$

عندئذ من أجل أي تابع $\varphi(x) \in D(\Omega)$ يكون التابعي التالي، توزيعاً (خطياً ومستمراً):

$$\langle H(x), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)dx$$

مثال (2): (توزيع ديراك Dirac -δ-)

من أجل كل $a \in R^n$ الشكل التالي: $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ هو تابعي خطي ومستمر وبالتالي هو توزيع، يعرف بتوزيع ديراك ويرمز له بالرمز δ_a.

تعريف-8-:

نقول عن متتالية من التوزيعات $\{T_i\}_{i \in N}$ المعرفة على مجموعة مفتوحة Ω أنها متقاربة من التوزيع T عندما $j \to \infty$

إذا لكل $\varphi \in D(\Omega)$: $T_i(\varphi) \xrightarrow[j\to\infty]{} T(\varphi)$.

حالة خاصة : إذا كانت متتالية التوزيعات T_i موافقة لمتتالية توابع f_i قابلة للتكامل موضعياً على Ω ومتقاربة من التابع f فعندئذ يمكن البرهان على أنه من أجل كل مجموعة متراصة $K \subset \Omega$ تتقارب المتتالية $\{f_i\}$ من التابع f في فضاء التوزيعات $D'(\Omega)$.

تعريف -9-:

نقول التوزيع T ينعدم في مجموعة مفتوحة Ω من R^n إذا كان $T(\varphi)=0$ من أجل جميع التوابع $\varphi \in D(\Omega)$ التي دعامتها من Ω.

تعريف -10-:

نسمي متمم أكبر مجموعة مفتوحة في Ω ينعدم فيها التوزيع T بدعامة التوزيع T ونرمز له بالرمز Supp(T). أي أن دعامة التوزيع هي أصغر مجموعة مغلقة ينعدم خارجها التوزيع.

8-29-1- مفهوم الاشتقاق في فضاء التوزيعات

سنعتمد في دراسة حلول المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الشروط الحدية على مفهوم الاشتقاق في فضاء التوزيعات والذي يعد تعميماً لمفهوم المشتقات العادية.

تعريف-11-:

ليكن: $x=(x_1,x_2,....,x_n)\in R^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)$ $(n\leq 3)$

و α_i أعداد صحيحة موجبة ولنضع:

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n,\quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!....\alpha_n!,$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n},\quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} = (\tfrac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}...(\tfrac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$$

عند هذه الفرضيات نعرف مشتق التوزيع T بالشكل التالي:

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi),\quad \forall\varphi\in D(\Omega)$$

مثال (3) : لنأخذ تابع هيفسيد المعرف بالشكل:

$$H(x)=\begin{cases}1 & if \quad : x>0 \\ 0 & if \quad : x<0\end{cases}$$

هذا التابع منقطع في النقطة x=0 وبالتالي غير قابل للاشتقاق بمفهوم الاشتقاق التقليدي ولكن حسب مفهوم الاشتقاق في التوزيعات لدينا:

$$H(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx$$

و : $H'(\varphi)=-H(\varphi')=-\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)dx=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)dx=-[\varphi(x)]_{0}^{\infty}=\varphi(0)=\delta(\varphi)$

إذن مشتقه هو تابع ديراك، وبعامة يمكـن الحـصول علـى المـشتقات المتتاليـة مـن العلاقة التالية: $\delta^{(m)}(\varphi)=(-1)^{m}\varphi^{m}(0)$

(8-30)- فضاءات سوبولوف

تؤثر فضاءات سوبولوف تأثيراً كبيراً في حل مسائل المعادلات التفاضلية الجزئيـة ذات الشروط الحدية من خلال استخدامها في الـشكل المتحـولي Variational Form الذي يعد الأداة الرئيسية لطريقة كالركين والتي تعد أساساً لطريقـة العناصـر المنتهيـة حيث إن العلاقة المتحولية وبتطبيق علاقة غرين واختيار فضاء سوبولوف (فضاء الحـل) المناسب والاستفادة من الشروط الحدية تخفض مرتبة المشتقات في العلاقة المتحولية (أو الضعية) والحصول على حلول تقريبية تعرف بالحلول الضعيفة للمسألة المطروحة.

تعريف-12- الفضاء $H^1(\Omega)$ (فضاء سوبولوف من المرتبة الأولى)

لـتكن لـدينا المجموعـة المفتوحـة $\Omega\subset R^n$، في العملـي $n\leq 3$، نعـرف فـضاء سوبولوف $H^1(\Omega)$ من المرتبة الأولى بأنه فضاء التوزيعات التي تنتمي هي ومـشتقاتها الجزئية الأولى إلى الفضاء $L^2(\Omega)$، أي أن:

$$H^{1}(\Omega)=\{u \setminus u\in L^{2}(\Omega)\setminus \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\in L^{2}(\Omega); i=1,2,...,n\}$$

إن الفضاء $H^1(\Omega)$ هو فضاء هلبرت بالنسبة للجداء الداخلي التالي:

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)}=\int_{\Omega} u\bar{v}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\tfrac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx=\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}(\tfrac{\partial u}{\partial x_i},\tfrac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}$$

والنظيم: $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

1-5-7-حالة خاصة –الفضاء $H_0^1(\Omega)$

هو الفضاء الجزئي المكون من عناصر الفضاء $H^1(\Omega)$ التي تنعدم على الحدود $\partial\Omega$. وهو فضاء هلبرت بالنسبة للجداء الداخلي المعرف على $H^1(\Omega)$ أو الجداء الداخلي التالي المعرف على $H_0^1(\Omega)$:

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega gradu.gradv.dx$$

والنظيم: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int_\Omega |gradu|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

أي أن: $H_0^1(\Omega) = \{u; u \in H^1(\Omega) : \gamma_0 u = 0\}$ مع : $\gamma_0 u = u/_{\partial\Omega} = 0$ هو أثر u (trace) على الحدود $\partial\Omega$.

ملاحظة (1) : في الحالة العامة توابع سوبولوف من الفضاء $H^1(\Omega)$ ليست مستمرة، وبالتالي لا يمكن تعريفها على حدود المجموعة ، أي على الحدود $\partial\Omega$ بالمفهوم التقليدي لقيمة التابع في نقطة وللتغلب على هذه المشكلة يتم استخدام مفهوم الأثر السابق.

تعريف–13– الفضاء $H^m(\Omega)$ (فضاء سوبولوف من المرتبة m)

ليكن m عدداً صحيحاً موجباً، نعرف فضاء سوبولوف $H^m(\Omega)$ من المرتبة m بالشكل التالي:

$$H^m(\Omega) = \{u \setminus u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega); \quad \forall \alpha; \quad |\alpha| \le m\}$$

حيث D^α هو المشتق بمعنى التوزيعات من المرتبة m. هذه الفضاءات أيضاً هي فضاءات هلبرت مع الجداء الداخلي: $\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$

والنظيم في هذا الفضاء: $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$

تعريف-14- فضاءات سوبولوف $W^{m,p}(\Omega)$

لتكن الأعداد p, m حيث $1 \leq p, m \in N$ عندئذ نعرف الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ بالشكل: $W^{m,p}(\Omega) = \{u \setminus u \in L^p(\Omega) \setminus D^\alpha u \in L^p(\Omega); \quad \forall \alpha; \quad |\alpha| \leq m\}$

هذا الفضاء هو فضاء باناخ يعرف فيه النظيم بأحد الشكلين التاليين:

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} \quad \text{أو} \quad \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

حالة خاصة: عندما p=2 نجد أن $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

ملاحظة-2-: بما أن كل تابع $\varphi \in D(\Omega)$ فإن مشتقاته من جميع المراتب تنتمي أيضاً إلى $D(\Omega)$. وكذلك $D(\Omega)$ كثيف في الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$.

نتائج:

1- من أجل m<n>0 لدينا: $H^n(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

2- من أجل m<n>0 لدينا: $\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{H^n(\Omega)}$

3- $D(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^{m-1}(\Omega) \subset H^{m-2}(\Omega) \subset ....H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$

(8-31)- مسائل القيم الحدية:

تتكون مسألة القيم الحدية من معادلة تفاضلية جزئية (أو أكثر) في منطقة ما Ω من R^n، في الحالات العملية $n \leq 3$، مع شروط حدية على حدود المنطقة $\Gamma = \partial\Omega$.

8-31-1-الطريقة المتحولية -الحل الضعيف-

إن مسألة القيم الحدية بشكلها المعطى تسمى الشكل القوي وله الشكل العام التالي:

$$AU = f \qquad in \quad \Omega$$
$$B_i U = g_i \qquad on \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

حيث أن: A مؤثر تفاضلي من المرتبة 2m . و B_i مجموعة m مؤثر تفاضلي. إن حل مسألة القيم الحدية يكمن في معرفة أي فضاء يجب أخذه لإختيار f, g_i بحيث يكون لمسألة القيم الحدية حل وحيد. هناك العديد من النظريات التي يجب تطبيقها لضمان

وجود ووحدانية الحل مثل نظرية ميليغرام الشهيرة. لحل المسألة يجب تحويلها إلى مسألة متحولية (أو ضعيفة) تعتمد عليها طريقة كالركين وطريقة العناصر المنتهية وحلول هذه المسألة المتحولية تسمى حلولاً ضعيفة.

2-31-8- الشكل المتحولي و الحل الضعيف

إن مسألة الشكل المتحولي تتلخص بإيجاد تابع $u \in H$ بحيث أن:

$$a(u,v) = L(v); \quad \forall v \in H$$

حيث أن $a(u,v)$ شكل ثنائي الخطية في الفضاء H×H و $L(v)$ شكل خطي على الفضاء H بمعنى أن L من فضاء الثنوية لـ H, $L \in H'$.

تعريف-15-:

إذا كانت $\Omega \subset R^N$ مجموعة مفتوحة، سنرمز بـ $C^k(\Omega)$ (التوابع من الصف $C^k(\Omega)$) لفضاء التوابع القابلة للاشتقاق والمستمرة k مرة فوق المجموعة المفتوحة Ω) k عدد صحيح).

تعريف-16-:

نرمز بـ $C_c(\Omega)$ للتوابع المستمرة وذات دعامة متراصة في المجموعة المفتوحة Ω. ولدينا أيضاً:

1- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$

2- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

3- $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

ملاحظة-3-: (بعض المؤلفين يستخدمون الرمز $D(\Omega)$ أو $C_0^\infty(\Omega)$ بدلاً من $C_c^\infty(\Omega)$)

ملاحظة-4-: إن المعادلة التفاضلية الجزئية المحققة في Ω للشكل المتحولي تكون محققة لأن الحل u توزيعي وينتمي لأحد فضاءات سوبولوف ولكن على الحدود $\Gamma = \partial\Omega$ يجب أن يكون الحل معرفاً على الحدود و يجب أن ندخل مفهوم الأثر (trace) بصفته تعميماً لمفهوم القيم الحدية على التوابع المستمرة ولكن بما أن التوزيعات التي تنتمي

لفضاء الحل -فضاء سوبولوف- غير مستمرة فإن هذا يوجب تمديدها. إن هذا يساعد في الحصول على العلاقة الشهيرة -علاقة غرين- التي تستخدم في إيجاد الشكل المتحولي (الضعيف) لمسألة الشروط الحدية.

8-31-3-علاقة غرين:

سنعطي للسهولة هذه العلاقة مباشرة نظراً لأهمية استخدامها في تبسيط شكل المعادلة التفاضلية دون اللجوء إلى القسم النظري الذي بنيت في الأساس عليه هذه العلاقة من خلال ما يعرف بنظرية الأثر.

لتكن $\Omega \subset R^n$ مجموعة مفتوحة ومحدودة وليكن : $u, v \in H^1(\Omega)$ عندئذ من أجل $1 \leq i \leq n$ لدينا:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma=\partial\Omega} u v \upsilon_i d\Gamma$$

أو :

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma=\partial\Omega} u v \upsilon_i d\Gamma$$

حيث أن: $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_i, ..., \upsilon_n)$) شعاع واحدة الناظم الخارجي على Γ

يمكن الحصول من هذه العلاقة على الحالة الخاصة من أجل u=1 و $v = v_i \in H^1(\Omega)$

فنجد:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma=\partial\Omega} v \upsilon_i d\Gamma$$

(هذه العلاقة في R^1 هي علاقة التكامل بالتجزئة $\int_a^b v' dx = v(b) - v(a)$)

وبشكل مشابه يمكننا الحصول على العلاقة: $\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma=\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \upsilon_i d\Gamma$

(بالتعريف المشتق الناظمي يعرف بالشكل: $\frac{\partial u}{\partial \upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \upsilon_i$ أو العلاقة المكافئة: $\frac{\partial u}{\partial \upsilon} = \nabla u . \vec{\upsilon}$).

8-31-4-نظرية لاكس- ميلغرام (وجود ووحدانية الحل)

كما ذكر فإن الشكل المتحولي (الضعيف) الذي نحصل عليه للمعادلة التفاضلية باستخدام علاقات غرين وفضاءات سوبولوف لا يضمن وجود ووحدانية الحل، إن نظرية لاكس- ميلغرام تضمن ذلك.

ليكن V فضاء هلبرت و $a(.,.)$ شكل ثنائي الخطية على $V \times V$ و $L(.)$ شكل خطي فوق V وإذا تحققت الشروط التالية:

1- الشكل $a(.,.)$ مستمر: $|a(u,v)| \le M\|u\|_V \|v\|; \quad \forall u,v \in V$

2- الشكل $a(.,.)$ قسري، أي يوجد عدد $\alpha > 0$ بحيث أن:

$$|a(u,v)| \ge \alpha\|u\|_V^2 \quad \forall u,v \in V$$

3- الشكل الخطي $L(.)$ محدود في الفضاء V ، عندئذ المسألة التالية :

$$(P) \qquad \begin{cases} u \in V \\ a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases}$$

تملك حلاً وحيداً.

نتيجة(1) : إذا كان الشكل $a(.,.)$ تناظرياً، أي $a(u,v) = a(v,u), \forall u,v \in V$ فإن المسألة (P) تكافئ المسألة (P') التالية:

$$(P') \qquad \begin{cases} u \in V \\ J(u) = \min\{J(v), v \in V\}, \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \end{cases}$$

بمعنى أن التابعي $J : V \to R$ المعرف بالعلاقة $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$ يبلغ قيمته الصغرى عند u.

8-32- طريقة كالركين

تعتمد هذه الطريقة بشكل رئيسي على المفاهيم التابعية التي ذكرت في فضاءات سوبولوف والشكل المتحولي (الضعيف) لحل مسائل الشروط الحدية وتعد هذه الطريقة النواة لطريقة العناصر المنتهية. المسألة إذن هي إيجاد تابع $u \in V$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \qquad (8\text{-}134)$$

حيث أن V فضاء سوبولوف القابل للفصل (Separable)، كونه هلبرت، وتوجد قاعدة متعامدة نظامية وقابلة للعد في هذا الفضاء. لنأخذ V_h فضاء جزئي من

الفضاء V ذو m بعد ولتكن $\{\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_m\}$ قاعدة في V_h عندئذ يمكن كتابة أي عنصر $v\in V_h$ وبشكل وحيد بدلالة عناصر القاعدة السابقة بالشكل:

$$v=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\varphi_i,\quad \zeta_i\in R$$

إذا تحققت شروط نظرية لاكس-ميلغرام للمسألة (8-134) عندها يوجد حل وحيد كما ذكرنا $u_h\in V_h$ بحيث يكون لدينا : $a(u_h,v)=L(v),\quad \forall v\in V_h$ أو الشكل المكافئ التالي: $a(u_h,\varphi_j)=L(\varphi_j),\quad j=1,2,....,m$ وبكتابة الحل بشكل تركيب خطي بدلالة عناصر القاعدة $u_h=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\varphi_i,\quad \zeta_i\in R$ وبالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد: $a(\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\varphi_i,\varphi_j)=L(\varphi_j),\quad j=1,2,....,m$ وبما أن الشكل $a(u,v)$ ثنائي الخطية، فنجد العلاقة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$a(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i,\varphi_j)\zeta_i=L(\varphi_j),\quad j=1,2,....,m$$

وهذا الشكل يمثل جملة m معادلة خطية تكتب مصفوفاتياً بالشكل التالي $A.\zeta=B$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & \dots & a(\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & & \vdots\\ a(\varphi_m,\varphi_1) & & a(\varphi_m,\varphi_m)\end{bmatrix},\quad \zeta=\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_m\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}L(\varphi_1)\\ \vdots\\ L(\varphi_m)\end{bmatrix}$$

(8-33)- طريقة العناصر المنتهية

تعتمد طريقة العناصر المنتهية على:

1- وضع الشكل المتحولي أو الضعيف للمسألة وتقطيع ساحة تعريف المسألة إلى عناصر (وفق هندسية شروط محددة) مثلثاتية أو رباعية الشكل.

2- اختيار فضاء الحل المناسب (حسب الشروط الحدية المعطاة)، أي فضاء سوبولوف المناسب للحل.

3- بناء فضاء جزئي منته البعد –يسمى فضاء العنصر المنته– من فضاءات الحلول والتي تكون عناصره كثيرات حدود قطعية (على أجزاء) معرفة على عناصر مثلثية الشكل أو رباعية الشكل واختيار توابع القاعدة.

4- الحصول على جملة المعادلات الجبرية الخطية المناسبة وحلها على الحاسب الآلي.

(8-34)- طريقة رايليه–ريتز (Rayleigh-Ritz)

8-34-1-حل مسألة ديريخليه (Dirichlet) الحدية (ببعد واحد)

تعتبر مسائل المعادلات التفاضلية الحدية من المسائل الهامة في العلوم الفيزيائية والهندسية . ويتم كما هو معلوم حل هذا النوع من المسائل بالطرق العددية التقريبية، وقد تم في هذا العمل معالجة مسألة ديريخليه الشهيرة، ونحن في هذا الفصل سنعرض حل هذه المسألة أولا بطريقة (Rayleigh-Ritz) ثم نحل هذه المسألة بطريقة الفروق المنتهية ومن ثم نأخذ مثالا عدديا (معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بشروط حدية) ونعالج نفس المثال بطريقة الفروق المنتهية (مستخدمين طريقة غوص– سايدل لحل جملة المعادلات الخطية التي نحصل عليها) ونقارن بين النتيجتين.

لتكن مسألة ديريخليه Dirichlet)) التالية:

$$-\frac{d}{dx}(p(x).\frac{dy}{dx}) + q(x)\ y = f(x) \qquad for \quad 0 \le x \le 1 \qquad (8\text{-}135)$$

مع الشروط الحدية: $y(0)=y(1)=0$

هذه المعادلة التفاضلية تصف هندسيا أو فيزيائيا ما يسمى بالسهم (او الانحراف $y(x)$ لجائز طوله 1 مشدود حسب محوره بقوة $p(x)$ وخاضع لحمل عرضاني (مقطعي) $f(x)dx$ بوحدة الطول dx ومحمول من طرفيه 0 و 1 ويعبر السهم عندئذ المقطع في نقطه فاصلتها x وهو عبارة عن الحل لمسألة النهايات من الشكل (8-135) حيث: $q(x) \;=\; \frac{P}{E.I(x)}$ حيث E هو معامل يونغ Young Modul للمادة المكونة للجائز و $I(x)$ العزم الأساسي الداخلي لمقطع الجائز في النقطة x . سنفرض أن: $p(x)\in C^1[0,1]$ و $q(x), f(x)\in C[0,1]$،كما سنفرض أنه يوجد ثابت $\delta>0$ بحيث أن

$$p(x) \geq \delta > 0 \quad for \quad 0 \leq \ x \ \leq 1 \qquad (8\text{-}136)$$

$$q(x) \geq 0 \quad for \quad 0 \leq \ x \ \leq 1$$

هذه الفرضيات ستكون كافية لضمان وحدانية الحل للمسألة (135-8) .

نظرية (2): ليكن التابع $p(x) \in C^1[0,1]$ و $q(x), f(x) \in C[0,1]$

و $p(x) \geq \delta > 0 \quad for \quad 0 \leq \ x \ \leq 1$ و

$$q(x) \geq 0 \quad for \quad 0 \leq \ x \ \leq 1$$

عندئذ التابع $y \in C_0^2[0,1]$ هو حل وحيد للمعادلة التفاضلية (135-8) إذا وفقط إذا كان $y(x)$ التابع الوحيد في $C_0^2[0,1]$ الذي يجعل التكامل التالي أصغريا:

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x).[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\}dx \qquad (8-137)$$

(يمكن العودة إلى المراجع لبرهان هذه النظرية).

2-34-8-حل مسألة ديريخليه (Dirichlet) الحدية (ببعد واحد) بطريقة (-Rayleigh Ritz)

سنعطي آلية الحل للمسألة (135-8) بطريقة رايليه-ريتز التقريبية للحل $y(x)$ ليس فقط على التوابع في الفضاء $C_0^2[0,1]$ ولكن على مجموعات من التوابع الصغيرة مكونة من تركيبات خطية لتوابع قاعدة: $\phi_1 \ ,\phi_2 ,......\phi_n$ مستقلة ومحققة للشروط:

$$\phi_i\,(0) = \phi_i\,(1) = 0 \quad : \quad i = 1,2,.......,n$$

والتقريبات: $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \phi_i\,(x)$ ، أن حل المعادلة (135-8) يعتمد على إيجاد الثوابت، $C_1 \ , C_2 \ .... C_n$ التي تجعل التكامل التالي أصغريا:

$$\begin{aligned} I[\phi] &= I[\sum_{i=1}^{n} C_i \ \phi_i \ ] \\ &= \int_0^1 \{p(x)[\sum_{i=1}^{n} C_i \Phi_i']^2 + q(x)[\sum_{i=1}^{n} C_i \ \phi_i \ ]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} C_i \ \phi_i \ \} \, dx \end{aligned} \qquad (8\text{-}138)$$

وللحصول على شروط الأصغرية مع اعتبار I تابع للثوابت: $C_1 \; , C_2 \ldots. C_n$

لدينا: $\frac{\partial I}{\partial C_j} = 0$ ومن هذا الشرط نحصل على مجموعة (nxm) معادلة خطية من الشكل: $A.C = B$ بمتغيرات $C_1 \; , \; C_2 \; \ldots. C_n$ حيث A معرفة بالعلاقة:

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x).\phi_i'(x)\, \phi_j'(x) + q(x)\, \phi_i(x).\, \phi_j(x)\,]dx \tag{8-139}$$

(A مصفوفة ثلاثية القطر معرفة موجبة متناظرة) و B معرفة بالعلاقة

$$b_i = \int_0^1 f(x).\phi_i(x).dx \tag{8-140}$$

وباختيار تجزيء مناسب للمجال [0.1] من النقاط: $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n \, , x_{n+1}$

حيث: $0 = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n < x_{n+1} = 1$

وبأخذ: $h_i = x_{i+1} - x_i$ من أجل كل: i=0, 1, ...,n وتعريف القاعدة المناسبة $\phi_i(x)$ i=1, 2, ...,n : بالشكل:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 \; : 0 \le x \le x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \; : x_{i-1} < x \le x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \; : x_i < x \le x_{i+1} \\ 0 \; : x_{i+1} < x \le 1 \end{cases} \tag{8-141}$$

فإن هذا يعطي التقريب:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \phi_i \, (x) \tag{8-142}$$

بشكل تام بالشكل التالي:

$$a_{i,i} = Q_{4,i} + Q_{4,i+1} + Q_{2,i} + Q_{3,i} \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots.,n$$

$$a_{i,i+1} = -Q_{4,i+1} + Q_{4,i+1} + Q_{1,i} \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots..,n-1$$

$$a_{i,i-1} = -Q_{4,i} + Q_{1,i-1} \quad \text{و} \quad i = 2,3,\ldots..,n$$

$$b_i = Q_{5,i} + Q_{6,i} \quad \text{و} \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{8-143}$$

وحيث أن:

$$Q_{1,i} = \left(\tfrac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)(x-x_i)q(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n-1$$

$$Q_{2,i} = \left(\tfrac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2 q(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n$$

$$Q_{3,i} = \left(\tfrac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2 q(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n$$

$$Q_{4,i} = \left(\tfrac{1}{h_{i-1}}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n+1$$

$$Q_{5,i} = \left(\tfrac{1}{h_{i-1}}\right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})f(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n$$

$$Q_{6,i} = \left(\tfrac{1}{h_i}\right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)f(x)dx \quad for\ each\ i = 1,2,...,n$$

مثال (4):

لنأخذ المعادلة التفاضلية:

$$-y''+\pi^2\ y = 2\pi^2 \sin(\pi.x) \quad : \quad 0 \le x \le 1 \qquad (8-144)$$

والشروط الحدية: $Y(0) = y(1) = 0$

وبأخذ $h_i = h = 0.1$

حيث: $x_i = 0.1\ i\ :\ i=0,1,\ldots,9$

عندئذ بحساب التكاملات السابقة نحصل على مجموعة المعادلات الخطية المعطاة بالعناصر: A.X=B

$$a_{i,i} = 20 + \tfrac{\pi^2}{15} : i=1,2,\ldots,9$$
$$a_{i,i+1} = -10 + \tfrac{\pi^2}{60} : i=1,2,\ldots,8 \qquad (8-145)$$
$$a_{i,i-1} = -10 + \tfrac{\pi^2}{60} : i=2,\ldots,9$$
$$b_i = 40\sin(0.1\pi i)[1-\cos 0.1\pi] : i=1,2,\ldots,9$$

والحل لهذه الجملة الخطية من المعادلات يعطى بالشكل:

$$C_1 = 0.3102866742 \qquad C_2 = 0.5902003271$$
$$C_3 = 0.8123410598 \qquad C_4 = 0.9549641893$$
$$C_5 = 1.004108771 \qquad C_6 = 0.9549641893$$
$$C_7 = 0.8123410598 \qquad C_8 = 0.5902003271$$
$$C_9 = 0.3102866742 \qquad (8\text{-}147)$$

والتقريب $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \phi_i\ (x)$. الجدول(1) التالي يبين الحل مقارنة مع الحل الدقيق لهذه المسألة ($y(x) = \sin \pi x$):

جدول (1)

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$\lvert\Phi(x_i) - y(x_i)\rvert$
1	0.1	0.3102866742	0.3090169943	0.00127
2	0.2	0.5902003271	0.5877852522	0.00242
3	0.3	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
4	0.4	0.9549641896	0.9510565162	0.00391
5	0.5	1.004108771	1.0000000000	0.00411
6	0.6	0.9549641893	0.9510565162	0.00391
7	0.7	0.8123410598	0.8090169943	0.00332
8	0.8	0.5902003271	0.5877852522	0.00242
9	0.9	0.3102866742	0.3090169943	0.00127

8-34-3-حل مسألة ديريخليه (Dirichlet) الحدية (ببعد واحد)

بطريقة الفروق المنتهية(Differences finies):

لنعالج المسألة السابقة باستخدام طريقة الفروق المنتهية ثم نقارن بعد ذلك الحل مع حل الطريقة السابقة (طريقة رايليه ريتز). ليكن لدينا التابعين f(x),C(x) وكل منهما ينتمي إلى الفضاء C[0,1] والمطلوب إيجاد التابع: $y \in C_0^2[0,1]$ المحقق للمعادلة:

$$-y''(x) + q(x).y(x) = f(x) \qquad (8\text{-}148)$$

والشروط الحدية:

$$y(0) = y(1) = 0$$

هذه المعادلة هي نفس المعادلة السابقة مع ملاحظة أن : p(x) = 1 .

(8-35)- الحل بطريقة الفروق المنتهية :

لنرمز بـ $h = \frac{1}{N+1}$ لخطوة التقسيم للمجال[0,1] (خطوة منتظمة) وحيث أن:

$x_i = ih$ (عقد التقسيم) و

$$0 \le i \le N+1$$

$$x_0 = 0, \quad x_{N+1} = 1$$

إن طريقة الفروق المنتهية هي طريقة يتم فيها الحصول على تقريب للحل $y(x)$ في عقد التقسيم، أي لنبحث عن حل:

$$\Phi_h = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ . \\ . \\ \Phi_N \end{bmatrix} \in R^N \qquad (8\text{-}149)$$

بحيث تكون Φ_i قريبة جدا من الحل الدقيق $y(x_i)$، حيث أن:

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_{N+1}) = 0.$$

بفرض أن الحل Φ قابل للاشتقاق مرتين في المجال [0.1] وليكن $\Phi_i = \Phi(x_i)$ فباستخدام منشور تايلور نحصل على العلاقة الفرقية الشهيرة (من أجل ثلاث نقاط):

$$\Phi_i'' = \frac{\Phi_{i+1} - 2.\Phi_i + \Phi_{i-1}}{h^2}$$

وبالتعويض في (8-148) نحصل على مجموعة المعادلات الخطية التي تكتب بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$A_h.\Phi_h = B_h \qquad (8\text{-}150)$$

حيث:

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+q_1h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+q_2h^2 & -1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2+q_{N-1}h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2+q_Nh^2 \end{bmatrix}$$

$$B_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Phi_h = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}151)$$

حيث رمزنا بـ: $f_i = f(x_i) \quad , \quad q_i = q(x_i), \quad \Phi_i = \Phi(x_i).$

طبعا وكما هو معلوم عند أخذ المشتق الثاني فقط في مشتق تايلور في عبارة الفروق المنتهية فإن هناك خطأ صغيراً جدا ويصغر مع صغر الخطوة h(يمكن تقديره من عبارة الخطأ في منشور تايلور) و تم إهماله، المسألة الآن هي إيجاد $u_h \in R^N$ الذي هو حل للمعادلة المصفوفاتية: $A_h . \ u_h = B_h$

مثال (5) : لنعالج المثال السابق: $-y''+\pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi.x) \quad : \quad 0 \le x \le 1$

والشروط الحدية : $Y(0) = y(1) = 0$ هنا لاحظنا:

$$P(x) = 1 \ , \ q(x) = \pi^2 \ , f(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x)$$

فنحصل على جملة المعادلات الخطية السابقة معطاة بالشكل:

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 200+\pi^2 & -100 & & & \\ -100 & 200+\pi^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 200+\pi^2 & -1 \\ & & & -1 & 200+\pi^2 \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}152)$$

مصفوفة (9x9) تناظرية.

$$B_h = \begin{bmatrix} 2\pi^2 \sin(\pi.0.1) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.2) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.3) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.4) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.5) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.6) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.7) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.8) \\ 2\pi^2 \sin(\pi.0.9) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}153)$$

ويحل هذه المعادلات الخطية بطريقة غوص-سايدل مع أخذ بدء التقريب $u_i^0 = 0$

وأخذ خمس وعشرين تكرار تقريبي للحل كما هو مبين بالجدول (2):

الجدول(2) يبين حل المسألة بطريقة الفروق المنتهية

i	x_i	$u(x_i)$
1	0.1	0.307362693
2	0.2	0.585202305
3	0.3	0.806120176
4	0.4	0.94826398
5	0.5	0.997758898
6	0.6	0.949499674
7	0.7	0.80812341
8	0.8	0.587242094
9	0.9	0.308847855

الجدول (3) التالي يبين الفروق بين الطريقتين والفرق مع الحل الدقيق:

الجدول(3) يبين مقارنة الحل للمسألة بالطرائق الثلاثة

$\|\Phi_i - y_i\|$ فرق الحل الدقيق مع ريليه-ريتز	$\|\Phi_i - u_i\|$ فرق حل الفروق المنتهية مع ريليه-ريتز	$\|u_i - y_i\|$ فرق الحل الدقيق مع حل الفروق المنتهية
0.00127	0.00292	0.00165
0.00242	0.00499	0.00258
0.00332	0.00622	0.00289
0.00391	0.00670	0.00279
0.00411	0.00634	0.00224
0.00391	0.00546	0.00155
0.00332	0.00421	0.00089
0.00242	0.00295	0.00054
0.00127	0.00143	0.000169

مثال (6): (الفروق المنتهية من أجل مسألة إزاحة- تشوه- وتر مرن)

لنعتبر مسألة الانتقال العامودي $u(x)$ في النقطة x لوتر بين الحدين $x=0$ و $x=1$ وخاضع لضغط الواحدة وكثافة حمولة عامودية $f(x)$. إن هذه المسألة تعني إيجاد التابع المستمر والقابل للاشتقاق مرتين u على المجال $[0.1]$ حيث أن:

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{if}: 0 < x < 1$$

(تعتبر هذه المسألة ناقصية من نوع ديريخليه)

لحل هذه المسألة نكتب أولاً المشتق الثاني بدلالة الفروق المنتهية (المحدودة) بالشكل:

$$-u'' = \frac{-u_{j-1}+2u_j-u_{j+1}}{h^2} = f(x_j), \quad 1 \le j \le n$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

وبالتالي نحصل على جملة معادلات خطية من الشكل: $AU = F$ حيث A هي مصفوفة N×N معرفة بالشكل:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وكذلك:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

المصفوفة A ثلاثية القطر تناظرية معرفة موجبة، بحل جملة المعادلات الخطية بطريقة شولسكي مثلاً وإذا كان التابع f مستمراً وقابلاً للاشتقاق 4 مرات يمكننا تقدير الخطأ بالشكل: $\max\limits_{1\le j\le N}|u(x_j)-u_j| \le Ch^2$ حيث أن C لا يتعلق بـ N أو بـ h .

(8-36)- طريقة العناصر المنتهية

حالة بعد واحد

لنعتبر مثال "مسألة الانتشار الحراري" بعدد واحد مع متغير ناقلية k(x) ، المعادلة لها الشكل:(8-154)

$$(ku'(x))' = f(x) \qquad (8\text{-}154)$$

للسهولة سنفرض الشروط الحدية التالية:

$$u(0)=u(1)=0 \qquad (8\text{-}155)$$

لنضرب طرفي المعادلة السابقة بالتابع القابل للاشتقاق $v(x)$ ولنكامل على المجال $[0,1]$ فنحصل على العلاقة:

$$\int_0^1 [k(x)u'(x)]'.v(x).dx = \int_0^1 f(x).v(x).dx \qquad (8\text{-}156)$$

نكامل الطرف الأيسر بالتجزئة، ولنعتبر أن التابع v يحقق الشروط: $v(0)=v(1)=0$, فنجد أن:

$$-\int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x).dx = \int_0^1 f(x).v(x).dx$$

إذا كان $u(x)$ يحقق هذه المعادلة من أجل كل تابع $v(x)$ المنتمي إلى بعض صفوف التوابع المناسبة (عادة يؤخذ من فضاءات سوبولوف)، عندئذ $u(x)$ يكون حلاً للمعادلة التفاضلية الأصلية.

لنفرض الآن أننا استعضنا عن التابع $u(x)$ بالتقريب $U(x)$ ، حيث $U(x)$ تركيب خطي لتوابع قاعدة خاصة:

$$U(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x) \qquad (8-157)$$

نفرض أن توابع القاعدة أختيرت لتحقق الخاصة: $\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$، وبالتالي فإن $U(x)$ يحقق بشكل آلي الشروط الحدية نظراً لكيفية اختيارنا لـ c_j في عبارة $U(x)$. وهكذا فإن المعادلة (8-156) تتحقق من أجل صف كبير من التوابع $v(x)$. يمكن بشكل عام أن نتطلب ليس فقط التوابع $v(x)$ تحقق (8-156) بل تتحقق هذه المعادلة من أجل كل التوابع من بعض الفضاءات التابعية ذات بعد‑m. مثل الفضاء المحدد بمجموعة من m تابع قاعدة $\psi_i(x)$(يمكن أن تكون نفسها التوابع $(\varphi_j(x)$). وهكذا نحصل بشكل عام على المعادلة:

$$-\int_0^1 [k(x)(\sum c_j \varphi_j'(x))\psi_i'(x)]dx = \int_0^1 f(x).\psi_i(x).dx \qquad (8\text{-}158)$$
$$i = 1,2,3,\dots,m$$

بترتيب هذه العلاقة نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{m} k_{ij}c_j = \int_0^1 f(x).\psi_i(x).dx \qquad (8\text{-}159)$$

حيث:

$$k_{ij} = -\int_0^1 [k(x)\varphi_i{}'(x)\psi_i{}'(x)]dx \qquad (8\text{-}160)$$

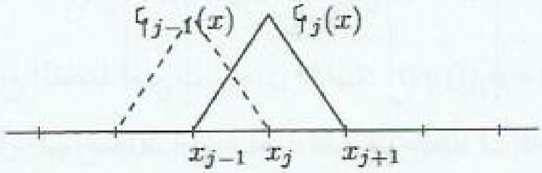
العلاقة (159-8) من أجل $i=1,2,3,....,m$ تعطي جملة معادلات جبرية خطية (mxm) من أجل المجاهيل c_j، وتكتب هذه الجملة بالشكل: $K.C = F$ حيث:

$$F_i = \int_0^1 f(x).\psi_i(x).dx$$

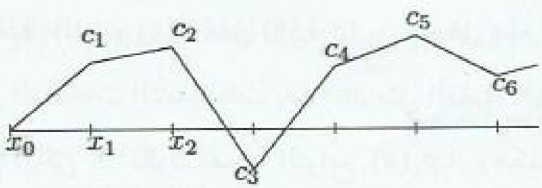
تسمى التوابع ψ_i بشكل عام توابع اختبار كما تسمى توابع القاعدة φ_i توابع اختبار قبعة (نظراً لشكل القبعة في رسمها). غالباً تستخدم نفس توابع القاعدة لكلا الفضائين. الشكل التالي يبين مايلي:

(a)- يمثل هذا الشكل تابعي قاعدة نموذجيين $\varphi_j(x)$ و $\varphi_{j-1}(x)$.

(b)- يمثل هذا الشكل $U(x)$ كتركيب خطي نموذجي للحل كتوابع قاعدة.



(a)



(b)

تطبيق-:

كمثال خاص للمسألة السابقة لنأخذ توابع قاعدة معرفة كما يلي، في شبكة مجزأة نظامياً بالشكل: $x_i = ih \quad ; \quad h = \frac{1}{(m+1)}$، إن تابع القاعدة رقم j، $\varphi_j(x)$ يكون:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{h} & : x_{j-1} < x \le x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & : x_j < x \le x_{j+1} \\ 0 & : \quad otherwise \end{cases}$$

هذه التوابع مستمرة وخطية (قطعياً أو شرائحياً) و $\varphi_j(x)$ يأخذ القيمة "1" عند x_j والقيمة "0" في بقية العقد x_j من أجل $i \neq j$ الشكل (a). لاحظ أن أي تركيب خطي $U(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x)$ لهذه التوابع ستبقى مستمرة وخطية (قطعياً) وتأخذ القيمة c_i في النقطة x_i إذن: $U(x_i)=\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(x_i)=c_i$ وهكذا جميع بقية الحدود في المجموع تساوي صفر وبالتالي التابع $U(x)$ يأخذ الشكل (b). إن مجموعة التوابع $\{\varphi_j(x)\}$ تشكل قاعدة من أجل فضاء التوابع المستمرة الخطية (قطعياً) المعرفة على المجال [0,1] مع الشرط $u(0)=u(1)=0$ ومع النقاط (التي تسمى عقد) $x_1, x_2, ..., x_m$ لاحظ أن العوامل c_j يمكن أن تقدم كقيمة للحل التقريبي في النقطة (العقدة) x_j. إن استخدام توابع القاعدة هذه مع اعتبار $\psi_j = \varphi_j$، يحتاج لحساب مشتقات توابع القاعدة هذه ثم حساب عناصر المصفوفة K وكذلك الطرف الأيمن F. لدينا بالنسبة للمشتقات:

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & : x_{j-1} < x \le x_j \\ \frac{-1}{h} & : x_j < x \le x_{j+1} \\ 0 & : \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

من أجل توابع ما $k(x)$ بشكل عام يمكننا حساب تقريب للتكامل الســـابق (8-158) وكمثال بسيط لنأخذ الحالة حيث $k(x)=1$ (تأخذ عندئذ المعادلة الشكل $u''(x)=f(x)$) عندئذ يمكننا حساب:

$$k_{ij} = -\int_0^1 \varphi_j{}'(x)\varphi_i{}'(x)dx$$

$$
= \begin{cases} \frac{1}{h} & : j = i-1 \text{ or } j = i+1 \\ \frac{-2}{h} & : j = i \\ 0 & : \quad \text{otherwise} \end{cases}
$$

والمصفوفة K (وهي مصفوفة شهيرة الشكل) تعطى بالشكل:

$$
K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

في بعض الحالات يمكن أن نقبل تقديراً (حل عددي) للتكامل:

$$
.\, F_i = \int_0^1 f(x).\psi_i(x).dx
$$

ملاحظة (5):

المصفوفة K السابقة ثلاثية القطر لأن كل من التوابع $\varphi_j(x)$ غير معدوم فقط في عنصرين، من أجل $x_{j-1} < x \le x_{j+1}$ والتابع يكون بالمطابقة معدوماً على الأقل في النقاط $j = i-1$ او i او $i+1$. وبشكل عام إذا اخترنا توابع القاعدة معدومة فقط في بعض المناطق $x_{j-b} < x \le x_{j+a}$ عندئذ تكون المصفوفة الناتجة حزمية مع أقطار b غير معدومة تحت القطر و a حزمة فوقه.

(8-37)- طريقة كالركين (تقريب المسائل الناقصية)

8-37-1- مسألة بواسون (ببعدين):

طرح المسألة: لتكن Ω منطقة "نظامية " في المستوي ox_1x_2 ذات حدود $\partial\Omega$. إذا كان $f:\overline{\Omega} \to R$ تابع مستمر معطى، نبحث عن تابع $u:\overline{\Omega} \to R$ يحقق العلاقات :

$$
-u''(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \qquad (8-162)
$$

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \qquad (8-163)$$

النقطة x هنا ذات بعدين نرمز لها بالرمز $x = (x_1, x_2)$، هذه المسألة هي مسألة بواسون، وهي مسألة ناقصية.

إذا كانت V هي مجموعة كل نقاط التوابع $g : \overline{\Omega} \to R$ المستمرة على $\overline{\Omega}$ و $g/_{\partial\Omega} = 0$ وحيث أن المشتقات الجزئية : $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}$ متسمران (قطعياً–على أجزاء–) فإن العلاقة الضعيفة أو المتحولية للمسألة السابقة تعرف بالشكل :

البحث عن $u \in V$ المحققة للعلاقة:

$$\iint_{\Omega} \overline{\text{grad}}\, u(x) \cdot \overline{\text{grad}}\, v(x)\, dx = \iint_{\Omega} f(x) v(x)\, dx \qquad (8\text{-}164)$$

من أجل كل تابع: $v \in V$

من مزايا هذه العلاقة أنها لا تحتوي إلا على المشتق الأول بخلاف المسألة الأساسية التي كانت تحتوي على المشتق الثاني.

إن طريقة كالركين للحل العددي للمسألة (8-164) تتكون من الخطوات التالية:

1- تثبيت N تابع خطي مستقلين عن بعضهم البعض (من V):

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \dots \quad \varphi_N$$

ووصف الفضاء الجزئي (V_h) $(V_h \subset V)$ كمجموعة تركيبات خطية للتوابع φ_i.

2- البحث عن تابع $(u_h \subset V_h)$، أي البحث عن تركيب خطي : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i$

حيث الـ u_i هي أعداد حقيقية مجهولة تحقق العلاقة:

$$\iint_{\Omega} \overline{\text{grad}}\, uh(x) \cdot \overline{\text{grad}}\, \varphi_j(x)\, dx = \iint_{\Omega} f(x) \varphi_j(x)\, dx \quad j = 1, 2, \dots, N \qquad (8\text{-}165)$$

تقريب كالركين بشكل مصفوفاتي :

لنعرف الأعداد:

$$A_{i,j} = \iint_{\Omega} \overline{\text{grad}}\, \varphi_i(x) \cdot \overline{\text{grad}}\, \varphi_j(x)\, dx \qquad (8\text{-}166)$$

إن العلاقة (8-162) تكافئ العلاقة:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{i,j}u_i = f_j \quad , \quad j=1,2,...,N$$

إذا كانت المصفوفة A ذات الأبعاد $(N\times N)$ وذات العناصر $(A_{i,j})_{1\le j,i\le N}$ وإذا كان الشعاع- : $f_1,f_2, \quad ,f_N F$ عندئذ يمكن أن تكافئ طريقة كالركين البحث عن الشعاع ، U بحيث يكون:

$$AU = F \qquad (8\text{-}167)$$

حيث U له المركبات: $u_1, u_2, ..., u_N$

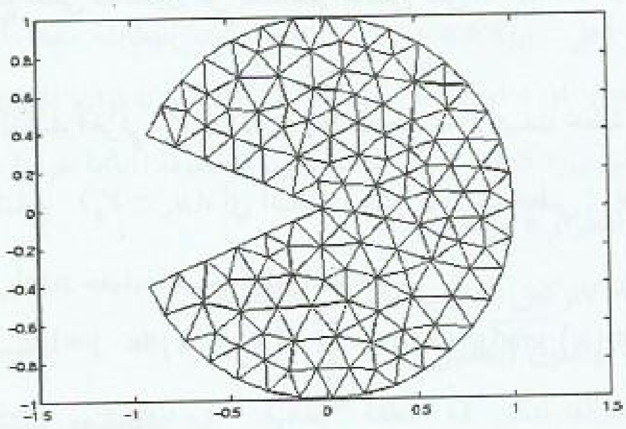
فنحصل على u_h وبفرض أن : $u_h(x)=\sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x)$.

فنقول أن u_h هو تقريب للحل u للمسألة (8-162).

(8-38)- طريقة العناصر المنتهية (المثلثاتية-ببعدين) لمسألة بواسون:

لحل مسألة بواسون السابقة عددياً بطريقة العناصر المنتهية، نقوم بما يلي :

1- تجزئ مثلثاتياً Γ_h منطقة كثيرات الحدود Ω_h المقربة لـ Ω وذلك بتقسيم $\overline{\Omega}$ إلى مثلثات $K_1,K_2,......,K_m$ كما في الشكل -1- التالي:



الشكل -1-

حيث تم تثليث القرص كما في الشكل.

2- في كل عقدة داخلية $p_1,p_2,......,p_N$ نرافق تابع من التوابع:

$$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$$

من Ω إلى R وحيث أن التابع $\varphi_i,\quad 1 \le i \le N$ معرف بالشكل:

أ- φ_i معدوم في كل نقاط (عقد) Γ_h عدا النقطة p_i حيث يساوي "1".

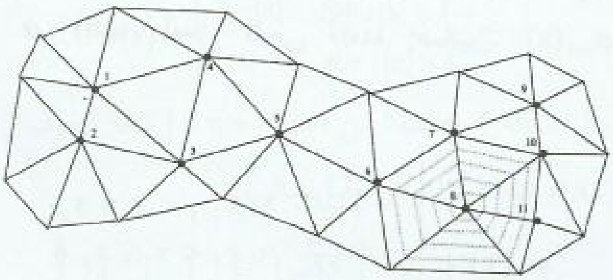
ب- φ_i كثير حدود من الدرجة "1" على كل مثلث K_l , $1 \le l \le m$.

3- نبني المصفوفات A (والتي تسمى بمصفوفة الصلابة) والطرف الثاني F المعطى بالعلاقة (8-166).

4- نحل الجملة الخطية (8-167): إن المصفوفة A تكون مفرغة بمعنى أن أغلب عناصرها معدومة ، حيث أنه في العملي لدينا $A_{ij} = 0$ إذا لم يكن p_i و p_j رأسين متجاورين (أي لم يكن لهما ضلع مشترك).

مثال (7) :

لنعتبر مثلاً مسألة بواسون مع شروط ديريخليه الحدية- المتجانسة في المنطقة المعطاة بالشكل (2)



الشكل (2)

مع أخذ عناصر مثلثية أيضاً (طبعاً يمكن أخذ عناصر رباعية الشكل)، نسمي النقاط رؤوس المثلثات (x_k, y_k) بالعقد. بأن العلاقة المتحولية لمسألة بواسون تعطى بالشكل:

$$-\iint_{\Omega} \nabla u.\nabla v.dx.dy = \iint_{\Omega} f.v.dx.dy$$

هذا من أجل أي توابع اختبار $v(x,y)$ من صف توابع ما. ثانية يمكننا تقريب $u(x,y)$ ببعض التقريبات الخطية لتوابع قاعدة خاصة: $\mathrm{U}(x,y) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x,y)$

لنأخذ تقريب مماثل لحالة البعد الواحد السابق. يمكننا تعريف توابع قاعدة $\varphi_j(x,y)$ الخطية على كل مثلث وتأخذ القيمة "1" في العقدة (x_j,y_j) و "0" في بقية العقد هذا التابع مستمر عبر الحدود بين المثلثات وغير معدوم فقط على المثلثات التي لها رقم عقدة (رأس) j. على سبيل المثال في الشكل (2) السابق يشير خط المحيط لتابع القاعدة $\varphi_8(x,y)$ بخطوط منقطة. باستخدام العبارة $\mathrm{U(x,y)}=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{c_j}\varphi_j(x,y)$ التي تعطي جملة NxN معادلة خطية من الشكل : KC=F حيث: $k_{ij}=-\iint_{\Omega}\nabla\varphi_j.\nabla\varphi_i.dx.dy$، يمكن ملاحظة أن المصفوفة K تناظرية بالنسبة لـ i و j ومعرفة موجبة أيضاً.

تمرين:

أعد السؤال السابق من أجل بعد واحد وبشروط ديريخليه الأوسع:

$\mathrm{u}(1)=\beta \quad ; \quad \mathrm{u}(0)=\alpha$، أدخل تابعي قاعدة إضافيين: $\varphi_{n+1}(\mathrm{x}) \quad ; \quad \varphi_0(\mathrm{x})$ معرفين بالعبارة:

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{j-1}}{h} & : x_{j-1}<x\le x_j\\ \frac{x_{j+1}-x}{h} & : x_j<x\le x_{j+1}\\ 0 & : \quad otherwise\end{cases}$$

عندئذ نعرف $\mathrm{c}_{m+1}=\beta \quad ; \quad \mathrm{c}_0=\alpha$.

تمرين:

خذ المثال السابق ولكن مع فرض أن k(x) تابع. استخدم طريقة الفروق المركزية لحساب: $k_{ij}=-\int_0^1 k(x).\varphi_j'(x)\varphi_i'(x).dx\approx h\sum_{0}^{m}k(x_{\frac{i+1}{2}})\varphi_j'(x_{\frac{i+1}{2}})\varphi_i'(x_{\frac{i+1}{2}})$ واثبت أن هذا يعطي جملة مصفوفاتية موضحة مثل المصفوفة في الشكل:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -(\kappa_{1/2}+\kappa_{3/2}) & \kappa_{3/2} & & & \\ \kappa_{3/2} & -(\kappa_{3/2}+\kappa_{5/2}) & \kappa_{5/2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \kappa_{m-3/2} & -(\kappa_{m-3/2}+\kappa_{m-1/2}) & \kappa_{m-1/2} \\ & & & \kappa_{m-1/2} & -(\kappa_{m-1/2}+\kappa_{m+1/2}) \end{bmatrix}$$

مثال (8)- (Allaire)

لنأخذ المسألة التالية:

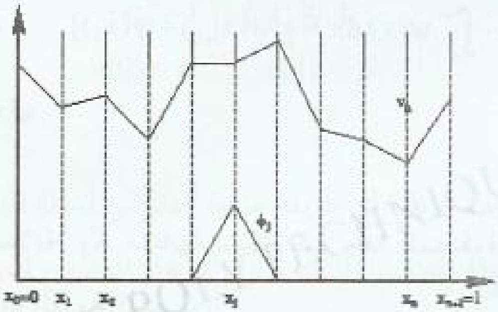
$$-u''(x) = f(x) \quad \text{for} :]0,1[$$

والشروط الحدية: $u(0)=u(1)=0$

يمكن البرهان على أن هذه المسألة تقبل حلاً وحيداً (Allaire)في الفضاء $H_0^1(\Omega)$ من أجل $f \in L^2(\Omega)$ الآن بتعريف التابع $\varphi(x)$ (الذي يعرف بتابع القبعة) بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x| & for : |x| \le 1 \\ 0 & for : |x| > 1 \end{cases}$$

ومن أجل شبكة "منتظمة" من أجل $0 \le j \le n+1$ لنعرف "توابع القاعدة" $\varphi_j(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{h})$ كما في الشكل (3) التالي:



الشكل (3)

وضمن هذا التجزيء يمكن البرهان على وجود ووحدانية الحل (Allaire) والحصول على العلاقة المتحولية التي تؤول لحل الجملة الخطية: $K_h.U_h = b_h$

حيــــث: $U_h = (u_h(x_j))_{1\le j\le n}$ و $b_h = (\int_0^1 f(x).\varphi_i(x)dx)_{1\le i\le n}$ ومــــصفوفة الصلابة: $k_h = (\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x).dx)_{1\le i,j\le n}$ وبحساب بسيط نجد أن:

$$\int_0^1 \varphi_i'(x).\varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h} & : j = i-1 \\ \frac{2}{h} & : j = i \\ \frac{-1}{h} & : j = i+1 \\ 0 & : \quad otherwise \end{cases}$$

إن المصفوفة K_h (حزمية) ثلاثية القطر:

$$K_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & O & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

وللحصول على الطرف الأيمن b_h يجب حساب التكامل العددي:

$$(b_h)_i = (\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x).\varphi_i(x)dx) \quad ; \quad for: 1\le i\le n$$

بطريقة عددية مثل طريقة التنصيف مثلاً: $\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\psi(x).dx \approx .\psi(\frac{x_{i+1}-x_i}{2})$

أو علاقة شبه المنحرف: $\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\cdot\int_{x_i}^{x_{i+1}}\psi(x).dx \approx \frac{1}{2}[\psi(x_{i+1})+\psi(x_i)]$

أو أي طريقة عددية أخرى.

ملاحظة (6):

إن مصفوفة الصلابة K_h مشابهة بشكل كبير جداً للمصفوفات التي تشاهد عادة عند الدراسة بطريقة الفروق المنتهية.

مسألة نيومان:

لتكن لدينا المسألة التالية:

$$-u''+au = f \quad for:]0,1[$$

والشروط الحدية : $u'(0)=\alpha \quad ; \quad u'(1)=\beta$

هــذه المــسألة تملــك حــلاً وحيــداً في الفــضاء $H^1(\Omega)$ مــن أجــل $f \in L^2(\Omega)$

$\alpha \in R;\ \beta \in R$ وحيث $a(x) \ge a_0 > 0 \quad in \ \Omega$ وضـمن هـذا التجزيـء يمكـن

البرهان على وجود ووحدانية الحل (Allaire) والحصول على العلاقـة المتحوليـة الـتي

تــؤول لحــل الجملــة الخطيــة: $K_h.U_h = b_h$ حيــث $U_h = (u_h(x_j))_{0\le j\le n+1}$ و

$b_h = (\int_0^1 f(x).\varphi_i(x)dx)_{1\le i\le n}$ ومصفوفة الصلابة:

$$k_h = \left(\int_0^1 (\varphi_j'(x).\varphi_i'(x)d(x) + a(x)\varphi_j(x).\varphi_i(x))dx \right)_{0\le i,j<n+1}$$ وكذلك :

$$(b_h)_i = (\int_0^1 f(x).\varphi_i(x)dx) \quad ; \quad for: 1 \le i \le n$$

$$(b_h)_0 = (\int_0^1 f(x).\varphi_0(x)dx) - \alpha$$

$$(b_h)_{n+1} = (\int_0^1 f(x).\varphi_{n+1}(x)dx + \beta$$

عندما لا تكون $a(x)$ توابـع ثابتـة، فإنـه مـن الـضروري اسـتخدام العلاقـات التربيعية لحساب (تقريب) عناصر المصفوفة K_h.

تمرين : طبق طريقة العناصر المنتهية (الخطية) على المسألة:

$$-u'' = f \quad for:]0,1[$$

والشروط الحدية: $u(0)=\alpha \quad ; \quad u(1)=\beta$

ملاحظة (7):

من المألوف عند دراسة أي طريقة عددية التعرض لمسألة التقارب وتقدير الأخطاء وهكذا بالنسبة لطريقة العناصر المنتهية ونرى أن هذا الموضوع ليس من مواضيع المرحلة التي يدرس فيها هذا الكتاب. يمكن الرجوع الى Allaire على سبيل المثال لمتابعة مثل هذه الدراسة.

ملاحظة(8) : إن دراسة طريقة العناصر المنتهية تستدعي معرفة كبيرة بفضاءات سوبولوف كما يتضح مما سبق وتعد من بين الطرق الأكثر استخداماً اليوم وتستخدم بشكل كبير

في الصناعة وخاصة صناعة الملاحة الجوية ومكوكات الفضاء والنووية وميكانيك السوائل ودراسة مسائل المد والجذر وظواهر التلوث الحراري والكيميائي والأرصاد الجوية وميكانيك الانشاءات والجسم الصلب والزلازل ....وهناك برامج حاسوبية ضخمة في الأسواق والمخابر العلمية الشهيرة تستخدم لهذا الغرض منها مثلاً:

ANSIS, MARC, SAP, ASKA, NASTRAN, ADINA, TITUS, CASMIC.

لقد تم إعطاء فكرة عن هذه الطريقة التي تدرس بأشكال عدة معتمدة على فضاءات التوابع أو مباشرة ونترك تفاصيل أكثر للمهتمين والمختصين وخاصة تفاصيل الدراسة من أجل المعادلات التفاضلية في بعدين وبعناصر مثلثية او تربيعية خطية وغير خطية وكذلك موضوع **مصفوفة الصلابة العامة** لجميع العناصر (للمسألة كاملة) وهو موضوع تخصصي لطلاب الدراسات العليا.

سنعود ثانية لدراسة مسألة الحرارة في هذه الفقرة لنبين كيفية الحصول على الحل التحليلي من جهة ولإعطاء عدد من طرق الفروق المنتهية لدراسة هذه المسألة:

(8-39)- تقريب الطرق المكافئية -مسألة الحرارة من أجل بعد واحد- بطريقة الفروق المنتهية:

عرض المسألة: ليكن التابع المستمر $f:(x,t)\in[0,1]\times R^{+}\rightarrow f(x,t)\in R$

وإذا كان k ثابت موجب، فإن المسألة المكافئية التي ندرسها هي مسألة الحرارة التالية: $u:(x,t)\in[0,1]\times R^{+}\rightarrow u(x,t)\in R$ التي تحقق :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=f(x,t);\quad \forall x\in\left]0,1\right[,\forall t>0 \qquad (8\text{-}168)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0\quad ,\forall t>0 \qquad (8\text{-}169)$$

$$u(x,0)=\omega(x);\quad \forall x\in\left]0,1\right[\qquad (8\text{-}170)$$

حيث $\omega:x\in[0,1]\rightarrow\omega(x)\in R$ شرط إبتدائي معطى.

إن المسألة ((8-168) حتى (8-170)) تسمى مسألة الحرارة وهي مشابهة تماماً لما ذكر سابقاً، سنقدم فيما يلي عدداً من الطرق العددية لحل هذه المسألة باستخدام الفروق

المنتهية. سنقدم قبل ذلك الحل التحليلي التالي، في الحالة التي يكون فيها منبع الحرارة معدوماً، أي عندما يكون القضيب معزولاً، f=0 . سنبحث عن التابع الزوجي والدوري، بدور يساوي 2 بالنسبة لـ x : $U:(x,t)\in R\times R^{+}\to u(x,t)\in R$ بحيث يتحقق:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)-k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)=f(x,t);\quad \forall x\in R,\forall t>0 \qquad (8\text{-}171)$$

$$U(x,0)=W(x);\quad \forall x\in R \qquad (8\text{-}172)$$

حيث W التمديد الزوجي بدور2− لـ ω، بمعنى:

$$\begin{aligned} W(x)&=\omega(x) \quad , \quad \forall x\in \left]0,1\right[,\\ W(x)&=\omega(-x) \quad , \quad \forall x\in \left]-1,0\right[,\\ W(x+2)&=\omega(x), \quad \forall x\in R \end{aligned}$$

بما أن u زوجي دوره 2− لـ x يمكن أن نكتبه على شكل سلسلة فورييه بالنسبة للتجيب، أي:

$$U(x,t)=\tfrac{1}{2}U_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}U_j(t).\cos(j\pi x) \qquad (8\text{-}173)$$

حيث أن:

$$U_j(t)=2\int_0^1 u(x,t).\cos(j\pi x)dx;\quad j=0,1,2,3,.... \qquad (8\text{-}174)$$

لنعوض (8-173) في (8-171) فنجد :

$$U_0'(t)=0;\quad \forall t>0 \qquad (8\text{-}175)$$

$$U_j'(t)+kj^2\pi^2U_j(t)=0;\quad \forall t>0,\quad j=1,2,3,... \qquad (8\text{-}176)$$

حيث : $U_j'(t)=\dfrac{d}{dt}U_j(t)$

إن الحل العام لـ (8-175) و (8-176) يعطي:

$$U_0(t)=c_0;\quad \forall t>0 \qquad (8\text{-}177)$$

$$U_j(t)=c_je^{-kj^2\pi^2t},\quad \forall t>0,\quad j=1,2,3,... \qquad (8\text{-}178)$$

حيث الـ $c_j,\quad j=0,1,2,3,..$ ثوابت.

يكفي الآن ملاحظة الشرط الابتدائي (172-8) ونشر W على شكل سلسلة فورييه، أي:

$$W(x)=\tfrac{1}{2}W_0+\sum_{j=1}^{\infty}W_j.\cos(j\pi x) \qquad (8\text{-}179)$$

حيث:

$$W_j=2\int_0^1\omega(x).\cos(j\pi x)dx; \quad j=0,1,2,3,.... \qquad (8\text{-}180)$$

للحصول على $c_j=W_j, \quad j=0,1,2,3,..$. باستخدام هذه النتيجة مع (180-8) و (177-8) و (178-8) نحصل على:

$$U(x,t)=\tfrac{1}{2}W_0+\sum_{j=1}^{\infty}W_j.e^{-kj^2\pi^2t}.\cos(j\pi x) \qquad (8\text{-}181)$$

بما أن: $u(x,t)=U(x,t); \quad \forall x\in[0,1], \quad \forall t>0$

فيمكن توضيح حل المسألة ((168-8) إلى (170-8)) من أجل f=0 بالعلاقة:

$$u(x,t)=\tfrac{1}{2}W_0+\sum_{j=1}^{\infty}W_j.e^{-kj^2\pi^2t}.\cos(j\pi x), \quad \forall x\in[0,1], \quad \forall t>0 \qquad (8\text{-}182)$$

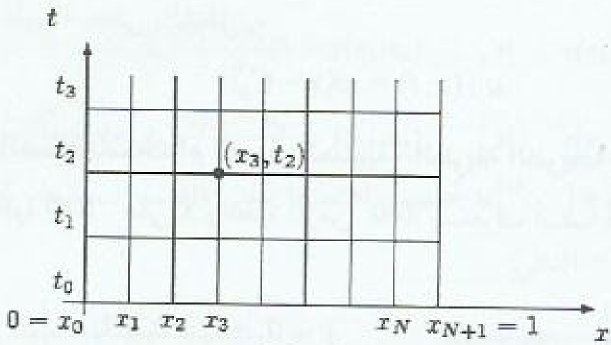
حيث العوامل W_j تعطى على شكل توابع للشرط الإبتدائي $\omega(x)$ بالعلاقات (180-8).

1-39-8-الحل العددي- طريقة أولر الأمامية

ليكن N عدداً صحيحاً موجباً، ولتكن خطوة التقسيم $h=\frac{1}{N+1}$ والعقد $x_j=jh, \quad j=0,1,2,....,N+1$. ولتكن خطوة الزمن t>0 وحيث $t_n=nt, \quad j=0,1,2,....,N+1$، إن النقاط x_j,t_n تمثل بالشبكة التالية(الشكل-13-)

إذا كانت $u(x_j,t_n)$ قيم الحل للمسألة ((168-8) إلى (170-8)) في العقدة x_j والزمن t_n، نرمز بـ u_j^n للتقريب $u_j^n=u(x_j,t_n)$ فإن علاقة الفروق المنتهية لاولر لـ (27-7) تعطى بالشكل:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{t}+k\frac{-u_{j-1}^n+2u_j^n-u_{j+1}^n}{h^2}=f(x_j,t_n), \quad j=1,2,...,N \qquad (8\text{-}183)$$



الشكل-13-

(8-40)- تقريب المسائل الزائدية-معادلة النقل(الانتشار) ومعادلة الأمواج

8-40-1- مسألة الانتقال(الانتشار)

إذا كان
$$C:(x,t)\in R\times R^{+}\to C(x,t)\in R$$
$$f:(x,t)\in R\times R^{+}\to f(x,t)\in R$$
$$\omega:x\in R\to \omega(x)\in R$$

ثلاثة توابع معطاة ، إن مسألة النقل تعني البحث عن التابع:
$$u:(x,t)\in R\times R^{+}\to u(x,t)\in R$$

الذي يحقق العلاقة:
$$\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)+C(x,t)\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=f(x,t);\quad \forall x\in R,\forall t>0 \qquad (8\text{-}184)$$
$$u(x,0)=\omega(x);\quad \forall x\in R \qquad (8\text{-}185)$$

سنعطي فيما يلي أربعة مخططات (طرق تقريب) فروق منتهية لتقريب الحل u لهذه المسألة. سنأخذ الحالة المبسطة من أجل: $C=C_0=cte,\quad f=0$

حل مسألة النقل من أجل حالة خاصة

نفرض أن:
$$C(x,t)=C_0=cte,$$
$$f(x,t)=0$$

عندئذ تأخذ المسألة السابقة الشكل:
$$\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)+C_0(x,t)\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0;\quad \forall x\in R,\forall t>0 \qquad (8\text{-}186)$$
$$u:(x,0)=\omega(x);\quad \forall x\in R \qquad (8\text{-}187)$$

إن حل هذه المسألة يعطى بالشكل:

$$u:(x,t)=\omega(x-C_0t) \tag{8-188}$$

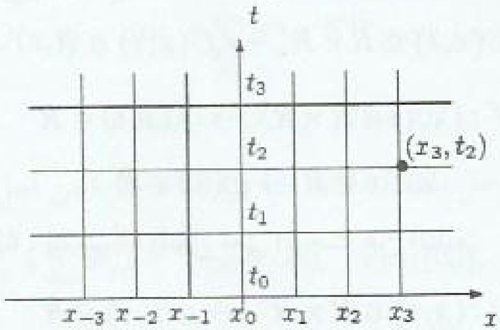
(8-41)-معالجة المسألة باستخدام الفروق المنتهية -الطريقة الصريحة-

لتكن الخطوة h>0 على x وخطوة الزمن t>0. سنعرف أيضاً النقاط x_j, t_n بالشكل:

$$x_j = jh \qquad , \qquad j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,$$

$$t_n = n\tau \qquad , \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

كما هو مبين في الشبكة التالية (الشكل-14-):



الشكل-14-

لتكن u حل المسألة (8-186) و (8-187)، سنرمز للسهولة بـ u_j^n للتقريب:

$$u(x_j,t_n), j=0,\pm1,\pm2,\ldots,n=0,1,2,\ldots,$$

لاحظ أن: $u_j^n \approx u(x_j,t_n)$. إن المخططات العددية التي سندرسها تهدف لحساب التقريب $u_j^{n+1},\ \ j\in Z$ عندما يكون التقريب $u_j^n,\ \ j\in Z$ معلوم (طريقة صريحة) وبالتالي لنضع $u_j^0=\omega(x_j),\ \ j\in Z$ و من الممكن الحساب بشكل متتال كل القيم $u_j^1,\ \ j\in Z$ ثم كل القيم $u_j^2,\ \ j\in Z$ ......

(8-42)- المخطط غير المركزي -Upwind

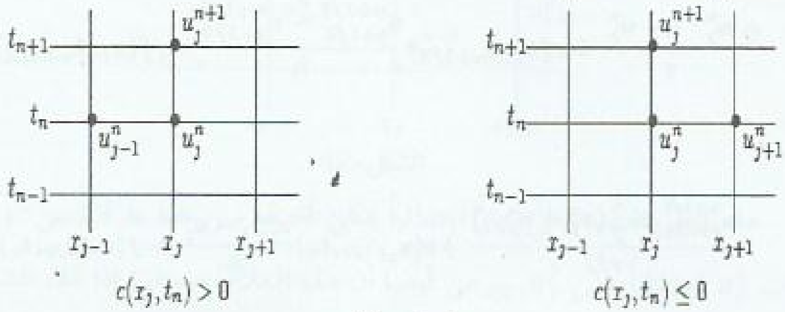
علاقة التقريب (المخطط) لهذه الطريقة يعطى بالشكل التالي:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+c(x_j,t_n)\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=f(x_j,t_n) \qquad \text{si} \qquad c(x_j,t_n)>0,$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+c(x_j,t_n)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=f(x_j,t_n) \qquad \text{si} \qquad c(x_j,t_n)\le 0.$$

إن القيم $u_j^{n+1},\ \ j\in Z$ تحسب اعتماداً على القيم السابقة $u_j^n,\ \ j\in Z$

حسب الشكل-15- التالي:



الشكل-15-

يبرهن أن هذه العلاقة مستقرة إذا كان الشرط التالي محقق: $t\le h/|C_0|$.

(8-43)- مخطط لاكس- Lax

علاقة التقريب (المخطط) لهذه الطريقة يعطى بالشكل التالي:

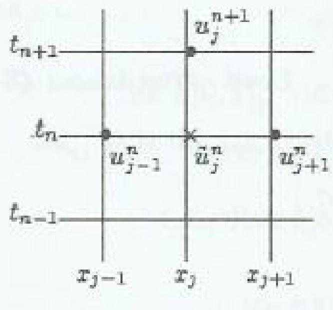
$$\frac{u_j^{n+1}-\bar{u}_j^n}{\tau}+c(x_j,t_n)\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=f(x_j,t_n)$$

حيث:

$$\bar{u}_j^n=\frac{u_{j-1}^n+u_{j+1}^n}{2}.$$

إن القيم $u_j^{n+1},\ \ j\in Z$ تحسب اعتماداً على القيم السابقة $u_j^n,\ \ j\in Z$ حسب الشكل -16- التالي:

× القيمة المتوسطة. يبرهن أيضاً أن هذه العلاقة مستقرة إذا كان الشرط التالي محقق: $t\le h/|C_0|$.



الشكل-16-

(8-44)- مخطط لاكس–ووندروف Lax –Wendroff

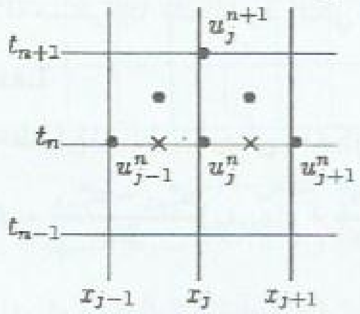
في هـذه الطريقـة سـيتم إدخـال المتحـولات المـساعدة $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ في النقـاط $t_{j+1/2} = t_j + \frac{\tau}{2}$، $x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}$. إن علاقة لاكـس–وونـدروف تعطـى بـالمخطط التالي:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c(x_j, t_{n+1/2}) \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} = f(x_j, t_{n+1/2})$$

حيث:

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\left(u_j^n + u_{j+1}^n\right)}{\tau/2} + c(x_{j+1/2}, t_n) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f(x_{j+1/2}, t_n).$$

حسب الشكل –17– التالي:



الشكل–17–

× القيمة المتوسطة. يبرهن أيضاً أن هذه العلاقة مستقرة إذا كان الشرط التـالي محققـاً:

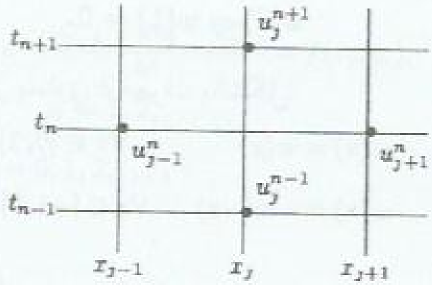
$t \le h/|C_0|$.

(8-45)- مخطط Leap –frog

تعطى علاقة التقريب لهذه الطريقة بالشكل:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + c(x_j, t_n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = f(x_j, t_n).$$

إن القيم u_j^{n+1} تحسب اعتماداً على القيم السابقة u_k^n و u_k^{n-1} حسب الشكل-18- التالي:



الشكل-18-

هذه الطريقة تستدعي حلاً ابتدائياً يمكن أخذه من مخطط لاكس-وونلروف لحساب u_j^1 اعتماداً على u_j^0. يبرهن أيضاً أن هذه العلاقة مستقرة إذا كان الشرط التالي محققاً: $t \leq h/|C_0|$.

(46-8)- معادلات الأمواج

لتكن التوابع الثلاثة:

$$f : (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to f(x,t) \in \mathbb{R}$$
,
$$w : x \in [0,1] \to w(x) \in \mathbb{R}$$
,
$$v : x \in [0,1] \to v(x) \in \mathbb{R}$$

عدداً موجباً إن مسألة الأمواج المطروحة هنا تعني البحث عن التابع:c وليكن:

$$u : (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to u(x,t) \in \mathbb{R}$$

يحقق العلاقات التالية:

$$\forall x \in]0,1[, \quad \forall t > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

$$\forall t > 0, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$\forall x \in]0,1[. \quad u(x,0) = w(x)$$

$$\forall x \in]0,1[. \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x)$$

(8-47)- حل مسألة الأمواج في حالة خاصة

نفرض أن v و f معدومين وأن:

$$u(0) = u(1) = 0$$

إذا كان ω تابع دوري بدور يساوي 2 معرف بالشكل:

$$\omega(x) = u(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

$$\omega(x) = -u(-x) \qquad \forall x \in [-1,0],$$

: إذن يمكننا التحقق من أن

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\omega(x-ct) + \omega(x+ct)\Big) \qquad \forall x \in [0,1], \quad \forall t > 0,$$

هو الحل لمعادلة الأمواج السابقة مع الشروط المعطاة.

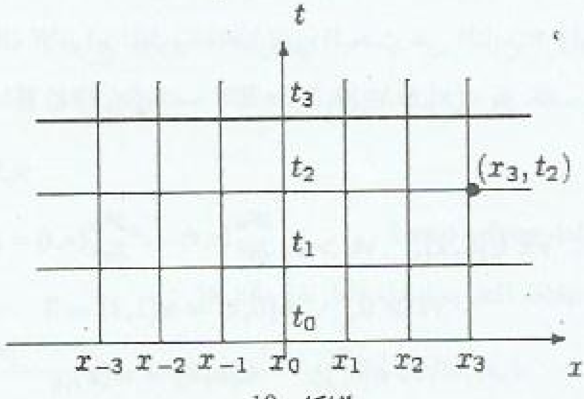
8-47-1- الحل بطريقة الفروق المنتهية

لنعطي الخطوة $h = \frac{1}{N+1}$ على المحور x حيث N عدد موجب صحيح، والعقد $x_j = jh, \quad j = 0,1,2,....,N+1$. ولتكن خطوة الزمن t>0 حيث:

$$x_j = jh \qquad j = 0,1,2,...,N+1,$$

$$t_n = n\tau \qquad n = 0,1,2,....$$

إن النقاط x_j, t_n تمثل بالشبكة التالية (الشكل-19-):



الشكل-19-

ليكن u حل للمسألة المعالجة، سنرمز بـ u_j^n للتقريب:

$$u(x_j, t_n), j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots,$$

إن علاقة التقريب التي ستعطى هي العلاقة الصريحة:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} + c^2 \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{h^2} = f(x_j, t_n), \qquad (8\text{-}189)$$

$$j = 1, 2, \dots, N \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_j^0 = w(x_j),$$

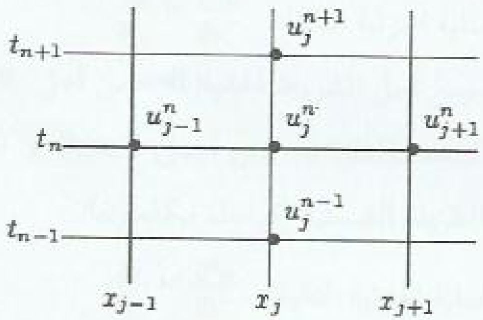
$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = v(x_j) + \tau g_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \qquad (8\text{-}190)$$

والمقدار g_i هو عامل تصحيح يعطى بالعلاقة:

$$g_j = \frac{1}{2}\left(f(x_j, 0) - c^2 \frac{-w(x_{j-1}) + 2w(x_j) - w(x_{j+1})}{h^2}\right)$$

8-47-2- مخطط الفروق المنتهية

إن القيم u_j^{n+1} تحسب اعتماداً على القيم السابقة u_k^n و u_k^{n-1} حسب الشكل –20– التالي:



الشكل—20

فنحصل على:

$$u_j^{n+1} = 2(1-\lambda) u_j^n + \lambda\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - u_j^{n-1} + \tau^2 f(x_j, t_n),$$

من أجل : $j=1,2,\dots,N$

و λ تعطى بالعلاقة:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A\vec{u}^n = \vec{f}(t_n), \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w}, \qquad \vec{u}^1 = \vec{w} + \tau\vec{v} + \frac{1}{2}\tau^2(\vec{f}(0) - c^2 A\vec{w}),$$

إن العلاقات (189-8) إلى (190-8) تكتب مصفوفاتياً بالشكل:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A\vec{u}^n = \vec{f}(t_n), \qquad n = 1,2,3,\dots,$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w}, \qquad \vec{u}^1 = \vec{w} + \tau\vec{v} + \frac{1}{2}\tau^2(\vec{f}(0) - c^2 A\vec{w}),$$

حيث $\vec{u}^n$ هو الشعاع ذو المركبات $(u_j^n)_{j=1}^N$ ، $(u_j^n)_{j=1}^N$ ، $(u_j^n)_{j=1}^N$ هي أشعة ذات N مركبة $(\omega(x_j))_{j=1}^N$ و $(v(x_j))_{j=1}^N$ على الترتيب، و f هو أيضاً شعاع ذو $(\omega(x_j))_{j=1}^N$ مركبة $(f(x_j))_{j=1}^N$ و A هي مصفوفة $N\times N$:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

تمارين

1- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le 1$ من أجل الشروط الحدية: $u=1$ من أجل : $0\le x\le 1$ و $t=0$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=u$ في النقطة $x=0$ ومن أجل جميع قيم t . $\frac{\partial u}{\partial x}=-u$ في النقطة $x=1$ ومن أجل جميع قيم t. وذلك باستخدام الطريقة الصريحة (الظاهرية) مستخلماً الفروق الأمامية من أجل الشرط الحدي في النقطة: $x=0$.

2- حل المثل السابق باستخدام الطريقة الضمنية (كرانك نيكلسون).

3- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le 1$

من أجل شرط البدء: $u=1$ من أجل: $0<x<1$ و $t=0$ والشروط الحدية:

$u=0$ من أجل: $x=0$ و $x=1$ و $t\ge 0$.وذلك باستخدام الطريقة الصريحة (الظاهرية).

4- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حيث: $0\le x\le 1$ ومن أجل الشروط الحدية: $u=0$ من أجل: $x=0$ و $x=1$ و $t>0$.
ومن أجل شروط البدء:$u=\sin\Pi x$ من أجل: $0\le x\le 1$ و $t=0$ وبأخذ $h=0.1$ و $k=0.01$ باستخدام الطريقة الضمنية (كرانك نيكلسون).

5- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حيث: $0\le x\le 1$ ومن أجل الشروط الحدية: $u=0$ من أجل : $x=0$ و $x=1$ و $t>0$. ومن أجل شروط البدء $u=\sin\Pi x$: من أجل : $0\le x\le 1$ و $t=0$ وبأخذ $h=0.1$ و $k=0.01$ باستخدام الطريقة الضمنية (كرانك نيكلسون) مستخلماً طريقة جاكوبي لحل مجموعة المعادلات الخطية.

6- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حيث : $0\leq x\leq 1$ ومن أجل الشروط الحدية: $u=0$ من أجل : $x=0$ و $x=1$ و $t>0$. ومن أجل شروط البدء: $u=\sin\Pi x$ من أجل : $0\leq x\leq 1$ و $t=0$ وبأخذ $h=0.1$ و $k=0.01$ وذلك باستخدام الطريقة الضمنية (كرانك نيكلسون) مستخدماً طريقة غوص-سايدل لحل مجموعة المعادلات الخطية.

7- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ، $0\leq x\leq 1$ من أجل شرط البدء : $u=2$ من أجل: $0\leq x\leq 1$ و $t=0$. والشروط الحدية: $\frac{\partial u}{\partial x}=-u$ في النقطة $x=0$ ومن أجل جميع قيم t . $\frac{\partial u}{\partial x}=u$ في النقطة $x=1$ ومن أجل جميع قيم t. وذلك باستخدام الطريقة الصريحة (الظاهرية) مستخدماً الفروق المركزية، خذ $h=0.1$ و $k=0.0025$.

8- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ ، $0<x<1$ و $t>0$ ، من أجل الشروط الحدية: $u(0,t)=u(1,t)=0,\quad 0<t$ وشروط البدء: $u(x,0)=\sin\pi x \quad : \quad 0\leq x\leq 1$. إذا علمت أن الحل التحليلي يعطى بالعلاقة: $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)$. خذ : $h=0.1, k=0.0005$ ثم $h=0.1, k=0.01$

9- لنأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ ، $0<x<2$ و $t>0$ ، من أجل الشروط الحدية: $u(0,t)=u(2,t)=0,\quad 0<t$ وشروط البدء : خذ: $h=0.1, k=0.01$.

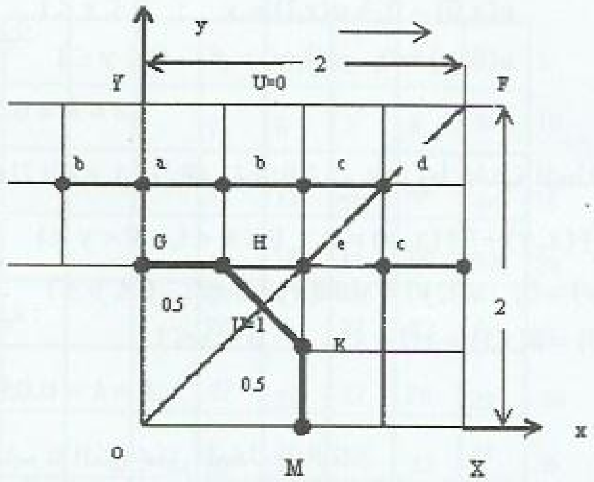
10- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ ، $0<x<2$ و $t>0$ ، من أجل الشروط الحدية: $u(0,t)=u(2,t)=0,\quad 0<t$ وشروط البدء $u(x,0)=x(2-x) \quad : \quad 0\leq x\leq 2$، خذ: $h=0.1, k=0.01$.

11- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ ، $0<x<1$ و $t>0$ ، من أجل الشروط الحدية: $u(0,t)=u(2,t)=0,\quad 0<t$ وشروط البدء : $u(x,0)=x(2-x) \quad : \quad 0\leq x\leq 2$. خذ : $h=0.1$

12- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (الناقصية):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)+4=0$$

في المنطقة المعطاة بأنبوب أسطواني الشكل مقطعه متناظر بالنسبة للمحورين ox, oy الموضح في الشكل التالي والذي يمثل فقط ربع المقطع (يكفي بسبب التناظر) الواقع بين XFY و GHKM والشروط الحدية معطاة بالشكل التالي، على المحيط XoY قيمة u=0 و وعلى المحيط GHKM قيمة u=1. خذ مربعات الشبكة بالشكل .h=0.5



13- حل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية (معادلة بواسون الناقصية):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=xe^y$$

من أجل المنطقة: $R=\{(x,y)\setminus 0<x<2,\quad 0<y<1\}$

والشروط الحدية:
$$u(0,y)=0,\quad u(2,y)=2e^y:\quad 0\le y\le 1$$
$$u(x,0)=x,\quad u(x,1)=ex\quad :\quad 0\le x\le 2$$

14- حل المعادلة التفاضلية الناقصية التالية مع الشروط الحدية المعطاة.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=x,\quad 0<x<1,\quad 0<y<2$$

والشروط الحدية:
$$u(0,y)=y^2,\quad u(1,y)=(y-1)^2:\quad 0\le y\le 2$$
$$u(x,0)=x^2,\quad u(x,2)=(x-2)^2\quad :\quad 0\le x\le 1$$

خذ الشبكة: $h=k=\frac{1}{3}$.

15- حل المعادلة التفاضلية الناقصية التالية مع الشروط الحدية المعطاة.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=x, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$

والشروط الحدية:

$u(0,y)=0, \quad u(1,y)=\frac{1}{6} \quad : \quad 0\le y\le 2$

$u(x,0)=\frac{1}{6}x^3, \quad u(x,1)=\frac{1}{6}x^3 \quad : \quad 0\le x\le 1$

خذ الشبكة: $h=k=\frac{1}{3}$.

16- حل المعادلة التفاضلية الناقصية التالية مع الشروط الحدية المعطاة.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=x, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$

والشروط الحدية:

$u(x,0)=0, \quad u(x,1)=x \quad : \quad 0\le x\le 1$

$u(0,y)=0, \quad u(1,y)=y : \quad 0\le y\le 1$

خذ الشبكة: $h=k=0.1$.

17- حل المعادلة التفاضلية الناقصية التالية مع الشروط الحدية المعطاة.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=x, \quad 0<x<1, \quad 0<y<1$

والشروط الحدية :

$u(0,y)=0, \quad u(1,y)=\sinh(\pi)\sin \pi y : \quad 0\le y\le 1$

$u(x,0)=u(x,1)=x(1-x) \quad : \quad 0\le x\le 1$

خذ الشبكة : $h=k=0.05$.

18- لتكن التابع u الذي يحقق المعادلة التالية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2=0$$

داخل نقاط المربع: $y=\pm 1, \quad x=\pm 1$ وقيمته معدومة على المحيط. أوجد باستخدام الفروق المحدودة الحل من أجل شبكة ذات خطوة h=0.5 ثم من أجل شبكة ذات طول يساوي 1. لنفرض أن خطأ التقارب يتناسب مع h^2 احسب قيمة محسنة للحل u عند النقطة (0,0).

19- حل المعادلة التالية: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-32u=0$ داخل نقاط المربع:

$y=\pm 1, \quad x=\pm 1$ وحيث الشروط الحدية :

u=0 من أجل : y=1 و -1≤x≤+1

u=1 من أجل : y=-1 و -1≤x≤+1

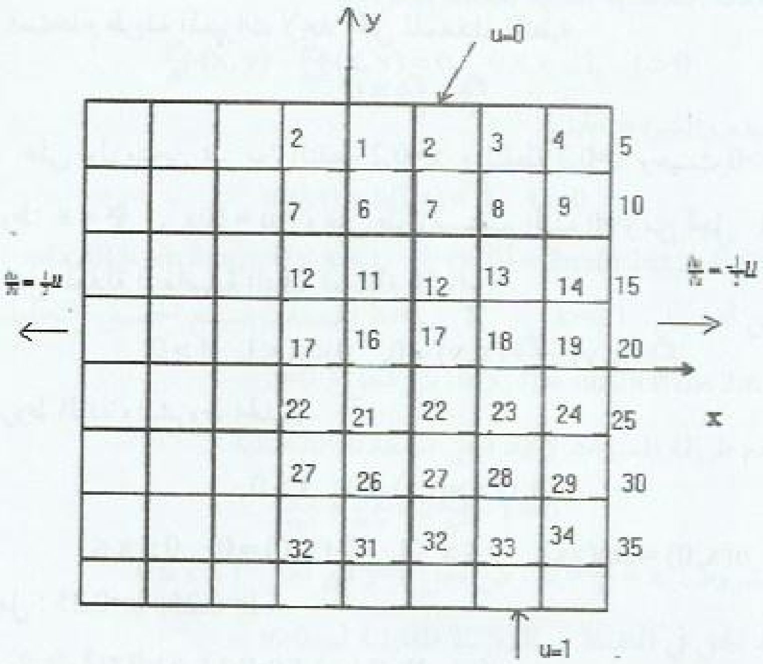
$\frac{\partial u}{\partial x} = -0.5u$ من أجل : $x=1$ و $-1 \le y \le +1$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.5u$ من أجل : $x=-1$ و $-1 \le y \le +1$.

خذ مربعات الشبكة من أجل خطوة h=0.25 وسم النقاط التالية:

....,(0.25,0.5),(0,0.5),(1,0.75),(0.75,0.75),(0.5,0.75),(0.25,0.75),(0,0.75)

بالأرقام : 7,6,5,4,3,3,1,... كما في الشكل التالي:



وبين مستخدماً أبسط علاقة للفروق المركزية أن المعادلات الفرقية المنتهية التي نحصل عليها عددها 35 وتكتب بالشكل : Au=b حيث:

$u^T = (u_1, u_2, ..., u_{35})$ و $b^T = (0,0,0,....,0,-1,-1,-1,-1,-1)$ و A هي المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} B & I & & & & & \\ I & B & I & & & & \\ & I & B & I & & & \\ & & I & B & I & & \\ & & & I & B & I & \\ & & & & I & B & I \\ & & & & & I & B \end{bmatrix}$$

حيث:

$$B=\begin{bmatrix} -6 & 2 & & & \\ 1 & -6 & 1 & & \\ & 1 & -6 & 1 & \\ & & 1 & -6 & 1 \\ & & & 1 & -6\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

20- استخدم طريقة المميزات لإيجاد الحل للمعادلة الخطية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

على أول منحن مميز بين النقطة $x=0.2$ والنقطة $x=0.3$ وحيث $y>0$ و u تحقق الشروط: $\frac{\partial u}{\partial y}=x$, $u=10x^2$ ، وعلى طول مستقيم البدء $y=0$ من أجل $0\le x\le 1$.

21- حل المعادلة التفاضلية التالية (معادلة الأمواج):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0,\quad 0<x<1,\quad t>0$$

مع شروط البدء والشروط الحدية:

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin(\pi x),\quad 0\le x\le 1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1$$

من أجل : $h=0.25,\ k=0.25$.

22- حل المعادلة التفاضلية التالية (معادلة الأمواج):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0,\quad 0<x<0.5,\quad t>0$$

مع شروط البدء والشروط الحدية:

$$u(0,t)=u(0.5,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 0.5,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin 4\pi x,\quad 0\le x\le 0.5$$

من أجل: $h=0.5,\ k=0.25$.

23- قرب الحل $u(x,t)=\sin(\pi x)\cos(\pi t)$ للمعادلة التفاضلية التالية (معادلة الأمواج): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0,\quad 0<x<1,\quad t>0$

مع شروط البدء والشروط الحدية:

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin\pi x,\quad 0\le x\le 1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1$$

من أجل : $h=0.\,1,\ k=0.05$ ثم قارن الحل من أجل: $h=0.05,\ k=0.1$ ثـم مـع $h=0.\,01,\ k=0.05$ وقارن مع الحل التحليلي من أجل $t=0.5$.

24- حل المعادلة التفاضلية التالية (معادلة الأمواج):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=0,\quad 0<x<1,\quad t>0$$

مع شروط البدء والشروط الحدية:

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\sin 2\pi x,\quad 0\le x\le 1,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=2\pi\sin 2\pi x,\quad 0\le x\le 1$$

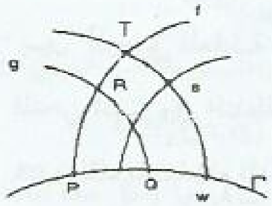
مـــن أجـــل : $k=0.1$ $h=0.\quad 1,$ وقـــارن مـــع الحـــل التحليلـــي $u(x,t)=\sin 2\pi x(\cos 2\pi t+\sin 2\pi t)$، من أجل $t=0.3$.

25- استخدم طريقة المميزات لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+1=0$$

التي تحقق الشروط : $u=\frac{\partial u}{\partial y}=x$ ، من أجل $y=0$ من أجل $0\le x\le 1$.

أوجد الحل في النقـاط : T, S, R المقابلـة لــ $y>0$ ونقاط البدء w, Q, P ذات الإحـداثيات (علـى الترتيـب) $(0.4,0)$، $(0.5,0)$، $(0.6,0)$ حيث النقاط موضحة بالشكل التالي:



26- استخدم طريقة المميزات لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x^2-x-2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

التي تحقق الشروط: $u=x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1$، من أجل $y=0$ من أجل $0\le x\le 1$.

أوجد الحل في النقاط: T, S, R المقابلة لـ $y>0$ ونقاط البدء w, Q, P ذات الإحداثيات (على الترتيب) (0.4,0), (0.5,0), (0.6,0) حيث النقاط موضحة بالشكل السابق.

27- استخدم طريقة المميزات لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2=0$$

التي تحقق الشروط: $u=\frac{\partial u}{\partial y}=x$ ، من أجل $y=0$ من أجل $0\le x\le 1$.

أوجد الحل في النقطة R المقابلة لـ $y>0$ ونقاط البدء P(0.4,0) و Q(0.5,0)

حيث النقاط موضحة بالشكل السابق.

28- العلاقات المقابلة للمعادلة التفاضلية $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ هي: $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial t}$، بين كيف يمكن كتابة هاتين المعادلتين بالشكل الآتي:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{2\delta x}(p_{i+1,j}-p_{i-1,j})=\frac{1}{\delta t}\{q_{i,j+1}-\tfrac{1}{2}(q_{i+1,j}+q_{i-1,j})\}$$

$$\frac{1}{2\delta x}(q_{i+1,j}-q_{i-1,j})=\frac{1}{\delta t}\{p_{i,j+1}-\tfrac{1}{2}(p_{i+1,j}+p_{i-1,j})\}$$

و كذلك:

$$\text{b)}\quad \frac{1}{\delta x}(p_{i+\frac{1}{2},j}-p_{i-\frac{1}{2},j})=\frac{1}{\delta t}(q_{i,j+1}-q_{i,j})$$

$$\frac{1}{\delta x}(q_{i,j+1}-q_{i-1,j+1})=\frac{1}{\delta t}(p_{i-\frac{1}{2},j+1}-p_{i-\frac{1}{2},j})$$

29- بين أن حل المعادلة التفاضلية $x\frac{du}{dx}+u\frac{du}{dy}=x+y$ في النقطة (1.1) على المنحن المميز وفي النقطة (1.0) هو $u=1.105$ أعطي من أجل $u=1$ على المحور ox وذلك باستخدام التكامل العددي.

30- لتكن مسألة القيم الحدية التالية، والتي تعرف باسم مسألة نيومان:

$$\begin{cases}-\Delta u(x)+u(x)=f(x), & x\in\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x)=0, & x\in\Gamma=\partial\Omega\end{cases}$$

حيث أن الحل u (للعلاقة القوية) $u\in L^2(\Omega)$ و $f\in C^0(\overline{\Omega})$، المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة (المتحولية) لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب.

31- لتكن مسألة القيم الحدية التالية، والتي تعرف باسم مسألة ديريخلية:

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+u(x)=f(x), & x\in\Omega \\ u(x)=0, & x\in\Gamma=\partial\Omega \end{cases}$$

حيث أن الحل u (للعلاقة القوية) $u\in L^2(\Omega)$ و $f\in C^0(\overline{\Omega})$، المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة (المتحولية) لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب.

32- لتكن مسألة القيم الحدية التالية، والتي تعرف باسم المسألة المختلطة:

$$\begin{cases} -\Delta u(x)+u(x)=f(x), & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x)=g, & x\in\Gamma_1, \\ \Gamma=\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1 \end{cases}$$

حيث أن الحل u (للعلاقة القوية) $u\in L^2(\Omega)$ و $f\in C^0(\overline{\Omega})$، المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب.

33-لتكن مسألة القيم الحدية التالية:

$$-(pu')'+qu'+ru=f \quad on:]a,b[$$
$$u(a)=\alpha \quad ; \quad u(b)=\beta$$

المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب. (خذ الفضاء $H_0^1(]a,b[)$)

ثم برهن على وجود ووحدانية الحل (نظرية لاكس ميلغرام) وحل هذه المعادلة.

34- لتكن مسألة القيم الحدية التالية (مسألة نيومان الحدية ببعد واحد)

$$-\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx})+\mu u=f \quad on:]0,1[$$
$$u'(0)=u'(1)=0$$

المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب. (خذ الفضاء $H^1(]0,1[)$)

ثم برهن على وجود ووحدانية الحل (نظرية لاكس ميلغرام) وحل هذه المعادلة.

35- لتكن مسألة النهايات التالية، سميت مسألة نهايات لأن التابع المجهول يحقق شروط في النهايات، (تعرف أيضاً باسم مسألة ديريخليه الحدية ببعد واحد)

$$-\frac{d}{dx}(x\,\tfrac{du}{dx}) + \mu u = f \quad on :]0,1[$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

المطلوب كتابة العلاقة الضعيفة (المتحولية) لهذه المسألة وذلك بتطبيق علاقة غرين وبعد اختيار التابعي من فضاء سوبولوف المناسب. (خذ فضاء الحل $H_0^1(]0,1[)$)، ثم برهن على وجود ووحدانية الحل (نظرية لاكس ميلغرام) وحل هذه المعادلة.

36-لتكن مسألة النهايات التالية (لأن التابع المجهول يحقق شروط في النهايات):

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad on :]0,1[$$
$$u(0) = \alpha \quad ; \quad u(1) = \beta$$

المطلوب حل هذه المعادلة بطريقة الفروق المنتهية.

المراجع العلمية

المـراجع العربية

1- الطرق الرياضية للفيزياء، د. هاشم عبد اللي، لطلاب السنة الرابعة، منشورات جامعة حلب، 1991.

2- التحليل العددي، سلسلة سيشوم، فرانسيس شيد ، دار ماكجر وهيل للنشر، 1968.

3- الرياضيات الأساسية للحاسب، سلسلة سيشوم، سيمو و ليبشتز، دار مـاكجر وهيـل للنشر، 1982.

4- التحليل العددي والبرمجة، د. نصر الدين عيد، لطلاب السنة الثالثة – فيزياء- كلّية العلوم- منشورات جامعة حلب ، ٢٠٠٦ م.

5- التحليل العددي (١)، د. هاشم عبد اللي، لطـلاب الـسنة الثانيـة-إحـصاء رياضـي، منشورات جامعة حلب ، ٢٠٠٤م.

6- الخوارزميات والبرمجة، د. سعد الدين العبد الله، لطـلاب الـسنة الرابعـة، منـشورات جامعة حلب، 1996.

7- التحليل العددي، د. هاشم عبد اللي، لطلاب السنة الثالثـة-ر-، منـشورات جامعـة حلب ، 1991 م.

8- التحليل العددي، د. محمد غشيم ، لطلاب السنة الثانية– كلية الهندسـة المعلوماتيـة، منشورات جامعة حلب ، ٢٠٠٣ م.

9- الرياضيات العددية، د. سامح جزماتي- لطلاب السنة الثالثة – كلية الهندسة المدنية، منشورات جامعة حلب ،١٩٨٩ م.

10- التحليل العددي-٢-، د. محي الدين البعلي، د.محمـد صبح، د. علـي جمـال الـدين، لطلاب السنة الرابعة معلوماتية – كلية العلوم، منشورات جامعة دمشق ، ١٩٩٥ م.

11- التحليل العددي -٢-، د. نصر الدين عيد لطلاب السنة الثالثة – إحصاء رياضي- كلية العلوم- منشورات جامعة حلب، ٢٠٠٦ م.

12- " طريقة تكرارية جديدة متقاربة تربيعياً لحل المعادلات الجبرية غير الخطية"،نصر الدين عيد مجلة بحوث جامعة حلب – العدد (72) ٢٠١٠م.

المراجع الأجنبية

1. Methods in numerical analysis, NIELSEN,1964.
2. Numerical methods and fortran programming, DANIEL.D– McCRACKEN WILLIAM.S.DORN,1964.
3. Introdoction to numerical methods and fortran programming; Thomas Richard McCalla, 1966.
4. Méthode de calcul numérique, J.P. NOUGIER, 1983, Masson, Paris.
5. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, P.G. CIARLEI, 1982, Masson, Paris.
6. Method of successive approximations, 1979, N.Ya. Vilenkin, Mir Publishers, Moscow.
7. The *theory and applications of iteration methods,* Argyros, I. K. and F. Szidarovszky, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
8. "Ananlyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Méthodes directes"P. Lascaux & R. Theodor ;; Tome 2 ; éditions Masson, 2ème édition, 1994.
9. Finite Elements Analysys, Joseph E. Flaherty and Amos Eaton, 2000, , New York
10. Resolution Numerique des Grands Systemes lineaires, Gene-Golub et Gerard-Meurant, 1983, , Editions Eerolles, Paris.
11. 11.Methods in numerical analysis, NIELSEN,1964, The Macmillan Company, New York.
12. 12.Méthode de calcul numérique, J.P. NOUGIER, 1983, Masson, Paris.
13. 13.Numerical Analysis, Richard L.Burden, J.Douglas Faires, 1989, PWS-KENT Publishing Company, Boston.
14. Eléments de calcul numérique B.Demidovitch. et I. Maron, 1973, édition de Moscow.

15. Method of successive approximations, 1979, N.Ya. Vilenkin, Mir Publishers, Moscow.
16. "The Numerical Solution of ordinary and partial differential equations" GRANVILLE SEWELL1992, ACADEMIC PRESS, INC,New York.
17. "Introduction a l'nalyse Numérique des Equation aux derives partielles"P.A.Raviart & J.M.Thomas 1983, Masson, Paris.
18. 18.Cours de Mathématiques Superieures, V.Smirnov, Tome III, Traduit du Russe, 1972, Edition Mir.
19. Finite Element Methods, Ronald L.Huston Chris E.Passerello, Marcel Dekker INC, New York, 1984.
20. Numerical Solution of Partial Differential Equations, K.W.Morton and D.F.Mayers, Cambridge university Press, 1994.
21. 21.Résolution numérique des grands systémes linéaires, Gene H-Glub Gérard A-Meurant, Editions Eyrolles, 1983, Paris.
22. 22."Méthodes numériques appliquées" A. Gourdin & M. Boumahrat; éditions Techniques et Documentations Lavoisier, 1989.
23. 23."A first course in numerical analysis" A. Ralston & P. Rabinowitz;; éditions Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
24. 24."Ananlyse numérique I : Systèmes linéaires et non linéaires"M. Sibony & J. Cl. Mardon ;; éditions Herman,1982.
25. "Ananlyse numérique III : Itérations et approximations" M. Sibony; éditions Herman, 1988.
26. "Analyse numérique : cours et exercices pour la licence" M. Schatzman ; Inter éditions, 1991.
27. "Introduction à l'analyse numérique",J. Baranger ; éditions Herman, 1993.
28. "Programmes et exercices sur les méthodes numériques" J.C. Vaissière & J.P. Nougier; éditions Masson, 1990.
29. "Analyse numérique et équations différentielles"J.P. Demailly ; éditions Mc Graw-Hill, 2ème édition, 1978.
30. "Introduction to numerical analysis", J. Stoer & R. Bulirsch ;; éditions Springer-Verlag, 1980.
31. Résolution numérique des equations aux derives partielles(PDE), Sébastien charnoz et Adrian Daerr.
32. Numerical Partial Differential Equations for Environmental Scientists and Engineers, Daniel R. Lynch, Springer, 2005.

33. Finite Difference Methods for Differential Equations, Randall J. LeVeque, University of Washington, 2005.
34. Analyse Numérique et Optimisation, Grégoire.Allaire, Edition de l'Ecole Polytechnique, Paris, 2005.
35. FEM/BEM NOTES, Peter Hunter, University of Auckland, New Zeland, 2001.
36. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientist, Andrei D. Polyanin, Chapman & Hall/crc, 2001.
37. Numerical Solution of Partial Differential Equations, B. Neta, Monterey, California, 2003.
38. Numerical Solution of Partial Differential Equations, Second Edition, Cambridg University Press, K. W. Morton and D. F. Mayers, 2005.
39. Mathematical Methods for Engineers and Scientists, K. T. Tang, Springer, 2006.
40. Numerical Method for Partial Differential Equations, Andre Jaun, Edition of the Swedish Netuniversity, 2003.
41. Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, S. D. Conte and Carl de Boor, 1980.
42. An Introduction to Partial Differential Equations, Michael Renardy and Robert C. Rogers, Springer, 2000.
43. " Anew Hybrid iteration method for solving algebraic equations", Journl of Applied Mathematics and Computation, IDE.N, Elsevier Editorial, Amsterdam, Netherlands,Vol (195), 2008.
44. . "On modified Newton methods for solving a non linear algebraic equations", Journl of Applied Mathematics and Computation, IDE.N, Elsevier. Editorial, Amsterdam, Netherlands,Vol (198), 2008.

المصطلحات العلمية

A

Absolute error	الخطأ المطلق
Aitken's interpolation	استيفاء أيتكن
Approximation	تقريب
Approximation Function	تابع تقريبي
Approximation value	قيمة تقريبية
An upper bound an the error	الحد الأعلى للخطأ

B

Baily's integrative method	طريقة بايلي التكرارية
Bisection method	طريقة التنصيف
Boundary conditions	شروط حدية
Boundary value	قيمة حدية
Boundary value problem	مسألة القيمة الحدية
Brauer's theorem-	نظرية براوير

C

Central	مركزي
Central difference	فروق مركزية
Characteristic	طريقة المميزات
Cholesky method	طريقة شولسكي
Chebysheve polynomials	كثيرات حدود تشيبشيف
Coefficients	عوامل–أمثال
Cnovergence	تقارب

D

Data بيانات (معطيات)

Definite integral تكامل محدود

Derivative المشتق

Differences فروق

Differential equation معادلة تفاضلية

Distributions توزيعات

Divided differences الفروق المقسومة

Dual space فضاء الثنوية

E

Elliptic ناقصي

Elliptic partial differential equation معادلة تفاضلية جزئية ناقصية

Equation معادلة

Errors أخطاء

Euler's method طريقة أولر

Exponential function تابع أسي

Explicit صريح

Explicit method الطريقة الصريحة

F

Finite Element عنصر منته (محدود)

Finite differences فروق محدودة

First degree درجة أولى

First order المرتبة الأولى

Function تابع

Functions	توابع

G

Gauss method	طريقة غوص
Gauss- Siedel method	طريقة غوص-سايدل
General solution	حل عام
Gerschgorin's theorem	نظرية جيرشغورين

H

Heun Method	طريقة هوين
Horner method	طريقة هورنر

I

Implicit Method	الطريقة الضمنية (الظاهرية)
Initial conditions	شروط ابتدائية
Iteration	تكرار
Iterative methode	طريقة تكرارية
Iteration	تكرار
Interpolation	الاستيفاء
Inverse linear interpolation	الاستيفاء الخطي العكسي

J

Jacobi Iteration	طريقة جاكوبي التكرارية

L

Lagrange interpolation	استيفاء لاغرانج
Laplace's equation	معادلة لابلاس
Lax Milgram theorem	نظرية لاكس-ميلغرام

Least square method	طريقة المربعات الصغرى

m

Method	طريقة
Matrix inverse method	طريقة مقلوب مصفوفة

n

Newton's method	طريقة نيوتن
Newton's formula	علاقة (صيغة) نيوتن
Norm	نظيم
Numeric	عددي
Numerical analysis	تحليل عددي
Numerical differentiation	تفاضل عددي
Numerical Integration	تكامل عددي
Numerical methods	طرق عددية

o

Order	مرتبة
Ordinary differential equation	معادلة تفاضلية عادية
Orthogonal	متعامد
Orthogonal function	تابع متعامد
Over relaxation method	طريقة الاسترخاء

p

Parabolic partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية مكافئية
Partial derivative	المحور
Percentage error	الخطأ المئوي
Pivot	المحور

Poisson's equation	معادلة بواسون
Procedures	مشتق جزئي
Polynomial approximation	التقريب بواسطة كثيرات الحدود

R

Rectangular formula of integration	صيغة التكامل بالمستطيلات
Relaxation method	طريقة الاسترخاء
Residual	الباقي
Root	جذر
Rectangular formula of integration	صيغة التكامل بالمستطيلات
Root	جذر
Rounding off	التدوير
Runge – Kutta method	طريقة رانج كوتا

S

Secant	القاطع
Significant figures	أشكال معنوية
Simpson's formula	صيغة سيمبسون
Sobolev Spaces	فضاءات سوبولوف
Solution	حل
Successive approximation method	طريقة التقريب المتتالي
System of equations	مجموعة معادلات
Successive over relaxation S.O.R	طريقة الاسترخاء المتتالي
Support of function	تعريف دعامة تابع

T

Trapezoidal formula	علاقة (صيغة) شبه المنحرف

U

Under relaxation	تحت الاسترخاء
Unextrapolated Liebmann method	طريقة الاستيفاء الخارجي لـ ليبمان
Upwind method	الطريقة العلوية

V

Value	قيمة
Variational Formulation	العلاقة المتحولية

W

Wave equation	معادلة موجية
Weight function	تابع الوزن

تم تدقيق الكتاب علمياً من قبل:

الدكتور
حمدو النجار

الدكتور
محمد جنيد العمر

الدكتور
بشير نور خراط

المدقق اللغوي
الدكتور
محمود الجاسم

Aleppo University Publications
Faculty of Science

NUMERICAL ANALYSIS

By
Dr. Nasr AL-din IDE

1220413

Academic Year
2010 - 2011

سعر المبيع للطالب : ٣٠٠ ل.س