الجمهورية اليمنية

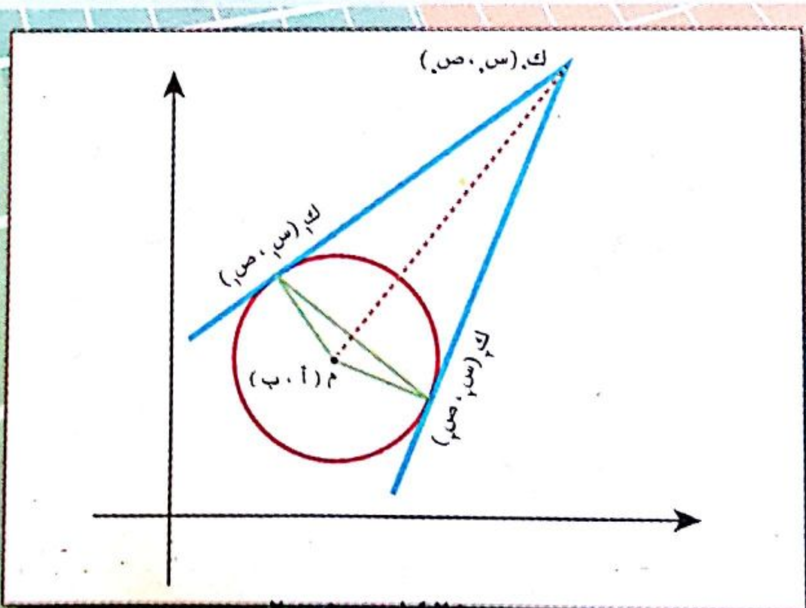
وزارة التربية والتعليم

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي (القسم العلمي)



١٤٢٥هـ - ٢٠٠٥م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثاني الثانوي / القسم العلمي

المؤلفون

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حمد الحوري
د. عوض حسين البكري
د. محمد رشاد الكوري
د. محمد حسن عبده المسوري
د. عبدالله سالم بن شحنة
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
د. علي شاهر القرشي
أ. مريم عبدالجبار سلمان

أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً
أ. محمد علي مرشد
أ. يحيى بكار مصفر
أ. عبدالباري طه حيدر
أ. نصر محمد بدر
أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. عادل علي مقبل البنا
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

أ. يحيى محمد الكنز

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

الإخراج الفني

الصف الطباعي والرسم والتصميم : علي عبد الله السلفي

تدقيق التصميم : هاني مقطش

قرَّرَتْ اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٤١)، وتأريخ ١ / ٩ / ٢٠٠٣م
طباعة هذا الدليل وتوزيعه للعام الدراسي ٢٠٠٣ / ٢٠٠٤م .

الطبعة الأولى التجريبية

للعام الدراسي ١٤٢٤هـ – ١٤٢٥هـ / ٢٠٠٣م – ٢٠٠٤م .

Scanned by CamScanner

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

ونحن نتطلع بتيقظ واهتمام إلى السنوات المقبلة – الفترة الحا سمة في مسيرة التربية والتعليم في بلادنا – مما يفرض علينا مزيداً من الجهد؛ لإيجاد معلم قادر على العطاء، والإنجاز، متفهم لما يجري من تطوير في المناهج التعليمية ، وأساليب تنظيمها وإنتاجها ، والتعامل مع التجديدات التربوية التي تحقق وظيفية المدرسة في المجتمع ، كل ذلك يضيف أدواراً جديدة للمعلم ، مما يتطلب منه الاستعانة بعدد من الأساليب والأدوات التي تمكنه من استيعاب أدواره الجديدة .

ومن بين الأدوات التي تساعد المعلم في تطوير أدائه داخل الصف الدراسي ، والمدرسة دليل المعلم المصاحب لكتاب الطالب ، والذي يتكون من مجموعة من الأساليب التي تمكنك من إدارة التعلم المدرسي ، وفهم الكتاب المدرسي كونه يرتبط به .

والدليل الذي بين يديك هو أحد الأدوات التي تعينك على أداء رسالتك، وعليك البحث والاطلاع على كل ما هو مفيد من المعلومات بحسب تنوع مصادر المعرفة التربوية والعلمية ، وتدريب طلابك على كيفية التعلم من الكتاب المدرسي ومن غيره من المصادر التعليمية .

بالإضافة إلى ما يتم من تطوير للمناهج والكتب الدراسية وأدلة المعلمين فإننا نؤكد العزم على إصلاح التربية والتعليم بشكل متكامل ، والذي لن يتوقف عند إصدار الكتب المدرسية، وأدلة المعلمين فقط، بل سيتعداه إلى تدريب المعلمين، وإعادة تأهيلهم ، وتحديث أنماط التوجيه والتقويم والاختبارات .

كما لاننسى الجهود الكبيرة لكل من شارك في إنجاز عملية التطوير للمناهج والكتب الدراسية؛ فنتوجه إليهم بجزيل الشكر لما بذلوه من عمل في سبيل تجسيد أهداف المنهج وتطلعاته؛ خدمةً وإسهاماً في بناء مستقبل أفضل لأبنائنا وبناتنا .

والله من وراء القصد ،،

أ.د. عبدالسلام محمدالجوفي

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

مقدمة الدليل

عزيزنا المدرس . . .

عزيزتنا المدرسة . . .

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي القسم العلمي، فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين .

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة، وهذه الحصص لن تتم إلا بتخطيط جيد . وهدف هذا الدليل هو مساعدتك للوصول إلى هذا النوع من التخطيط .

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية، وفق استراتيجية تربوية شاملة وخطة واضحة المعالم . ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيرة لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لأدلة المعلمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها استفادة حقيقية في مجال تخطيط الدروس وتنفيذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سليمة وسلسة وشيقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ؛ فإننا أشد حرصاً على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرائق، وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعلم . .

ولقد وضعنا في بداية هذا الدليل أهداف تدريس الرياضيات للمرحلة الثانوية عامة ، وللصف الثاني الثانوي بشئ من التفصيل من واقع وثيقة المنهاج ؛ ثم أتبعناها بثلاث مقدمات توضيحية حول الكتاب المدرسي وكتاب التمارين والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيت عليها وكيفية استخدامها .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد .

المؤلفون

المحتويات

المحتويات

المحتويات

الموضوع	الصفحة

المحتويات

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تعرُّف المتعلم على الأعداد المركبة ، وإجراء العمليات عليها .
٢ – تعرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .
٣ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال) ، وأنواعها .
٤ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية ، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .
٥ – تعرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .
٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .
٧ – تعرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها ، واستخدامها ، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .
٨ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام ، المجموع) ، واستخدامها .
٩ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .
١٠ – تعرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال ، وحسابها ، وإيجاد مشتقاتها .
١١ – تعرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال ، وحسابها باستخدام القواعد .
١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .
١٣ – تعرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة ، وذات العمليتين .
١٤ – تعرُّف المتعلم على المحددات ، والمصفوفات ، والمتجهات ، وإجراء العمليات عليها .
١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات ، والمحددات ، في حل مجموعات من المعادلات الخطية .
١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .
١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى ، واستنتاج معادلة المماس .
١٨ – تعرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها ، وإجراء العمليات عليها .
١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران ، والتكبير ، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .
٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢١ – تعرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .
٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت ، وبعض معاملات الارتباط .
٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات ، واستخدامها في حل بعض المسائل .
٢٥ – تعرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .
٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات ، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .

٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .

٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة .

٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة .

٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي

بعد الانتهاء من دراسة منهاج الرياضيات للصف الثاني الثانوي يكون المتعلم قادراً على :

١ – التعرُّف على النظام ذي العمليتين وخواصه (الحقل) .

٢ – التعرُّف على الخصائص الأساسية لحقل الأعداد الحقيقية .

٣ – التعرف على القيمة المطلقة ، وخواصها ، وحسابها .

٤ – التعرُّف على المصفوفات ، والمحددات، وإجراء العمليات عليها .

٥ – استخدام بعض خواص المصفوفات، والمحددات، في حل مجموعات من المعادلات الخطية .

٦ – التعرف على بعض الدوال ، وإيجاد الدالة العكسية ،وإيجاد تركيب دالتين.

٧ – التعرف على مفهوم اللوغاريتم وخواصه، وإستخدامه، والتمييز بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية ورسم منحنى كل منهما.

٨ – التعرف على مفاهيم الدائرة في المستوى الإحداثي.

٩ – استنتاج معادلة الدائرة وإيجاد معادلة المماس لدائرة، وحساب طوله من نقطة خارجة عنها.

١٠– التعرف على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بين المستقيمات والمستويات في الفراغ.

١١ – برهنة بعض المبرهنات الهندسية الفضائية .

١٢ – استنتاج بعض العلاقات للنسب المثلثية ، وحل المعادلات المثلثية .

١٣ – التعرف على على مفاهيم المتتالية الحسابية والهندسية، وبعض قوانينها (الحد العام، مجموعهما) .

١٤ – التعرف على مفهوم النهاية، وحساب نهايات بعض المتتاليات والدوال.

١٥ – التعرف على مفهوم الاشتقاق واستنتاج بعض قوانينه.

١٦ – حساب مشتقات بعض الدوال.

١٧ – التعرف على مفاهيم الاتصال ومبرهنات الاتصال واستخدامها في حل بعض المسائل على الدوال.

١٨ – التعرف على مفاهيم الإرتباط ، والانحدار، وحساب معامل الارتباط.

١٩ – التعرف على الاحتمال وحسابه.

٢٠ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية.

٢٠ - استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية.
٢١ - تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والصبر واحترام آراء الآخرين.
٢٢ - الرغبة في الاستزادة من الرياضيات والاستمرار في دراستها.
٢٣ - تقدير قيمة الرياضيات واسهامها في خدمة المواد الاخرى.
٢٤ - تذوق جمال وتماسك البناء الرياضي.
٢٥ - تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في وضع أساسيات العلوم الرياضية.

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	الحلقة والحقل	١٦
٢	الدوال الحقيقية	٢٤
٣	المتتاليات	١٨
٤	اللوغاريتمات	٢١
٥	النهايات والاتصال والاشتقاق	٣١
٦	المصفوفات والمحددات	٢١
٧	الهندسة الإحداثية	٢٤
٨	الهندسة الفضائية	٢١
٩	حساب المثلثات	٢٥
١٠	الإحصاء والإحتمالات	٢٢
	إجمالي عدد الحصص	٢٢٣ حصة

الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

∋	عنصر في / ينتمي إلى
∌	ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى
⊃	مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊇)
⊅	ليست مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊉)
{ ... }	حاصرتا المجموعة
∩	تقاطع
∪	اتحاد
∅ ، { }	المجموعة الخالية (فاي)
سَ	متممة المجموعة س
س / ص = س − ص	الفرق بن المجموعتين س، ص.
س × ص	حاصل ضرب المجموعتين س، ص.
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية .
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها ص+ ، ص−)
ك	مجموعة الأعداد الكسرية (ومنها ك+ ، ك−)
ن	مجموعة الأعداد النسبية (ومنها ن+ ، ن−)
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية (ومنها ح+ ، ح−)
[ب ، أ]	الفترة المغلقة أ ، ب .
]ب ، أ[	الفترة المفتوحة أ ، ب .
[ب ، أ[	الفترة نصف المفتوحة من جهة أ .
]ب ، أ]	الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .
π	النسبة التقريبية (باي) .
<	أكبر من
>	أصغر من
≤	أكبر من أو يساوي
≥	أصغر من أو يساوي
هـ	الأساسي الطبيعي (عدد حقيقي غير نسبي)
لط	لوغاريتم العدد الطبيعي
=	يساوي .
≯	ليس أصغر من

تابع / الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

$\ngtr$	ليس أكبر من .
$\neq$	لا يساوي
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	عمودي على
$\not\perp$	ليس عموديا على
$\approx$	يساوي تقريباً
$\equiv$ ، $\simeq$	يكافئ
$\sim$	يشابه
$\cong$	يطابق
$\because$	بما أن
$\therefore$	إذن
$\overline{\text{اب}}$	القطعة اب
$\lvert\overline{\text{اب}}\rvert$	طول القطعة اب .
$\overrightarrow{\text{اب}}$	الشعاع الذي بدايته النقطة ا .
$\overleftrightarrow{\text{اب}}$	المستقيم اب (الذي يمر بالنقطتين ا ، ب) .
$\propto$	يتناسب
مجـ	المجموع
$\triangle$	المثلث
$\measuredangle$ ا ب جـ	الزاوية اب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
ق ($\measuredangle$ ا ب جـ)	قياس الزاوية اب جـ .
جا	جيب الزاوية
جتا	جيب تمام الزاوية
ظا	ظل الزاوية
ظتا	ظل تمام الزاوية
قا	قاطع الزاوية
قتا	قاطع تمام الزاوية
[س]	صحيح س أو أكبر عدد صحيح س
$\pm\infty$	سالب وموجب ما لا نهاية
$\lvert\ \rvert$	القيمة المطلقة
ص$^+$	مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

تابع / الرموز المعتمدة في كتب الرياضيات لمرحلتي التعليم الأساسي والثانوي

$\forall$	لكل
$\exists$	يوجد على الأقل
~ أ	نفي أ
$\Leftarrow$	يقتضي
Δ ، δ	دلتا
ح$_{\text{ن}}$	الحد النوني للمتتالية (الحد العام)
< ح$_{\text{ن}}$ >	متتالية حسابية أو هندسية حدها العام ح$_{\text{ن}}$
ε	ابسلون
$\wedge$	(و) رمز العطف
$\vee$	(أو) رمز الفصل
ت$^{-1}$	التطبيق العكسي للتطبيق ت
ت$_1 \circ$ ت$_2$	تركيب تطبيقين ت$_1$ ، ت$_2$
$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$	الجذر النوني للعدد أ
حـ	حدودية
ط*	ط / { ٠ }
ص*	ص / { ٠ }
ن*	ن / { ٠ }
ح*	ح / { ٠ }
$\overrightarrow{\text{أب}}$	المتجه أب
($\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$)	الزاوية الموجهة ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{\text{و أ}}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{\text{و ب}}$
$\overrightarrow{\text{ف}}$ (س ، ص)	المتجه القياسي
$\overrightarrow{0}$	المتجه الصفري
$\lvert \overrightarrow{\text{ف}} \rvert$	طول متجه
$\overrightarrow{\text{س}}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
$\overrightarrow{\text{ص}}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
$\overrightarrow{\text{ف}}_1 \bullet \overrightarrow{\text{ف}}_2$	الضرب الداخلي لمتجهين
ك $\bullet \overrightarrow{\text{ف}}$	ضرب متجه بعدد حقيقي
نهـــا	نهاية
دَ (س)	مشتقة الدالة د (س)
هـ	رو
$\Leftrightarrow$	إذا وفقط إذا

منهجية إعداد الكتاب المدرسي وكيفية استخدامه

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرائق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنيٌ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية ، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة مع مراعاة الدقة والصرامة العلمية، والاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي، إضافة إلى التعزيز بالتدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة .

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات، واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى عالٍ ، منها : التصنيف، والمقارنة، وتكوين المفاهيم والعلاقات، والتجريد والتعميم، والتفسير والترجمة . والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق، وبما ينمي لدى الطلبة جوانب الإبداع والابتكار .

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم إلى جانب العادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل من خلال قدرٍ كافٍ من الأمثلة ، والتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجياً متصاعداً في الصعوبة . وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية، كما تهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات والرموز المناسبة ، دون مراعاة دقتها الرياضية دون مبالغة، ومراعاة الربط بالتطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم.

جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ، وهذه عملية تصنيف وتمييز ، بل عملية تعميق، ومن ذلك تمت العناية بصياغة تعاريف المفاهيم .

٦ – معالجة البرهنة من خلال الحصول على عدد من المبرهنات وبرهانها وحل بعض التمارين والمسائل عليها، ويتم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد تم الاهتمام في هذا المجال بتطوير أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية .وقد ظهرت البرهنة لأول مرة في الصفوف (٧– ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي:

أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة .

ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان يتركز هذا في الصف السابع) .

جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

د) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن . وفي المرحلة الثانوية يتم الإرتقاء بالبرهنة من حيث الأساليب والأفكار ،وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات بشكل موازٍ لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات ، بحيث لا يطغى واحد على الآخر. وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا تمام المهارة .

تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة. والعناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات .ومن المهارات التي يجب أن يتقنها طالب هذه المرحلة استخدام الآلات الحاسبة واستخدام الجداول والرسوم البيانية وتفسيرها . وما شابه ذلك .

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة. ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد يمتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في كل من الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية. ويتمثل حل المسألة في الخطوات التالية :

أ) حصر المعطيات .

ب) تحديد المطلوب .

جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل، ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

هـ) مراجعة الحل (التحقق من صحة الحل) : وهو مطلب تربوي، أكثر من كونه علميًا ، إذ يساعد على تنمية القدرة على النقد الذاتي، حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم . إن المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ دروسه اليومية . وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع العلمية والتربوية الأخرى ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عدداً منها في الدليل في نهاية كل وحدة .

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة خارج الصف ، إذا كان وقت الحصص لا يستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . ومما سبق نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ، وللاسف لازال يمارسه كثير من المدرسين دون إدراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد ضمن ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية .

هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة ، كما ذكرنا في أولاً .

منهجية إعداد كتاب التمارين وكيفية استخدامه

من ضمن استراتيجيات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، يأتي إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تلبية لهذه الاستراتيجية وتحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوى على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند في الكتاب المدرسي فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغنى عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو نوع من زيادة التمرن، واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل، وتساعد على تفهم العلاقة بين بنودها المختلفة، وبما يساعد على التعمق في محتوى كل وحدة ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة، وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل ، حيث أن اختبار الدليل قد وضع وفقاً لأهداف الوحدة .

واستناداً لماسبق ، فقد خطط أن يستخدم كتاب التمارين على النحو التالي :

أولاً : يمكن الاكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

ثانياً : نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل ، يقوم المدرس باختيارها بدقة، ويمكن مراجععتها أو مناقشتها في وقت الحصص ، أوحسبما يراه المدرس مناسباً.

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كواجب منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه . وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم .

ومن خلال هذا نرى أن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم .

منهجية إعداد دليل المعلم وكيفية استخدامه

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه المرحلة؛ ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية، وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداع المدرس في سلوكه التدريسي، الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار خصوصيات طلبته. ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يجب الأخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ - الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا وضع تشكيل كل وحدة على النحو التالي :

أ) جدول بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينقص كثيراً عن هذا العدد المقترح من الحصص .

ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها. وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة - إن لم تكن متطابقة - مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على فكرة عامة لمكونات الوحدة الدراسية، وعلى لمحة تاريخية، ومفاهيم وتعميمات الوحدة، وبعض الأخطاء الشائعة إذا دعت الضرورة لذكرها وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

د) أهداف لكل درس، مع ذكر العدد المقترح للحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوأن عام لكل حصة دراسية، ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

هـ) كما سبق الإشارة ، يعطى اختبار الوحدة الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي، وتهيئة لاختبار الوحدة الحقيقي. ثم يعطي المدرس اختبار الوحدة المعد في الدليل، ويمكنه أن يعد اختباراً آخراً وفق ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ومن خلال تحليل إجابات الطلبة يمكن أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ - كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج . ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءةمتمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهيدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من

عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفه بشكل يومي ، ولا يقتصر استخدامه - كما تعود كثير من المدرسين - على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية كبيرة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشئ من تحقيق الذات . وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلته وتمارينه، وإلا فإننا نوجه نظره إلى كتاب التمارين. كما يجب على المدرس أن يضع ذلك من ضمن أهداف الدرس ، مثلاً إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – كل ما يشار إليه من أساليب لتنمية القدرات العقلية ، وعلى المدرس تنفيذها بشكل أو آخر ، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما أتيحت الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية من حيث العرض الكتابي، يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه.

وبعد عرض المنهجيات الثلاث لإعداد الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ودليل المعلم ، فإن على المدرس تتبع هذه المنهجيات في عملية التدريس حصة حصة وبنداً بنداً ، ويحرص على تطبيقها في الممارسة الفعلية للتدريس.

الوحدة الأولى

الحلقة والحقل

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١ – ١	مراجعة وتمهيد	٢
١ – ٢	الحلقة	٥
١ – ٣	الحقل	٤
١ – ٤	حقل الأعداد الحقيقية	٣
١ – ٥	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	١٦

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف النظام الرياضي ذا العمليتين .

٢ – يصنّف النظام الرياضي ذا العمليتين إلى (حلقة / حقل) .

٣ – يتحقق من أن نظاماً رياضياً يمثل حلقة أو حقل.

٤ – يحدّد الحلقة التامة من حلقات معطاة .

٥ – يبرهن أن كل حقل هو حلقة تامة .

٦ – يبرهن أن في الحقل (سـ ، * ، ⭘) يكون للمعادلة(أ ⭘ س) * ب = جـ حلّ وحيد .

٧ – يبرهن الخصائص الأساسية للحلقة والحقل .

٨ – يستخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية في حل معادلات ومتراجحات الدرجة الأولى بمتغير واحد .

المقدمة

تناولنا في الصف الأول الثانوي الأنظمة الرياضية ذات العملية الواحدة واستكمالاً للموضوع سنتناول في هذه الوحدة النظام الرياضي ذي العمليتين وخواصه .

لمحة تاريخية

نشأ مفهوم الزمرة تاريخياً من محاولة تعميم الطريقة الكلاسيكية لحل المعادلات ذات الدرجة الرابعة أو أقل إلى حل معادلات ذات درجة أعلى . ويعد اكتشاف الزمرة نقطة تحول هامة في نمو وتطوير الجبر وبالتالي في تطوّر الرياضيات بصفة عامة . وفي الأسطر التالية نستعرض (بصورة موجزة) ، أهم مراحل تطور الجبر ابتداء . بجذور مشكلة التعميم إلى أن أصبح بصورته التركيبية المجردة الحالية :

- في عام ١٥٤٥م توصّل الرياضي الإيطالي ل . فيراري (L. Ferrari) إلى قانون عام لايجاد جذور كل معادلة من الدرجة الرابعة . (من المعلوم أن الخوارزمي استطاع إيجاد حلول بعض المعادلات من الدرجة الثالثة والرابعة ، علماً بأن القانون العام لحل معادلات من الدرجة الثانية كان معروفاً لدى البابليين قبل حوال ٤٠ قرناً) .
- يُعد القرنان السابع عشر والثامن عشر من أخصب الفترات في نمو علم الجبر ووضع الأسس لتطوراته الحديثة خلال الدراسة النظرية العامةللمعادلات . ويُعد الرياضي الشهير جاوس (Gauss) (١٧٧٧- ١٨٥٥) من أهم روّاد هذه الفترة وقد أثبت أن كل معادلات كثيرات الحدود لها على الأقل جذر مركب .
- وفي عام (١٨٢٤م) برهن الرياضي النرويجي آبل (Abel) (١٨٠٢ - ١٨٢٩م) على عدم إمكانية إيجاد قانون عام لحل جميع المعادلات ذات الدرجة د ، د > ٥
- وقد دفع عمل آبل ، العالم الفرنسي جالو (Galois)(١٨١١ - ١٨٣٢م) ليقدّم مواصفات للحل مكتشفاً أن مجموعة التباديل لجذور المعادلة تحقّق بعض الخواص الجبرية لتركيب جبري أسماه (الزمرة) ليكون بذلك صاحب الفضل في اكتشاف الزمر .
- تطور مفهوم الزمرة على أيدي كيلي (Cayley) (١٨٣١- ١٨٩٥م) وآخرون إلى أن ظهرت بديهيات الزمر بوضعها الحالي .
- يعود الفضل في توسيع مفهوم الحلقة وتاسيس نظريتها إلى العالمين الالمانيين هلبرت (Hilbert) (١٨٦٢- ١٩٤٣)، ونيودر(Neother) (١٨٨٢-١٩٣٥م) ، وتعد أعمالها بمثابة تحول هام في تطور علم الجبر والموضوعات المتصلة به .
- توالى بعد ذلك اكتشاف تركيبات جبرية جديدة وتوسيع أخرى ، إلى أن أصبح علم الجبر يوسم بـ(جبر التركيبات) أو الجبر المجرد . فلم تعد القضية الرئيسية في علم الجبر الآن هي حل المعادلات ، بل التراكيب الجبرية.

خلفية علمية

أمثلة لبعض الحلقات :

١ - (صـ د ، ⊕ ، ⊙) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد ، وتسمى هذه الحلقة (حلقة الأعداد الصحيحة) مقياس د .

٢ - لتكن سـ مجموعة غير خالية ولتكن ٢^س مجموعة كل المجموعات الجزئية من سـ، وإذا عرفنا على ٢^س ، العمليتين ∩ (عملية التقاطع للمجموعات) ، Δ عملية الفرق التناظري للمجموعات والتي تعرف على النحو التالي :

ا Δ ب = (ا ∩ ب) - (ا ∩ ب) ∀ ا ، ب ∈ ٢^س فإن (٢^س ، Δ ، ∩) حلقة لأن:
(٢^س ، Δ) زمرة تبديلية ومن السهل التحقق أن العملية ∩ ثنائية وتجميعية على ٢^س،
وأن العملية ∩ تتوزع على العملية Δ .

بعض المبرهنات المتعلقة بالحلقة :

١ - لتكن (سـ ، * ، ০) حلقة واحدية بحيث سـ ≠ { و } (أي أن س تحتوي على عناصر تختلف عن العنصر الصفري و) . ي هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ০ أثبت أن ي ≠ و .

البرهان :

بما أن سـ ≠ { و } فإنه يوجد على الأقل عنصر غير صفري ا ∈ سـ لأن إذا كان ي = و فإن
ا = ا ০ ي = ا ০ و = و ، وهذا يناقض فرضنا أن ا ≠ و ، إذا ي ≠ و

ملاحظة :

في المبرهنة السابقة افترضنا أن تكون سـ ≠ { و } أما في الحالة التي تكون فيها سـ = { و } فإن «و» هو العنصر الصفري (المحايد بالنسبة للعملية *) وهو في الوقت نفسه العنصر المحايد بالنسبة للعملية ০ . وفي هذه الحالة تسمى الحلقةبالحلقة الصفرية .

لذلك يفترض دائماً في الحلقة الواحدية أن تحتوي على أكثر من عنصر .

٢ - تكون الحلقة (سـ، * ، ০) تامة إذا وفقط إذا تحقق فيها الشرطان التاليان :

ا- ا ০ ب = ا ০ جـ ، ا ≠ و ⟸ ب = جـ
ب- ب ০ ا = جـ ০ ا ، ا ≠ و ⟸ ب = جـ

البرهان :

نفرض أولاً أن (سـ، * ، ০) حلقة تامة ، وأن ا ০ ب = ا ০ جـ ، ا ≠ و
فنجد أن (ا ০ ب) * (ا ০ جـ)َ = و (حيث (ا ০ جـ)َ نظير (ا ০ جـ) بالنسبة لـ *)
⟸ (ا ০ ب) * (ا ০ جـَ) = و (خاصية (٢) صفحة ١٧ من كتاب الطالب) .
⟸ ا ০ (ب * جـَ) = و (توزيع ০ على *)

(لأن الحلقة تامة ، والعنصر ا ≠ و)

⇐ ب ٭ جـ′ = و

⇐ ب ٭ جـ′ ٭ جـ = و ٭ جـ

⇐ ب = و ٭ جـ

⇐ ب = جـ

وبهذا يكون برهنا تحقق الشرط (١) فإن الشرط (٢) يتحقق مباشرة .

وبما أن العملية ٥ تبديلية (لأن الحلقة تامة) فإن الشرطين (١) ، (٢) متحققان في الحلقة (سه ، ٭ ، ٥)

ثانياً لإثبات العكس ، نفرض أن الشرطين (١) ، (٢) متحققان في الحلقة ، ونثبت أن ص = و .

وأن س ، ص ∈ سه بحيث س ٥ ص = و ، س ≠ و ، ونثبت أن ص = و .

∵ س ٥ ص = و

⇐ س ٥ ص = س ٥ و

⇐ (س ٥ ص) ٭ (س ٥ و) = و

⇐ س ٥ (ص ٭ و) = و (لأن س ≠ و ، ومن الشرط (١))

⇐ ص ٭ و = و

⇐ ص = و

وبالطريقة نفسها نثبت أن س ٥ ص = و ، ص ≠ و ⇐ س = و

∴ الحلقة (سه ، ٭ ، ٥) تامة .

توجيهات طرائقية عامة

عند تدريس موضوعات الوحدة يراعى ما يلي :

١ – التأكد من مدى توفر المتطلبات الأساسية لتعلم الموضوع الجديد لدى الطلاب ، وذلك بمراجعة ما يلي :

أ) مفهوم النظام الرياضي ذي العملية الواحدة (سه ، ٭)، وفي هذا الصدد يجب أن يدرك الطالب مدلول المفهوم كتركيب جبري يتكون من مجموعة غير خالية سه والعملية الثنائية ٭، والعلاقة بينهما.

ب) خواص التبديل والتجميع والتوزيع ، حيث يجب أن يكون الطالب قادراً على إجراء العمليات اللازمة للتحقق من توافر تلك الخواص في نظام رياضي معين .

جـ) تعيين العنصر المحايد في نظام رياضي (سه ، ٭) عندما تختلف العملية الثنائية ٭ عن عمليتي الجمع والضرب للأعداد .

د) اكتشاف قانون تعيين نظير عنصر في نظام رياضي (سه ، ٭) معطى عنصره المحايد .

٢ – استخدام أكثر من صيغة في تعريف المفهوم الواحد وهذا من شأنه تعميق المفهوم لدى الطلاب، ولكن يتم التركيز على تعريف واحد هو أوضح التعاريف كتعريف يستقر في ذهن الطالب .

٣ – استخدام أسلوب المثال واللا مثال عند تقديم مفهوم جديد ، مثل :

– النظام حلقة ، ومثال آخر لنظام ليس حلقة .

– النظام حقل ، ومثال آخر لنظام ليس حقلاً

٤ – عند تناول الأنظمة الرياضية (الحقل ، الحلقة) ، يراعى ما يلي :

أ) من المهم أن يستوعب الطالب تلك المفاهيم كبنى جبرية مجردة وأن الأنظمة العددية المناظرة لكل منها هي حالات خاصة من تلك البنى تشترك معها في الخواص البنائية، وتتميزعنها بالخواص المتعلقة بطبيعة عناصر المجموعات الداخلة في تركيبها .

ب) ليس من الضروري التعمق في دراسة تلك المفاهيم المجردة ، ويكون التركيز على الأنظمة العددية التالية :

الزمر : (صه ، +) ، (كَ ، ×) ، (ح ، +) ، (عَ ، ×)

الحلقات : (صه ، + ، ×) ، (د ، + ، ×) ، (ح ، + ، ×)

والحقلين : (د ، + ، ×) ، (ح ، + ، ×)

ومن المهم في هذا الصدد إبراز الخواص التي تتميز بها هذه الأنظمة العددية عن الأنظمة الجبرية المجردة المناظرة لها ، وإلى ما ذا يعزى هذا التميز .

جـ) التأكيد على أهمية اكتشاف الأنظمة الرياضية المجردة في إثبات صحة خواص الأنظمة العددية المناظرة لها .

٥ – عندحل المعادلات في الأنظمة الرياضية المختلفة ، يراعى ما يلي :

أ) من المهم أن يدرك الطالب نوع النظام الرياضي المعطى ومدى توفر شروط الحل للمعادلة في ذلك النظام من عدمه وذلك باستخدام المبرهنات بصيغها الرمزية العامة ؛ فمثلاً لكل معادلة من الصيغة

ا ٥ س ٭ ب = جـ حلّ وحيد في الحقل (سه ، ٭ ، ٥)

هو س = ا$^{-1}$ ٥ (جـ ٭ بَ) وفي هذا الصدد يجب أن يدرك الطالب أن هذا الحل يختلف من حقل إلى آخر بحسب طبيعة عناصر سه وطبيعة العمليات على سه .

ب) إذا لم يكن النظام (سه ، ٭ ، ٥) حقلاً ، فهناك احتمالان :

– الأول أن يكون للمعادلة ا ٥ س ٭ ب = جـ حلاً . مثال في الحلقة (صه ، + ، ×) ليس للمعادلة ٢ س + ٣ = ١ حل لعدم وجود نظير العنصر ٢ .

– الثاني أن يكون للمعادلة ا ٥ س ٭ ب = جـ أكثر من حل، مثال ذلك تمرين (٦) من التمارين (١–٢) في كتاب الطالب .

٦ – سبق للطالب أن درس طرق حل معادلات (خطية أو غير خطية ، بمتغير أو بمتغيرين) في الأنظمة العددية المألوفة ، وليس من بين أهداف هذه الوحدة طرق حل المعادلات ، لذلك لا داعي لحل المعادلات في تلك الأنظمة بالطريقة المطولة ويكتفى بعدد محدود من المعادلات تحل كل منها في أكثر من نظام ، ومن المهم هنا استخدام خواص الأنظمة الرياضية في تفسير خطوات الحل .

٧ – عند حل المتباينات في حقل الأعداد الحقيقية ينبغي التركيز على تطبيق خواص حقل الأعداد الحقيقية وتوظيفها في الحل، والتاكيد على ضرورة تغيير خطوات الحل ، كما ينبغي توظيف التمثيل الهندسي للمتباينات في تفسير (توضيح) مجموعة الحل .

١ - ١ مراجعة وتمهيد

عدد الحصص : (٢) حصتان

الأهداف

- يتحقق من أن نظاماً رياضياً ذا عملية يمثل زمرة .
- يحدد العنصر المحايد في زمرة معطاة ويحدد قانون نظير العنصر فيها .
- يتعرف على النظام الرياضي ذي العمليتين .
- يتحقّق في النظام الرياضي (سہ، * ، ٥) من أن العملية ٥ توزيعية على العملية * .

تنفيذ حصص البند

ينفذ البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة للزمرة وخواصها الأساسية .

الحصة الثانية : النظام الرياضي ذو عمليتين وخاصية التوزيع .

إرشادات وإجابات : تمارين (١ - ١)

[١] أ) ليس زمرة لعدم وجود العنصر المحايد . ب) زمرة .

جـ) زمرة . د) ليس زمرة لأن ٠ ∈ صہ وليس له نظير بالنسبة للعملية ⊙

هـ) زمرة . و) ليس زمرة لعدم وجود العنصر المحايد .

[٢] بما أن (ح* ، ٥) نظام رياضي تجميعي ، ولكي نثبت أنه زمرة يكفي أن نحدد عنصره المحايد ونجد قانون نظير العنصر كما يلي :

١ - بفرض أن (و) هو العنصر المحايد ، نجد أنه لكل عنصر ا ∈ ح*

و ٥ ا = ا ٥ و = ا

⇐ و ٥ ا = ٣ و ا = ا (لاحظ أن العملية ٥ تبديلية لأن الضرب تبديلية)

⇐ و = $\frac{١}{٣}$

٢ - نفرض أن ا′ هو نظير العنصر ا ∈ ح*

∴ ا ٥ ا′ = ا′ ٥ ا = $\frac{١}{٣}$

⇐ ٣ ا ا′ = $\frac{١}{٣}$

⇐ ا′ = $\frac{١}{٩ا}$

إذن النظام (ح* ، ٥) يمثل زمرة تبديلية .

[٣] أ) بما أن (صہ ، ⊕) زمرة فإن للمعادلة س ⊕ ٢ = ١ حلاً وحيداً هو

س = ١ ⊕ ٢′ (حيث ٢′ هو نظير الـ ٢ ، ٢′ = ٤)

⇐ س = ١ ⊕ ٤

⇐ س = ٥

ب) للسبب السابق نفسه فإن المعادلة ٦ ⊙ س = ٤ لها حل وحيد هو

س = (٦)$^{-١}$ ⊙ ٤

⇐ س = ٦ ⊙ ٤ لأن ٦ نظير نفسه في (صہ* ، ⊙)

⇐ س = ٣

[٤] أ) نعم لأن كل من العمليتين * ، ٥ ثنائية على ک* (تحقق من ذلك)

ب) لا لأن ٢ ، ٣ ، ٤ ∈ ک* مثلاً ، لكن ٢ * (٣ ٥ ٤) ≠ (٢*٣) ٥ (٢ * ٤)

حيث ٢ * (٣ ٥ ٤) = ٢ * (٣ + ٤ - ١٢) = ٢ * - ٥ = ٢ - ٥ - ١ = - ٤

بينما (٢*٣) ٥ (٢* ٤) = (٢ + ٣ - ١) ٥ (٢ + ٤ - ١)

= ٤ ٥ ٥ = ٤ + ٥ - ٢٠ = - ١١

جـ) نعم (تحقق من ذلك)

[٥] لا فمثلاً في النظام (ص٤ ، ⊙) نجد ان

٢ ⊙ ٣ = ٢ ٢ ⊙ ١ = ٢ ، ١ ≠ ٣

[٦] لتفسير ذلك نفرض ان (سہ، *) زمرة منتهية وأن ا ∈ سہ وأن العنصر ب ∈ سہ بحيث يتكرر في الصف المقابل للعنصر ا ، كما في الشكل الآتي (الذي يمثل جزءاً من جدول العملية *)

*			
ا	ب	ب	

فهذا يعني أن للمعادلة

ا * س = ب

حلين في الزمرة (سہ ، *) وهذا يتناقض مع خاصية أساسية للزمرة تنص على أن للمعادلة ا * س = ب حلاً وحيداً

[٧] أ) ٩ * ٩ = ٩ ب) نعم

جـ) نعم د) نعم وهو العنصر ٩ نفسه

هـ) نعم

١ - ٢ الحلقة

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

- يتحقق من ان نظاماً رياضياً يمثل حلقة .
- يميز الحلقة التامة .
- يبرهن في الحلقة (س، ⋆ ، ⊙) أن :

ا⊙و = و⊙ا = و ، ∀ ا ∈ س ، حيث (و) هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ⋆ .

- يبرهن في الحلقة التامة (س، ⋆ ، ⊙) أن:

ا⊙ب = و ⟸ ا = و أو ب = و ، ∀ ا ، ب ∈ س .

تنفيذ حصص البند

ينفذ البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : الحلقة وخواصها الأساسية .

الحصتان الثالثة والرابعة : الحلقة التامة وخواصها الأساسية

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم التالي من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية عقب كل حصة ، وفي نهاية الحصة الخامسة يعطى التمرين التقويمي التالي :

١ـ حدّد مع التعليل صحة أو خطأ كل من العبارات الآتية :

أ) لكي يكون الثلاثي (س، ⋆ ، ⊙) حلقة يكفي أن يكون الزوج (س، ⋆) زمرة تبديلية والعملية ⊙ ثنائية وتجميعية على س.

ب) ـ الحلقة التامة هي حلقة تبديلية لا تمتلك قواسم للصفر .

جـ) ـ الحلقة (ص٦ ، ⊕ ، ⊙) ليست تامة .

٢ ـ حل المعادلة ٣ ⊙ (س ⊕ ١) = ٠ في الحلقة (س٦ ، ⊕ ، ⊙)

إرشادات وإجابات : تمارين (١ - ٢)

[١] أ) صائبة . ب) خطأ .

جـ) خطأ . د) صائبة .

[٢] أ) لكي نثبت أن (س، ⋆ ، ⊙) حلقة بمعلومية (س، ⋆) زمرة تبديلية يكفي أن نثبت أن العملية ⊙ ثنائية وتجميعية على س وتتوزع على العملية ⋆ .

١ـ العملية ⊙ ثنائية على س ، لأن ا⊙ب = و ∈ س ∀ ا ، ب ∈ س

٢ - (ا⊙ب)⊙جـ = و⊙جـ = و ، ا⊙(ب⊙جـ) = ا⊙و = و

أي أن ا⊙(ب ⊙جـ) = (ا⊙ب)⊙ جـ ، إذن العملية ⊙ تجميعية .

٣ - ا⊙(ب ⋆ جـ) = و لأن ⋆ ثنائية على س ، (ا⊙ب) ⋆ (ا⊙جـ) = و ⋆ و = و

أي أن العملية ⊙ تتوزع من اليمين على العملية ⋆ ، وحيث أن ⊙ تبديلية فهي تتوزع أيضاً على العملية ⋆ من اليسار .

ب) لإيضاح أن (س، ⋆ ، ∆) ليست حلقة يكفي أن نبين عدم تحقق أحد شروطها . فالعملية ∆ (رغم أنها ثنائية وتجميعية على س) إلأ أنها لا تتوزع على العملية الثنائية ⋆ كما سنبين فيما يلي :

ا ∆ (ب ⋆جـ) = ا ، (ا ∆ ب) ⋆ (ا ∆ جـ) = ا ⋆ ا لا يساوي بالضرورة ا.

[٣] كي نثبت أن (ص ، ⋆ ، ⊙) حلقة تبديلية أحادية ، علينا أن نثبت أن (ص ، ⋆) زمرة تبديلية وأن العملية ⊙ ثنائية وتجميعية على ص ، وإبدالية ، وتتوزع على العملية ⋆ ، كما يلي

١ ـ كل من العمليتين ⋆ ، ⊙ ثنائية على صلأن كل من العمليات (+ ، ـ ، × ثنائية على ص) .

٢ ـ كل من العمليتين ⋆ ، ⊙ ابدالية علي س ، لانه من تعريف العمليتين نجد أنه لاي عنصرين ا ، ب ∈ ص ، فإن :

ا⋆ ب = ا + ب ـ ١ = ب + ا ـ ١ = ب ⋆ ا ،

ا ⊙ ب = ا + ب ـ ا ب = ب + ا ـ ب ا= ب ⊙ ا .

٣ ـ العملية ⋆ تجميعية على س ، لانه لأي عناصر اختيارية ا ، ب ، جـ ∈ س

ومن تعريف العملية ⋆ نجد أن :

ا⋆ (ب ⋆ جـ) = ا⋆ (ب + جـ ـ ١)

= ا + ب + جـ ـ١ ـ١

= (ا + ب ـ١) + جـ ـ١

= (ا ⋆ ب) ⋆ جـ

٤ ـ نفرض أن و ∈ ص هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية ⋆ ، وأن ا ∈ ص

ومن تعريف العملية ⋆ نجد أن

ا⋆ و = و ⋆ ا = ا (تعريف العنصر المحايد) .

⟸ ا + و ـ ١ = ا (تعريف العملية ⋆)

⟸ و = ١

٥ - نفرض أن ا ∈ ص وأن ا′ نظير هذا العنصر بالنسبة للعملية ∗ فنجد أن

ا ∗ ا′ = ا′ ∗ ا = ١

⇐ ا + ا′ − ١ = ١

⇐ ا′ = ٢ − ا

نتحقق الخواص (١ – ٥) بالنسبة للعملية ∗ نجد أن (ص ، ∗) زمرة تبديلية .

٦ - العملية ○ تجميعية على ص ، لأن لأي ا ، ب ، جـ ∈ ص نجد أن

ا ○ (ب ○ جـ) = ا ○ (ب + جـ − ب جـ)

= ا + (ب + جـ − ب جـ) − ا (ب + جـ − ب جـ)

= ا + ب + جـ − ب جـ − ا ب − ا جـ + ا ب جـ

= ا + ب − ا ب + جـ − (ا جـ + ب جـ − ا ب جـ)

= (ا + ب − ا ب) + جـ − (ا + ب − ا ب) جـ

= (ا ○ ب) ○ جـ

٧ - العملية ○ تتوزع على العملية ∗ ، حيث أن :

ا ○ (ب ∗ جـ) = ا ○ (ب + جـ − ١)

= ا + (ب + جـ − ١) − ا (ب + جـ − ١)

= ا + ب + جـ − ١ − ا ب − ا جـ + ا

= ا + ب − ا ب + ا + جـ − ا جـ − ١

= (ا ○ ب) + (ا ○ جـ) − ١

= (ا ○ ب) ∗ (ا ○ جـ)

أي أن ○ تتوزع على العملية ∗ من اليمين ، وبما أن العملية ○ تبديلية فإنها تتوزع أيضاً على ∗ من اليسار.

وبتحقيق الخاصيتين ٦ ، ٧ ؛ بالإضافة إلى ما أثبتناه أن (ص، ∗) زمرة تبديلية وأن العملية ○ ثنائية وتبديلية على ص فإن (ص، ∗ ، ○) حلقة تبديلية .

بقى فقط أن نثبت أن للنظام (ص ، ○) عنصراً محايداً .

نفرض أن (ي) هو العنصر المحايد لهذا النظام ، وأن ا ∈ ص / {١} نجد أن

ا ○ ي = ي ○ ا = ا ،

⇐ ا + ي − ا ي = ا

⇐ ي − ا ي = ٠

⇐ ي (١ − ا) = ٠

∵ ا ≠ ١ فإن ١ − ا ≠ ٠

∴ ي = ٠ ؛ أي أن العنصر المحايد في النظام (ص، ○) هو (٠) ؛

وبهذا نكون قد اثبتنا أن (ص ، ∗ ، ○) حلقة تبديلية واحدية .

[٤] فكرة الحل هي :

حيث أن (س ، ∗ ، ○) حلقة ، فإن العملية ○ ثنائية على س وتتوزع على العملية الثنائية ∗ ، فمثلاً لإيجاد جـ ○ ب نجرى الخطوات التالية :

جـ ○ ب = (ء ∗ ب) ○ ب   لأن (جـ = ء ∗ ب جدول (١-٥))

= (ء ○ ب) ∗ (ب ○ ب)   (توزيع ○ على ∗)

= ب ∗ ب   (جدول (١ - ٦))

= ا

بالمثل نجد أن:

جـ ○ جـ = جـ ○ (ء ∗ ب)

= (جـ ○ ء) ∗ (جـ ○ ب)

= ا ∗ ا = ا

ب ○ جـ = (جـ ∗ ء) ○ جـ   (جدول (١ - ٥))

= (جـ ○ جـ) ∗ (ء ○ جـ)

= ا ∗ جـ

= جـ

وهكذا يمكن إيجاد كل من العناصر الداخلة في جدول (١ - ٦) حيث

ب ○ ء = ب ○ (جـ ∗ ب)

= (ب ○ جـ) ∗ (ب ○ ب)

= جـ ∗ ب

= ء

ء ○ ء = ء ويكون جدول (١ - ٦) في صورته النهائية هو

○	ا	ب	جـ	ء
ا	ا	ا	ا	ا
ب	ا	ب	جـ	ء
جـ	ا	ا	ا	ا
ء	ا	ب	جـ	ء

جدول (١ - ٦)

[٥] بما أن (س ، + ، X) حلقة ، فإن (س ، +) زمرة تبديلية ، ولكي نثبت أن (س ، + ، Δ) حلقة تبديلية ، علينا أن نثبت أن Δ ثنائية وتبديلية وتجميعية على س وأنها تتوزع على العملية + :

١ - واضح أن العملية Δ ثنائية على س ، لأنها تعتمد في تعريفها على العمليتين الثنائيتين + ، X .

٢ - العملية Δ تبديلية على س لأنه لأي عنصرين ا ، ب ∈ س نجد أن :

ا Δ ب = ا ب + ب ا

= ب ا + ا ب   (لأن + تبديلية)

= ب Δ ا

٣ - لإثبات أن العملية الثنائية Δ تجميعية على صم نفرض أن ا ، ب ، حـ ∈ صم ، نجد أن

ا Δ (ب Δ حـ) = ا Δ (ب حـ + حـ ب)

= ا(ب حـ + حـ ب) + (ب حـ + حـ ب) ا

= اب حـ + احـ ب + ب حـ ا + حـ ب ا

= (اب + ب ا) حـ + حـ (اب + ب ا) (لأن × تبديلية وتوزيعية على +)

= (ا Δ ب) Δ حـ

٤ - ا Δ (ب + حـ) = ا (ب + حـ) + (ب + حـ) ا

= اب + احـ + ب ا + حـ ا

= (اب + ب ا) + (احـ + حـ ا)

= (ا Δ ب) + (ا Δ حـ)

وهذا ما يثبت أن العملية Δ تتوزع من اليمين على العملية + ، وحيث أن Δ تبديلية فإنها تتوزع على + من اليسار أيضاً .

بالإضافة إلى أن (صم ، +) زمرة تبديلية، فإنه نستنتج أن (صم ، + ، Δ) تحقق الخواص (١ - ٤)، حلقة تبديلية .

[٦] أ) لإيضاح أن الحلقة (صم٦ ، ⊕ ، ⊙) ليست تامة يكفي أن نجد عنصرين غير صفريين من صم٦ بحيث يكون ناتج العملية ⊙ هو العنصر الصفري .

واضح أن ٢ ، ٣ ∈ صم٦ ، ٢ ≠ ٠ ، ٣ ≠ ٠ . فنجد أن

٢ ⊙ ٣ = ٠

ب) ٢ ⊙ س ⊕ ٤ = ٠

⇐ ٢ ⊙ س ⊕ ٢ ⊙ ٢ = ٠

⇐ ٢ ⊙ (س ⊕ ٢) = ٠ (١) (توزيع ⊙ على ⊕)

وبما أن الحلقة (صم٦ ، ⊕ ، ⊙) ليست تامة فليس من الضروري أن يكون س ⊕ ٢ = ٠

لكن تعريف العملية ⊙ على صم٦ ينتج أن ٢ ⊙ ٠ = ٢ ⊙ ٣ = ٠

وعليه تتحقق المعادلة (١) عند س ⊕ ٢ = ٠ ، وعند س ⊕ ٢ = ٣ ، وعليه فإن س = ٤ ، س = ١

إذن مجموعة الحل هي {١ ، ٤} .

[٧] أنظر الخلفية العلمية لهذه الوحدة .

١ - ٣ الحقل

عدد الحصص : (٤) حصص

الأهداف

- يتحقق من أن نظاماً رياضياً يمثل حقلاً .
- يميز الحقل عن الحلقة والحلقة التامة .
- يبرهن الخواص الأساسية للحقل .
- يستخدم خواص الحقل في حل المعادلات التي على صورة ا ٥ س * س = ب في الحقل (س ، * ، ٥) .

تنفيذ حصص البند

ينفذ البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : الحقل وخواصه الأساسية .

الحصة الثالثة : حل معادلات في الحقل .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، ويمكن تقديم تمرين شبيه بالتمرين [١] كخطوة تقويم نهائية .

إرشادات وإجابات : تمارين (١ - ٣)

[١] أ) صائبة خاصية (١)

ب) خطأ فمثلاً الحلقة (صم ، + ، ×) تامة لكنها ليست حقلاً .

ومن الجدير ذكره هنا أنه إذا كانت الحلقة التامة منتهية فإنها تشكل حقلاً . من أمثلة ذلك الحلقة (صمد ، ⊕ ، ⊙) ، (حيث د عدداً أولياً) هي حلقة تامة منتهية، وبالتالي فهي حقلاً .

جـ) خطأ د) صائبة لأن العبارة المعطاة تكافىء تعريف الحقل .

[٢] أ) بما أن (صم٥ ، ⊕ ، ⊙)حلقة واحدية ، ولكي نثبت أن هذا النظام حقل يكفي أن نثبت أن العملية ⊙ تبديلية وأن لكل عنصر غير صفري ∈ صم٥ نظيراً بالنسبة لهذه العملية .

١ - العملية ⊙ تبديلية ، ذلك لأن لأي ا ، ب ∈ صم٥ ، فإن

ا ٥ ب = باقي قسمة ا ب على ٥

= باقي قسمة ب ا على ٥

= ب ٥ ا

٢ـ لكل عنصر غير صفري من ص٥* نظير ، كما نبينه في الجدول التالي :

العنصر	١	٢	٣	٤
النظير	١	٣	٢	٤

ملاحظة : يمكن الاستعانة بجدول النظام (ص٥ ، $\odot$) لإيضاح الفقرة السابقة .

ب) بما أن (ص٥ ، $\oplus$ ، $\odot$) حقلاً فإن للمعادلة :

٣ $\odot$ س $\oplus$ ١ = ٤ حلاً وحيداً في هذا الحقل هو

س = ٣′ $\odot$ (٤ $\ominus$ ١′)

= ٢ $\odot$ (٤ $\oplus$ ٤)

= ٢ $\odot$ ٣

= ١

[٣] أ) بفرض أن (و) هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\star$ فنجد أن لأي أ $\in$ ح :

أ $\star$ و = و $\star$ أ = أ

⇐ أ + و + ٢ = أ

⇐ و = −٢

ب) بفرض أن أ′ هو نظير العنصر أ $\in$ ح . فيكون

أ $\star$ أ′ = أ′ $\star$ أ = −٢

⇐ أ + أ′ + ٢ = −٢

⇐ أ′ = −٤ − أ

أ′ = − (٤ + أ)

جـ) بما أن (ح ، $\star$ ، $\times$) حقل فإن للمعادلة :

(٣ $\times$ س) $\star$ ٤ = ٨ حلاً وحيداً هو

س = ٣^{-١} $\times$ (٨ $\star$ ٤′)

= $\frac{١}{٣}$ $\times$ [٨ $\star$ (−٤ − ٤)]

= $\frac{١}{٣}$ $\times$ [٨ $\star$ (−٨)]

= $\frac{١}{٣}$ $\times$ (٨ + (−٨) + ٢)

= $\frac{١}{٣}$ $\times$ ٢

= $\frac{٢}{٣}$

[٤] المعادلة المعطاة تكافىء المعادلة : س $\odot$ س = س

⇐ (س $\odot$ س) $\star$ سَ = س $\star$ سَ]

وبفرض أن (و) هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\star$ ، ي هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\odot$ فإن

(س $\odot$ س) $\star$ (س $\odot$ يَ) = و

⇐ س $\odot$ (س $\star$ يَ) = و [خاصية (٢) الفقرة (٣) صفحة (١٧) في كتاب الطالب]

⇐ س = و أو س $\star$ يَ = و [لأن الحقل هو حلقة تامة]

⇐ س = و أو س = و $\star$ ي

= ي

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة = { و ، ي }

ملاحظة : إذا كان الحقل المعطى هو (ح ، + ، $\times$) فإن مجموعة الحل للمعادلة

س٢ = س هي { ٠ ، ١ }

١ − ٤ حقل الأعداد الحقيقية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يميّز حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، $\times$) عن الحقول الجبرية المجردة .
- يتحقق من الخواص الأساسية لحقل الأعداد الحقيقية .
- يستخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية في حل المعادلات التي على صورة : أس + ب = جـ .
- يستخدم خواص حقل الأعداد الحقيقية في حل متراجحات من الدرجة الأولى بمتغير واحد .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : حقل الأعداد الحقيقية وخواصه الأساسية .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة ومتابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية ، وفي نهاية الحصة الثالثة يمكن تقديم تمرين شبيه بالتمرين [١] كخطوة تقويم نهائية .

[١] أ) صائبة ب) خطأ هـ) صائبة د) خطأ

[٢] أ) س + ٣ [illegible] ⇐ س > ١ [illegible] ، مجموعة الحل =] - ∞ ، ١٠ [.

⇐ س > ٢ ، مجموعة الحل =] ٢ ، ∞ [.

ب) ٦ س > ١٢ ⇐ س > ٢ ، مجموعة الحل =] - ∞ ، - ١٤ [.

جـ) $\frac{س}{٢}$ > ٧ ⇐ س = - ١٤ ، مجموعة الحل = [illegible]

د) $\frac{س}{٥}$ + ٤ > ١ ⇐ $\frac{س}{٥}$ > - ٥

⇐ س > ٢٥ ، مجموعة الحل هي] - ∞ ، ٢٥ [.

هـ) ٥ س > ٢ س - ٦ ⇐ - ٧ س > ٦ ⇐ س = $\frac{٦}{٧}$

مجموعة الحل هي] - ∞ ، $\frac{٦}{٧}$ [.

و) ٧ - س > ٣ ⇐ - س > - ٤ ⇐ س < ٤ ، مجموعة الحل هي [٤ ، ∞ [.

ز) $\frac{٥}{س}$ > ٣ ، س > ٠ ⇐ ٥ > ٣ س ⇐ $\frac{٥}{٣}$ > س ،

مجموعة الحل هي] $\frac{٥}{٣}$ ، ∞ [∩] ٠ ، ∞ [

=] $\frac{٥}{٣}$ ، ∞ [

$\frac{٥}{س}$ > ٣ ، س < ٠ ⇐ ٥ < ٣ س ⇐ $\frac{٥}{٣}$ < س

مجموعة الحل هي] - ∞ ، $\frac{٥}{٣}$ [∩] - ∞ ، ٠ [

=] - ∞ ، ٠ [

∴ مجموعة الحل للمتراجحة $\frac{٥}{س}$ > ٣ ، س ∈ ح هي :

] $\frac{٥}{٣}$ ، ∞ [∪] - ∞ ، ٠ [

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو التالي :

ح) واضح أنه ليس للمتراجحة حل عند س = ٣ ، لذلك نبحث عن مجموعة الحل في الفترة س > ٣ ثم في الفترة س < ٣ وتكون مجموعة حل المتراجحة هي اتحاد مجموعتي الحل السابقتين :

$\frac{١}{س - ٣}$ < ٤ ، س > ٣) ⇐ س - ٣ > $\frac{١}{٤}$ ⇐ س > $\frac{١٣}{٤}$

مجموعة الحل هي] $\frac{١٣}{٤}$ ، ∞ [∩] ٣ ، ∞ [

=] $\frac{١٣}{٤}$ ، ∞ [.

$\frac{١}{س - ٣}$ < ٤ ، س < ٣) ⇐ س - ٣ < $\frac{١}{٤}$ ⇐ س < $\frac{١٣}{٤}$

مجموعة الحل هي] - ∞ ، ٣ [∩] - ∞ ، $\frac{١٣}{٤}$ [

=] - ∞ ، ٣ [

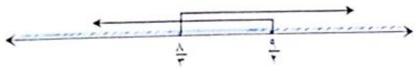
∴ مجموعة حل المتراجحة المعطاة هي] - ∞ ، ٣ [∪] $\frac{١٣}{٤}$ ، ∞ [

[٣] أ) إما ٢ س < ٩ أو ٣ س > ٨

⇐ س < $\frac{٩}{٢}$ أو س > $\frac{٨}{٣}$

مجموعة الحل هي] - ∞ ، $\frac{٩}{٢}$ [∪] $\frac{٨}{٣}$ ، ∞ [

= ح



ب) ٤ س < - ٢ و س + ٢ > - ٥

⇐ س < $\frac{-١}{٢}$ و س > - ٧

مجموعة الحل هي] - ∞ ، $\frac{-١}{٢}$ [∩] - ٧ ، ∞ [

=] - ٧ ، $\frac{-١}{٢}$ [

جـ) $\frac{س}{٢}$ + ١ ≤ ٧ أو س - ١١ > ٧

⇐ س ≤ ١٢ أو س > ١٨

مجموعة الحل هي] - ∞ ، ١٢] ∪] ١٨ ، ∞ [

= ح /] ١٢ ، ١٨]

د) ٢ س - ٢ < ٣ و $\frac{٣ س}{٢}$ + ١ > ٢

⇐ س < $\frac{٥}{٢}$ و س > $\frac{٢}{٣}$

مجموعة الحل هي] - ∞ ، $\frac{٥}{٢}$ [∩] $\frac{٢}{٣}$ ، ∞ [

=] $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٢}$ [

هـ) مجموعة الحل هي ح / [٠ ، $\frac{١}{٢}$ [

١٠ اختبار الوحدة

عدد الحصص (٢) حصتان

الهدف يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة.
بعض الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه، بحيث يغطي أهداف الوحدة حسب الجدول الآتي :

رقم السؤال	الفقرة	رقم الهدف
١	أ ، ب ، جـ ، د	١ ، ٢
٢	أ ، ب ، جـ	٣ ، ٧
	د	٦
٣	أ	٥
	ب	٤
	جـ	٧
٤		٤
٥		٨

الاختبار

[١] بين أياً من الأنظمة الرياضية التالية ليس حلقة مع ذكر السبب :

أ) (ص*، + ، ×) ب) (ص، ⊕ ، ⊙)

جـ) (ص، ⊙ ، ⊙) د) (د ، + ، ×)

[٢] ليكن (س ، ★ ، ٥) حلقة تبديلية . فبين مع التعليل صواب أو خطأ كل من العبارات الآتية :

أ) النظام (س ، ★) زمرة تبديلية. ب) كل من العمليتين ★ ، ٥ توزيعية على الأخرى .

جـ) لكل عنصر في س نظير بالنسبة للعملية ★ . د) للمعادلة (أ ٥ س) ★ ب = جـ حل وحيد في الحلقة .

[٣] إذا كان النظام (س ، ★ ، ٥) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، فأكمل كلاً من العبارات الآتية بما يجعلها صائبة :

أ) لكي تكون الحلقة (س ، ★ ، ٥) حقلاً ، يكفي أن يكون لكل عنصر في النّظام (س* ، ٥) . . .

ب) إذا كان في الحلقة (س ، ★ ، ٥) : أ ٥ ب = و ⟸ أ = و أو ب = و فإن الحلقة تسمّى . . .

جـ) إذا كانت س تحتوي على أكثر من عنصر ، وكان العنصران و ، ي هما العنصران المحايدان لكل من النظامين (س ، ★) ، (س* ، ٥) على الترتيب فإن و . . . ي .

[٤] حل المعادلة : ٣ س + ٢ = ٥ في كل من الحلقتين (د ، + ، ×) ، (ص، ⊕ ، ⊙)

[٥] أوجد مجموعة حل المتراجحة ٥ ≥ ٢ س + ٧ ≥ ٩ .

المفاهيم والمصطلحات

عملية	Operation
العملية الثنائية	Binary operation
النظام ذا العمليات	Operational System
عملية تبديلية	Cmmutative operation
عملية تجميعية	Associative operation
عملية توزيعية	Distributive operation
عنصر محايد	Identity element
نظير	Symmetric
جدول	Table
زمرة	Group
حلقة	Ring
تامة	Integral
محايد	Identity
حقل	Field
متراجحة	Inequality

المراجع

١ – عدنان دعنا ، موسوعة الرياضيات ، دار أسامة للنشر والتوزيع ، الأردن ، الطبعة الأولى ، ٢٠٠١م .

٢ – فريد ريك هـ . بل ، طرق تدريس الرياضيات ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، الطبعة العربية ١٩٨٦م .

٣ – عادل سودان وآخرون ، الرياضيات المعاصرة ، مؤسسة الرسالة ، بيروت ، الطبعة السادسة ١٩٨٦م .

٤ – عبد الفتاح الشرقاو وآخرون ، الرياضيات الحديثة ، دار القلم – الكويت ، ١٩٨٥م .

٥ – كمال رباش يعقوب ، الرياضيات الحديثة .

٦ – يحيى عبيد سعيد هاشم الطيار ، موجز تاريخ الرياضيات .

الوحدة الثانية
الـدوال الحقيقيـة

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٢ – ١	الدوال الحقيقية	٧
٢ – ٢	بعض أنواع الدوال الحقيقية	٩
٢ – ٣	اطراد الدوال	٦
٢ – ٤	اختبار الوحدة	٢
	الإجمالي	٢٤

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف الدالة الحقيقية .
٢ – يوجد مجموعة تعريف دالة معطاة ومداها .
٣ – يعرّف الدالة الزوجية والدالة الفردية ويميزهما .
٤ – يعرّف دالة المقياس ويمثلها بيانياً .
٥ – يعرّف دالة أكبر عدد صحيح أو دالة الصحيح ويمثلها بيانياً .
٦ – يعرّف اطراد دالة ويمثله بيانياً .
٧ – يعرّف الدالة الدورية ويوجد دورها .
٨ – يعرّف الدالة المحدودة ويوجد حديها .
٩ – يوجد القيمة العظمى والصغرى لدالة من تمثيلها البياني .

المقدمـة

تحتوي هذه الوحدة على ثلاثة بنود تتناول موضوع « الدوال الحقيقية » والتي فيها من الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادئ ما يلبي حاجة طلاب الصف الثاني الثانوي / العلمي .

ويعتبر موضوع الدوال الحقيقية امتداداً لموضوع « التطبيقات » الذي سبق أن درسه الطالب في الصف الأول الثانوي ، حيث اشتمل على التطبيقات التي يكون مجالها ومجالها المقابل مجموعات بشكل عام سواءً كانت هذه المجموعات أعداد طبيعية أو أعداد صحيحة أو نسبية أو حقيقية ولكن في هذا الصف الثاني الثانوي العلمي سيقتصر الموضوع على الدوال التي يكون مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ولهذا سميت « بالدوال الحقيقية » .

ويحتوي البند الأول على مفهوم الدوال الحقيقية وكيفية إيجاد مجموعة تعريفها ومداها بأساليب وطرق مختلفة كما هو موضّح في كتاب الطالب . ثم يأتي البند الثاني ليعرض بعض أنواع الدوال الحقيقية كالدوال الزوجية والفردية ودالة المقياس ودالة أكبر عدد صحيح أو دالة الصحيح وكيفية تمثيلها بيانياً . أما البند الثالث فيحتوي على اطراد الدوال الحقيقية من حيث كونها تزايدية أو تناقصية أولاتزايدية ولاتناقصية معاً .

لمحة تاريخية

ظهرت كلمة« دالة » في القرن السابع عشر وأول من استخدمها هو العالم الألماني ليبنز Leibiniz (١٦٤٦–١٧١٦م) ثم تبعه بعد ذلك Valero فاليرو (١٦٠٤م) وقدّم فصلاً من الدوال المتصلة على فترة مغلقة مثل ٠ ≥ س ≥ ١ إي [٠ ، ١] ثم جاء بعد ذلك استخدام الدوال مثل : س، س^٢ ، جاس، ظاس، لو س ، ... إلخ وكذلك الدوال التي تتكون من بعض هذه الدوال مع عدد محدود من العمليات الحسابية الأربع .

وفي القرن الثامن عشر وسّع الرياضيون مفهوم الدالة المثلثية في أكثر من متغير ، وقدّمت بعض المفكوكات بالدوال المثلثية والتي تقع ضمن المفكوكات العامة التي يُطلق عليها دوال ذاتية Eigen function .

كما ظهر بعد ذلك التعامل مع الدوال بعدد غير محدود من العمليات، وهذه تُسمّى « المتسلسلات اللا نهائية » والتي ظهرت مع بداية القرن التاسع عشر ومن أهمها متسلسلة فورير Fourier (١٨٨٥–١٩٦م) وهوعالم سويسري . وقدّم بعد ذلك العالم الفرنسي هادامارن Hadamarn (١٨٦٥ – ١٩٦٣م) بعض العمليات على الدوال التي يكون فيها المجال والمجال المقابل أعداداً، مثل التكامل المحدود وكذا طول المنحنى.

ومفهوم الدالة مفهوم أساسي ويدخل في دراسة معظمُ فروع الرياضيات الحديثة وله تطبيقات واسعة في ميادين الحياة .

ومنذ القرن التاسع عشر أسهم علماء الرياضيات مثل : ديدكند ، فيرستراس ، ريمان وغيرهم في وضع أسس لنظرية الدوال الحقيقية .

خلفية علمية

يتكون التطبيق من ثلاثة عناصر هي مجموعتين غير خاليتين (المجال والمجال المقابل) وقاعدة التطبيق التي تعين لكل عنصر من المجال (وليكن س) عنصراً وحيداً من المجال المقابل (وليكن ص) . وتسمى « ص » صورة « س » وفق قاعدة التطبيق كما يسمى « س » الصورة العكسية لـ « ص » ، وتسمى مجموعة صور المجال مدى التطبيق ونرمز للتطبيق بالرمز ت (س) أو ص . إن مفهوم التطبيق لم يقتصر على التطبيقات العددية والتي يمكن وضعها بصورة جبرية بل نجد أن مجموعة المجال ليست بالضرورة أن تكون أعداداً بل قد تكون مجموعة من الأعداد أو مجموعة من النقاط أو المستقيمات أو المستويات أو المنحنيات ، كذلك قاعدة التطبيق عامة ليست بالضرورة قاعدة جبرية ولكنها قد تكون قاعدة هندسية أو طبيعية أو وصفية أو غير ذلك .

وفي هذه الوحدة نتطرق للتطبيقات والتي يكون فيها المجال والمجال المقابل مجموعة الأعداد الحقيقة « ح » أو مجموعة جزئية منها وتسمى هذه التطبيقات الدوال الحقيقية أو الدوال . وحسب المفهوم العام للدالة فقد استخدمت الدالة في كثير من فروع الرياضيات مثل الجبر كالدالة الأسية ، ودالة القوى ،والدالة اللوغاريتمية والدالة الثابته والدالة الاحادية ودالة المتسلسلات « س، ، س، ، ... ، سن » وهي دالة مجالها (ط) ومجالها المقابل (ح) ، ودوال الحدوديات ودوال العملية الثنائية وفي الهندسة ظهرت دوال الانعكاس ،والدوران ، والإزاحة والتشابه ودوال حساب المثلثات مثل: جاس ، جتاس ، ظاس . ودوال الإشتقاق والتكامل مثل الدوال الزوجية والفردية ودالة المقياس والدالة المحدودة والدوال المتصلة وغير ذلك .

وقد احتوت هذه الوحدة على المفاهيم والمبادئ الآتية :

(١) مجموعة التعريف :

هي مجموعة جزئية من ح والمكونة من الأعداد التي يمكن أن نجري على كل منها العمليات وفق القاعدة المعطاة .

- فمثلاً مجموعة تعريف دوال الحدوديات ، ودالة المقياس ، دالة الصحيح ،الدوال المثلثية (جاس ، جتاس) . هي مجموعة الأعداد الحقيقية ح .
- أما الدوال الجذرية التربيعية مثل: د (س) = $\sqrt{\text{هـ (س)}}$ فإن مجموعة تعريفها كل الأعداد الحقيقية التي تجعل ماتحت الجذر عدداً غير سالب (س ≥ ٠)، أي أن م . ت = [٠ ، ∞ [
- وأما مجموعة تعريف الدوال الكسرية مثل د (س) = $\frac{\text{م (س)}}{\text{هـ (س)}}$ فهي تقاطع مجموعة تعريف دالة البسط مع مجموعة تعريف دالة المقام ما عدا أصفار دالة المقام ،
أي أن م . ت $\frac{\text{م (س)}}{\text{هـ (س)}}$ = (م . ت .) البسط ∩ (م . ت .) المقام / أصفار المقام .
- أما مجموعة تعريف الدوال التي على الصورة د (س) = م (س) ± هـ (س) فهي مجموعة تقاطع مجموعة تعريف م (س) ومجموعة تعريف هـ(س) أي أن م . ت . د (س) هي مجموعة تعريف الدالة م (س) تقاطع مجموعة تعريف هـ (س) أي أن م . ت . د(س) = م . ت . م(س) ∩ م . ت . هـ(س) .

- وبالمثل مجموعة تعريف الدوال التي على الصورة د (س) = م (س) . هـ (س) فهي م . ت . د(س) = م . ت . م (س) ∩ م . ت . هـ (س)
- كما يمكن إيجاد مجموعة التعريف للدوال الجذرية من نوع $\sqrt{\text{س}^2 - 1}$ ، $\sqrt{1 - \text{س}^2}$ بواسطة جدول درجة الدالة .

لكي تكون الدالة $\sqrt{\text{س}^2 - 1}$ معرفة يجب أن تكون س٢ − ١ ≥ ٠ ⇐ (س − ١) (س + ١) ≥ ٠ .

نحدد إشارة كل حد على خط الأعداد كالتالي :

س	∞+ … ١+	١+ … ١−	١− … ∞−
س − ١	+	−	−
س + ١	+	+	−
(س − ١)(س + ١)	+	−	+

مجموعة التعريف = [١ ، ∞ [∪] − ∞ ، −١]

أي أن م . ت . = ح −] ١ ، −١ [

وبالمثل $\sqrt{1 - \text{س}^2}$ ≥ ٠ ⇐ (١ − س) (١ + س) ≥ ٠ .

س	∞+ … ١+	١+ … ١−	١− … ∞−
١ − س	−	+	+
١ + س	+	+	−
(١ − س) (١ + س)	−	+	−

م . ت . = [١ ، −١] .

ويمكن تلخيص الجدولين السابقين كالتالي :

- اذا كانت الدالة من الدرجة الثانية ولها جذران مختلفان فلتحديد إشارتها نميّز حالتين :
أ) إذا كان معامل س٢ موجبًا فالدالة معرّفة خارج الجذرين .
ب) واذا كان معامل س٢ سالبًا فالدالة معرّفة عند الجذرين وما بينهما [−١ ، ١]

(٢) المدى : هو مجموعة الصور لعناصر المجال، أو هو المجموعة التي يكون لكل منها صورة عكسية في المجال .

(٣) بعض أنواع الدوال :

أ – الدالة الزوجية والدالة الفردية :

اذا كان لدينا الدالة د : ح ← ح فإن هذه الدالة تكون :

أ) زوجية اذا تحقق الشرط د (− س) = د (س)، ∀ س ∈ ح

ب) فردية إذا تحقق الشرط د (− س) = − د (س)، ∀ س ∈ ح

فمثلاً الدوال جا٢ س ، | س | ، جتاس ، س٢ فهي دوال زوجية .

وأما الدوال جاس ، س٣ ، ظا س فهي دوال فردية وبالتالي فإن الدالة د (س) = سن تكون زوجية اذا كانت ن عدداً زوجياً وتكون فردية إذا كانت ن عدداً فردياً .

والرسم البياني للدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور الصادات ، أي إذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، ص) تقع أيضاً على منحنى الدالة ، بمعنى أن أي مستقيم موازٍ لمحور السينات واقعاً للمنحنى فإنه يقطعه في نقطتين على بعدين متساويين من محور الصادات .

أما الرسم البياني للدالة الفردية فيكون متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل ، أي إذا كانت النقطة (س ، ص) تنتمي إلى منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، - ص) تنتمي إلى منحنى الدالة أيضاً . ولهذا نجد أن أي مستقيم يمر بنقطة الأصل واقعاً للمنحنى فإنه يقطعه في نقطتين على بعدين متساويين من نقطة الأصل .

كما أن هناك دوالاً لا زوجية ولا فردية فالدوال س^{٢} + جاس ، س^{٣} + جتاس ، س^{٢} + س ليست زوجية وليست فردية .

كما نشير هنا إلى أن حاصل ضرب دالتين زوجيتين أو فرديتين هو دالة زوجية ، بينما حاصل ضرب دالة زوجية في دالة فردية هو دالة فردية

وأن مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية ، وأن مجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية

وأن مجموع دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هي دالة ليست فردية وليست زوجية .

ب - دالة الدرجة الأولى :

الصورة العامة لهذه الدالة هي د (س) = ا س + ب ، ا ≠ ٠ .

- التمثيل البياني لهذه الدالة هو خط مستقيم ميله = ا (معامل س) ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ب)
- مدى الدالة هو ح
- الدالة تزايدية إذا كان ا > ٠ ، وتناقصية إذا كان ا < ٠ ، وثابتة إذا كان ا = ٠ ، وفردية إذا كانت خالية من الحد المطلق ،
- الدالة ليست فردية وليست زوجية

أي د (س) = ا س ، ا ≠ ٠ .

حـ - دالة صحيح س أو دالة أكبر عدد صحيح س :

الدالة د (س) = [س] تسمى دالة صحيح س حيث تعني [س] أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي س . فيكون [س] = ن إذا وفقط إذا كان ن ≤ س < ن + ١ حيث ن ∈ ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) .

ودالة صحيح س لها الخواص الآتية :

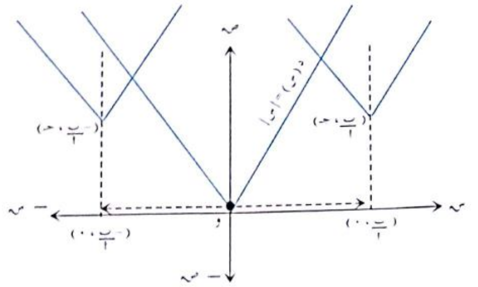
- مجموعة تعريفها ح ومداها ص
- ليست زوجية وليست فردية
- تكون الدالة ثابتة على الفترة [ن ، ن + ١[من المجال وتساوي ن .

فمثلاً على الفترة [- ٣ ، - ٢ [من المجال د (س) = - ٣ يمثلها بيانياً قطعة مستقيمة مفتوحة عند س = - ٢ وتوازي محور السينات وتقع أسفله بمقدار ٣ وحدات .

تُسمى دالة صحيح س أحياناً بالدالة السُّلَّمية أو الدَّرجية .

د - دالة المقياس :

الصورة العامة لهذه الدالة هي د(س) = | ا س + ب | + حـ والتمثيل البياني لهذه الدالة هو نفس التمثيل البياني للدالة د (س) = | س | بعد إزاحته بمقدار (ب) من الوحدات في اتجاه محور السينات وتكون هذه الإزاحة إلى اليمين ، إذا كانت (ب) سالبة ، أو إلى اليسار إذا كانت (ب) موجبة، وأما إزاحته رأسياً إلى أعلى أو إلى أسفل فتعتمد على قيمة (حـ) من الوحدات فتكون الإزاحة إلى أعلى إذا كانت (حـ) موجبة، وإلى أسفل إذا كانت (حـ) سالبة وأمّا اختلاف قيمة (ا) فينتج عنه اختلاف بُعد أو اقتراب الشعاعين عن محور الصادات .



والازاحة تتم للشكل نفسه إمّا أفقياً أو رأسياً أو كليهما إلى أماكن مختلفة ، وعلى ضوء هذه الازاحة سواءً كانت إلى اليمين أو إلى اليسار أو إلى أسفل أو إلى أعلى يتحدّد مدى الدالة واطّرادها .

وحسب تعريف مقياس العدد الحقيقي فإن :

$$\text{د(س)} = |\text{ا س} + \text{ب}| + \text{حـ} = \begin{cases} \text{ا س} + (\text{ب} + \text{حـ}) \text{ ، س} \geq -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \\ -\text{ا س} - (\text{ب} - \text{حـ}) \text{ ، س} < -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \end{cases}$$

- التمثيل البياني للدالة متماثل بالنسبة للمستقيم س = $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$.
- مدى الدالة = [حـ ، ∞ [
- الدالة تناقصية في الفترة] - ∞ ، $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ [

وتزايدية في الفترة [$-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ، ∞ [

هـ - دالة الدرجة الثانية :

الصورة العامة لدالة الدرجة الثانية في متغير واحد هي

د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠ ، ب ، جـ ∈ ح

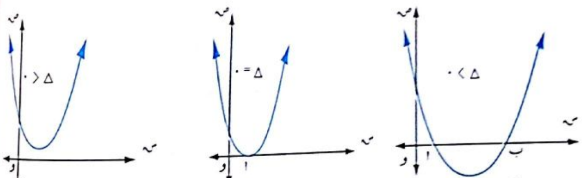
- هذه الدالة يمثلها بيانياً منحنى ذو فرعين (يسمّى قطعاً مكافئاً) متماثلا بالنسبة لمستقيم رأسي يمر برأس المنحنى .
- منحنى هذه الدالة يكون مفتوحاً إلى أعلى إذا كان أ > ٠ ، ومفتوحاً إلى أسفل إذا كان أ < ٠ .
- التمثيل البياني لهذه الدالة هو نفس منحنى الدالة أ (س - ب)^{٢} بعد ان نضع الدالة د (س) على الصورة أ (س - $\bar{ب}$)^{٢} + $\bar{جـ}$ (وهي طريقة إكمال المربع) [فيكون رأس المنحنى هو النقطة ($\bar{ب}$ ، $\bar{جـ}$) فمثلاً لرسم الدالة (س^{٢} + ٤س - ٥) نضع الدالة على الصورة أ (س - $\bar{ب}$)^{٢} + $\bar{جـ}$ فتصبح الدالة كالتالي (س^{٢} + ٤ س) - ٥ ثم نكمل المقدار (س^{٢} + ٤ س) ليكون مربعا كاملاً ، فتكون الدالة (س^{٢} + ٤ س + ٤) - ٥ - ٤ ، أي أن د (س) = (س + ٢)^{٢} - ٩ .

فيكون رأس المنحنى هو النقطة (-٢ ، -٩) ، ثم نضع بعض قيم س وقيم د(س) المناظرة ونرسم المنحنى ومن الرسم نستنتج المدى وإطراد الدالة] ثم إزاحته بقدر (ب) من الوحدات في اتجاه محور السينات وتكون الإزاحة إلى اليمين أو إلى اليسار حسب كون (ب) موجبة أو سالبة ، ثم إزاحته رأسياً بقدر (جـ) من الوحدات وتكون هذه الإزاحة رأسياً إلى أعلى اذا كانت (جـ) موجبة ورأسياً إلى أسفل إذا كانت (جـ) سالبة. وأما اختلاف قيمة (أ) فينتج عنه اختلاف في تقوّس فرعي المنحنى فقط.

- إذا كان المميّز (Δ = ب^{٢} - ٤ أ جـ) موجباً فان منحنى الدالة يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين وبالتالي فإن جذري المعادلة حقيقيان . (أنظر الشكل ٢ -٢أ)

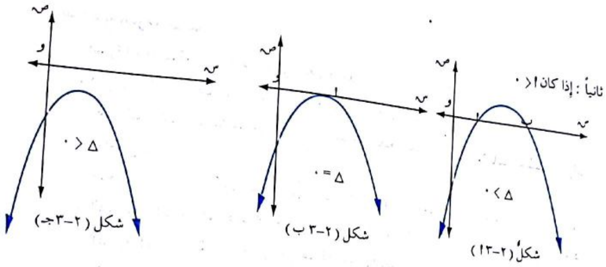
وإذا كان المميز = ٠ فإن منحنى الدالة يمس محور السينات في نقطة واحدة ويكون للمعادلة جذران متساويان (الشكل ٢ - ٢ب) ، وإذا كان المميز سالباً فإن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات في أية نقطة وبالتالي فإن جذري المعادلة تخيليان ولا يمكن تحديدهما (الشكل ٢ - ٢ جـ)

أولاً : إذا كان أ > ٠ .



شكل (٢-٢أ) شكل (٢-٢ ب) شكل (٢-٢جـ)

ثانياً : إذا كان أ < ٠



شكل (٢-٣أ) شكل (٢-٣ ب) شكل (٢-٣جـ)

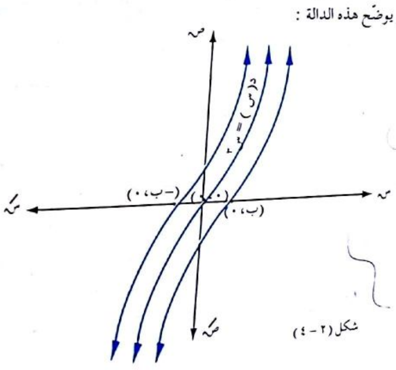
و - دالة الدرجة الثالثة :

الصورة العامة لهذه الدالة هي د (س) = أ (س - ب)^{٣} + جـ .

- منحنى هذه الدالة هو نفس منحنى الدالة د(س) = س^{٣} بعد إزاحته بقدر (ب) من الوحدات في اتجاه محور السينات ، وتكون هذه الإزاحة إلى اليمين إذا كانت (ب) موجبة، أو إلى اليسار إذا كانت (ب) سالبة ، ثم ازاحته رأسياً بقدر (جـ) من الوحدات وتكون هذه الإزاحة رأسياً إلى أعلى إذا كانت (جـ) موجبة ورأسياً إلى أسفل إذا كانت (جـ) سالبة .
- تكون تزايدية على ح إذا كانت أ موجبة ، وتناقصية على ح إذا كانت أ سالبة
- مداها ح
- ليست زوجية وليست فردية
- متماثلة حول النقطة (ب، جـ)

وأما اختلاف قيمة (أ) المطلقة فينتج عنه اختلاف في تقوّس منحنى الدالة .

والتمثيل البياني التالي يوضّح هذه الدالة :



شكل (٢ - ٤)

ز – الدالة د (س) = $\frac{1}{س - ب}$ + جـ ، س ≠ ب

– إن التمثيل البياني لهذه الدالة هو التمثيل البياني نفسه للدالة د (س) = $\frac{1}{س}$ بعد إزاحته بقدر (ب) من الوحدات في اتجاه محور السينات إلى اليمين اذا كانت (ب) سالبة وإلى اليسار إذا كانت (ب) موجبة، ثم ازاحته نحو محور الصادات بقدر (جـ) من الوحدات ، إلى أعلى إذا كانت (جـ) موجبة وإلى اسفل إذا كانت (جـ) سالبة .

– مجموعة تعريف هذه الدالة هو ح / {ب}

– مداها = ح / {جـ}

– متماثلة بالنسبة للنقطة (ب ، جـ)

– ليست زوجية وليست فردية اذا كانت ب ≠ ٠ ، جـ ≠ ٠ .

– تناقصية في كل من الفترتين]– ∞ ، ب[،]ب ، ∞[

– واما الدالة د(س) = $\frac{-1}{س - ب}$ + جـ فلها نفس خواص الدالة د (س) = $\frac{1}{س - ب}$ + جـ ولكن فقط تكون تزايدية في كل من الفترتين]– ∞ ، ب[،]ب ، ∞[.

واما التمثيل البياني للدالة د (س) = $\frac{1}{س - ب}$ فهو التمثيل البياني نفسه للدالة د (س) = $\frac{1}{س}$ بعد إزاحته بقدر (ب) من الوحدات في اتجاه محور السينات نحو اليمين أو نحو اليسار حسب اشارة (ب) سالبة أو موجبة وهي ليست زوجية وليست فردية إذا كانت ب ≠ ٠ أما إذا كانت ب = ٠ فهي فردية وتكون تناقصية في كل من الفترتين]– ∞ ، ب[،]ب ، ∞[.

توجيهات طرائقية عامة

١ – يتم مراجعة مفهوم التطبيق ومكوناته وتعطى أمثلة على ذلك يوضّح فيها المجال والمجال المقابل كمجموعات منتهية أو غير منتهية ، ثم يتم بعد ذلك الربط بين التطبيق بشكل عام والدالة الحقيقية، فإذا كان كل من المجال والمجال المقابل لدالة هما مجموعة الأعداد الحقيقية ح أو مجموعة جزئية منها، يسمّى هذا التطبيق تطبيقا حقيقيا أو دالة حقيقية ؛

٢ – غالباً ما تُذكر قاعدة الدالة الحقيقية دون ذكر المجال والمجال المقابل، وفي هذه الحالة يعتبر مجالها هو أوسع مجموعة جزئية من ح أما المجال المقابل فهو ح .

٣ – يتم التوضيح الكامل من قبل المعلم لكيفية إيجاد مجموعة التعريف للدوال كثيرات الحدود وللدوال الكسرية، وللدوال الجذرية بحيث يوضّح المعلم أهمية إجراء العمليات الواردة في قاعدة هذه الدوال وذلك بالحصول على صورة لكل عنصر في المجال المعرّف لكل منها، حتى يتم تحديد مجموعة تعريف هذه الدوال.

٤ – على المعلم مراعاة الطرق المختلفة لايجاد المدى كما ورد في الكتاب المدرسي مثل الصورة العكسية حيث يتم إيجاد س بدلالة ص ومن ثم إيجاد مجموعة تعريف الصورة العكسية للدالة ، وإذا كانت الدالة من الدرجة الثانية يمكن إيجاد مداها عن طريق إكمال المربع أو عن طريق التمثيل البيانيّ للدالة، ومن ثم ايجاد مداها من التمثيل البياني، أو طريقة البناء وهي طريقة تعتمد على مجموعة التعريف ومنها نتوصّل إلى المدى، أو عن طريق المميز Δ وهي طريقة لتميز الجذرين وتحديد إشارة معامل $س^2$

٥ – أينما وردت كلمة دالة يُقصد بها دالة حقيقية

٦ – تعطى أمثلة متعددة لتثبيت مفهومي الدالتين : الزوجية والفردية والتمييز بينهما مع التوضيح بالتمثيل البياني ، بالإضافة إلى تمييز الدوال التي ليست زوجية وليست فردية .

٧ – عند تدريس دالة المقياس؛ على المعلم ربط هذه الدالة بما سبق تدريسه في الوحدة الأولى (حقل الأعداد الحقيقية) حول مقياس العدد الحقيقي والخواص التابعة له .

٨ – عند تدريس دالة الصحيح يُنبِّه الطلاب إلى ما ياتي :

أ) دالة الصحيح ليست زوجية وليست فردية

ب) تكون الدالة ثابته في الفترة [ن ، ن + ١ [

جـ) [س] ≤ س ≤ [س] + ١

د) [س + ن] = [س] + ن ، ∀ س ∈ ح ، ن ∈ ص

٩ – عند رسم دالة الصحيح يجب الاهتمام بالفترات الخاصة بكل دالة

١٠– وبشكل عام عند تمثيل أي دالة ينبغي الانتباه إلى ما يأتي :

– تحديد مجموعة التعريف قبل رسمها

– من الرسم يحاول إيجاد مدى الدالة، واطّرادها، وزوجية هي أم فردية، أو ليست زوجية وليست فردية .

– الدالة الخطية د(س) = أ س + ب (أ ≠ ٠) تكون تزايدية في حالة أ > ٠ وتناقصية في حالة أ < ٠

١١ – بالنسبة للدالة الخطية سبق للطالب تمثيلها على ح ولكن هنا ينبغي أن يبين المعلم تمثيلها على فترات من مجموعة تعريف كل منها مثل د(س) = ٢ س + ٥ حيث ١ ≤ س ≤ ٧ أو س ∈ [١ ، ٧]

الأخطاء الشائعة

هناك أخطاء شائعة قد يقع فيها الطلاب نذكر منها على سبيل المثال :

١ - عند إيجاد قيمة [٢,٥] ، [-٢,٥] بعض الطلاب يعتبر أن إجابتهما العدد نفسه ولكن تختلفان في الإشارة، وهذا غير صحيح حيث أن [٢,٥] = ٢ بينما [-٢,٥] = -٣

٢ - أيضاً بعض الطلبة يعتبر أن [أ س] = [أ] [س] وهذا غير صحيح ولكن [أ س] ≠ [أ] [س]

٣ - بعض الطلاب يختصر المقدار $\frac{س}{|س|}$ = ١ وهذا غير صحيح وبالمثل $\frac{س}{|س|}$ ≠ ١

٤ - بعض الطلاب يعتبر أن الدالتين د(س) = $\sqrt{\frac{١-س}{١+س}}$ ، د(س) = $\frac{\sqrt{١-س}}{\sqrt{١+س}}$ لهما مجموعة التعريف نفسها وهذا غير صحيح

٥ - بالنسبة للدالة د(س) = $\sqrt{٦٤-س^٢}$ ، ∀ س ∈ [-٨، ٨] يوجد بعض الطلاب المدى على أنه الفترة المغلقة [-٨، ٨] بينما المدى = [٠، ٨]

٢ - ١ الدوال الحقيقية

عدد الحصص : (٧) حصص

الأهداف

- يعرّف الدالة الحقيقية .
- يوجد مجموعة تعريف دالة معطاة .
- يوجد مدى دالة معطاة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في سبع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة

الحصتان الثانية والثالثة : مجموعة تعريف دالة .

الحصتان الرابعة والخامسة : مدى الدالة .

الحصتان السادسة والسابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال النشاطات والمناقشات الصفية ومتابعة حل التمارين والواجبات الصفية والمنزلية وفي نهاية الحصة السابعة يُعطى السؤال التالي كخطوة تقويم :

أوجد مجموعة تعريف الدالة د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ومداها .

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ - ١)

أولاً:

[١] ح

[٢] ح / {$\frac{٢}{٣}$}

[٣] ح / {٩ ، -٩}

[٤] م.ت للدالة د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤٩}$ هي : ح /]-٧ ، ٧[

[٥] م.ت للدالة د(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ هي: [$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

[٦] م.ت للدالة د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ هي : [-٢ ، ٢]

[٧] ح

[٨] ح / [$-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$]

[٩] ح / {-٢ ، ٣}

[١٠]]-٢ ، ∞[

[١١] [١ ، ∞[

[١٢] ح / {١}

[١٣] [١ ، ∞[/ {١٠}

[١٤] [-٢ ، ∞[/ {٥}

[١٥] [٢ ، ∞[

[١٦] [٣ ، ∞[

[١٧] ح

[١٨] ح

[١٩] ح

[٢٠] أ) ح / {$-\frac{١}{٢}$}

ب) [٤ ، ∞[

جـ)]٤ ، ∞[

ثانياً : [٢١] م . ت = ح / {١} ، المدى هو ح / {١}

[٢٢] م . ت = ح ، المدى هو [٠ ، ٥/٤]

[٢٣] م . ت = [-٨ ، ٨] ، المدى هو [٠ ، ٨]

[٢٤] م . ت = ح ، المدى هو [٠ ، ∞[

[٢٥] م . ت = ح / {٢ ، -١} ، المدى هو ح / {٠}

[٢٦] م . ت = ح /]-√٧ ، √٧[، المدى هو ح

[٢٧] م . ت = ح ، المدى هو [-٤ ، ∞[

[٢٨] م . ت =]-∞ ، ١] ، المدى هو [٧ ، ∞[

[٢٩] م . ت للدالة د(س) = ٢س - ٣ هي ح والمدى =]-∞ ، ٢]

[٣٠] م . ت = ح والمدى =]٠ ، ∞[، المدى هو [٠ ، ∞[

[٣١] م . ت = ح /]-١ ، ٣] ، المدى هو ح /]-١ ، ١[

[٣٢] م . ت = ح / [-١ ، ١] ، المدى هو ح

[٣٣] م . ت = ح /]-٢ ، ١[، المدى هو ح

[٣٤] م . ت = ح /]-١ ، ٦[، المدى هو [١ ، ∞[∪]-∞ ، -٢]

[٣٥] م . ت = ح ، المدى هو [٩ ، ∞[

[٣٦] م . ت = ح ، المدى هو]-∞ ، ٣]

[٣٧] م . ت = ح

٢ - ٢ بعض أنواع الدوال الحقيقية

عدد الحصص : (٩) حصص

الأهداف
- يعرّف الدالة الزوجية والدالة الفردية ويمثّلها .
- يحدّد نوع دالة معطاة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .
- يعرّف دالة المقياس ويمثّلها .
- يوجد مجموعة تعريف دالة المقياس ومداها .
- يعرّف دالة الصحيح ويمثّلها .
- يوجد مجموعة تعريف دالة الصحيح ومداها .
- يعرّف الدالة المحدودة ويوجد حدّيها .

تنفيذ حصص البند يُنفذ هذا البند في ٩ حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : الدالة الزوجية والدالة الفردية .
الحصتان الثالثة والرابعة : دالة المقياس .
الحصتان الخامسة والسادسة : دالة الصحيح .
الحصتان السابعة والثامنة : الدالة الدورية .
الحصة التاسعة : تمارين عامة (صفية) .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة التاسعة يُعطى السؤالان التاليان كخطوة تقويم :

أ) بيّن نوع الدالة د(س) = س (٤ - س٢) من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

ب) أوجد مجموعة تعريف الدالة د(س) = |س + ٤| ومداها

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ - ٢)

أولاً : الدوال الزوجية هي التمارين التالية : ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١١

الدوال الفردية هي التمارين التالية : ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٠

الدوال ليست زوجية ولا فردية هي التمارين : ٣ ، ١٢

[١٣] الشكل (٢ - ٧ أ) يمثل دالة فردية ، متماثلة حول نقطة الأصل

الشكل (٢ - ٧ ب) يمثل دالة زوجية ومتماثلة حول محور الصادات

الشكل (٢ - ٧ جـ) يمثل دالة زوجية ومتماثلة حول محور الصادات

الشكل (٢ - ٧ د) يمثل دالة فردية ومتماثلة حول نقطة الأصل

الشكل (٢ - ٧ هـ) لا يمثل دالة زوجية أو دالة فردية

الشكل (٢ - ٧ و) لا يمثل دالة زوجية أو دالة فردية

ثانياً :

[١٤] د(س) = |٢س - ٧| = $\begin{cases} ٢س - ٧ ، & س \geq \frac{٧}{٢} \\ ٧ - ٢س ، & س < \frac{٧}{٢} \end{cases}$

ولإيجاد المدى نستخدم طريقة البناء :

أولاً : $س \geq \frac{٧}{٢}$

$٢س \geq \frac{٧}{٢} \times ٢$

$٢س \geq ٧$

$٢س - ٧ \geq ٧ - ٧$

$د(س) \geq ٠$

ثانياً : $س < \frac{٧}{٢}$

$٢س < ٧$

$-٢س > -٧$

$٧ - ٢س > ٧ - ٧$

$د(س) > ٠$

∴ المدى = [٠ ، ∞[

لاحظ أن دالة المقياس تكون باستمرار غير سالبة ، أي أن مداها [٠ ، ∞[

[١٥] د(س) = |س + ٢| − ١

|س + ٢| = { س + ٢ ، س ≥ −٢ ؛ −س − ٢ ، س < −٢ }

|س + ٢| − ١ = { س + ٢ − ١ ، س ≥ −٢ ؛ −س − ٢ − ١ ، س < −٢ }

ولإيجاد المدى نستخدم طريقة البناء :

أولاً : عندما س ≥ −٢	ثانياً : عندما س < −٢
س − ٢ ≥ −٤	−س > ٢
د(س) ≥ −٤	−س − ٦ > ٢ − ٦
	د(س) > −٤

∴ المدى = [−٤ ، ∞[

بما أن مدى دالة المقياس هو [٠ ، ∞[، فإن مدى الدالة |س + ٢| − ٤ هو [−٤ ، ∞[.

[١٦] فكرة التمرين [١٥] نفسها ويكون مداها [−١ ، ∞[

[١٧] فكرة التمرين [١٤] نفسها ومداها [٠ ، ∞[

[١٨] د(س) = |س − ٣| + ٢|س − ٢| + س

|س − ٣| = { س − ٣ ، س ≥ ٣ ؛ −س + ٣ ، س < ٣ }

|س − ٢| = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٣ فإن :

د(س) = س − ٣ + ٢(س − ٢) + س

= س − ٣ + ٢س − ٤ + س

= ٤س − ٧

عندما ٢ ≤ س < ٣ فإن :

د(س) = −س + ٣ + ٢(س − ٢) + س

= −س + ٣ + ٢س − ٤ + س

= ٢س − ١

عندما س ≤ ٢ فإن :

د(س) = −س + ٣ + ٢(−س + ٢) + س

= −س + ٣ − ٢س + ٤ + س

= −٢س + ٧

∴ د(س) = { ٤س − ٧ ، س > ٣ ؛ ٢س − ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٣ ؛ −٢س + ٧ ، س ≤ ٢ }

لإيجاد المدى

عند س > ٣	عند ٢ ≤ س ≤ ٣	عند س ≤ ٢
٤س > ١٢	٤ ≤ ٢س ≤ ٦	−٢س ≥ −٤
٤س − ٧ > ١٢ − ٧	٣ ≤ ٢س − ١ ≤ ٥	−٢س + ٧ ≥ −٤ + ٧
٤س − ٧ > ٥	٣ ≤ د(س) ≤ ٥	د(س) ≥ ٣
د(س) > ٥		
المدى =]٥ ، ∞[	المدى = [٣ ، ٥]	المدى = [٣ ، ∞[

∴ المدى =]٥ ، ∞[∪ [٣ ، ٥] ∪ [٣ ، ∞[= [٣ ، ∞[

[١٩] فكرة حل التمرين [١٨] نفسها

ثالثاً :

[٢٠] م . ت . هي ح والمدى ص

[٢١] م . ت . هي ح والمدى ص

[٢٢] م . ت =]−١ ، ٠] والمدى = $\frac{١}{ن+١}$ ، ن ≠ −١ ، ن ∈ ص

رابعاً :

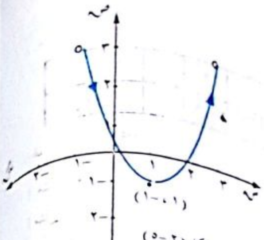
[٢٣]	{−٣}	[٢٤]	{−١ ، ١}
[٢٥]	{−$\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}	[٢٦]	{٣ ، ٢ ، −٣ ، −٢}
[٢٧]	[$\frac{٥}{٢}$ ، ٢[	[٢٨]	]−١ ، −$\frac{١}{٢}$[
[٢٩]	ص	[٣٠]	]−١ ، ٠]

خامساً:

[٣١] د(س) = س٢ - ٢س ، س ∈ [-١ ، ٣]

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	٣	٠	-١	٠	٣

المدى = [-١ ، ٣]

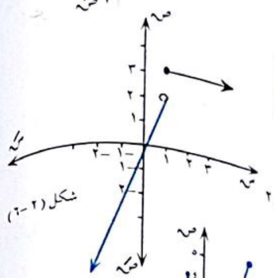

شكل (٢-٥)

[٣٢] د(س) = { ٢س ، س < ١ ؛ ٣ ، س ≥ ١ }

س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٢	٠	٣	٣	٣

م.ث. هو ح

المدى =]-∞ ، ٣]


شكل (٢-٦)

[٣٣] د(س) = |٣س - ١| ، -١ ≤ س < ٢

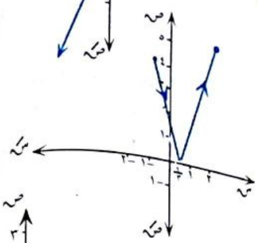
عندما س ≤ $\frac{1}{3}$ ، د(س) = ١ - ٣س

س	-١	٠	$\frac{1}{3}$
د(س)	٤	١	٠

عندما س > $\frac{1}{3}$ ، د(س) = ٣س - ١

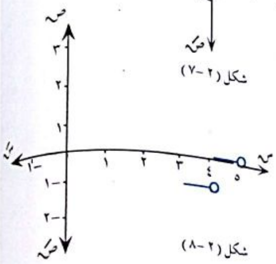
س	$\frac{1}{3}$	١	٢
د(س)	٠	٢	٥

المدى = [٠ ، ٥]


شكل (٢-٧)

[٣٤] د(س) = [س - ٤] ، ٢ ≤ س < ٥

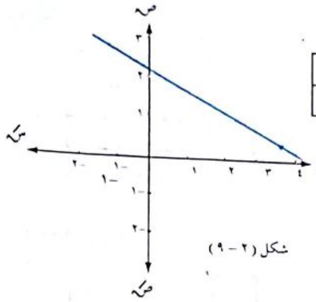
المدى = {-١ ، ٠}


شكل (٢-٨)

[٣٥] د(س) = $\sqrt{٤ - س}$

س	٤	٣	٢	١	٠
د(س)	٠	١	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	٢

المدى = [٠ ، ∞[


شكل (٢-٩)

[٣٦] مثل رقم [٣٣] .

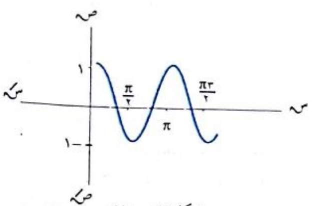
[٣٧] مثل رقم [٣١] .

[٣٨] مثل رقم [٣٣] .

[٣٩] مثل رقم [٣٣] ، [٣٤] .

[٤٠] د(س) = جتا ٢س

س	٠	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
جتا٢س	١	-١	١	-١


شكل (٢-١٠)

[٤١] د(س) = جتا س

د(س + ر) = جتا (س + ر)

جتا (س) = جتا (س + ر) عندما ر = ٢ π

∴ الدالة دوريّة ودورها = ٢ π

٢ - ٣ إطراد الدوال

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

- يعرّف الدالة التزايدية والدالة التناقصية ويمثلهما .
- يبحث إطراد دالة معطاة .
- يوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى من التمثيل البياني لدالة ..
- يتعرّف الدالة المحددة ويوجد حديها .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ست حصص كالتالي :

الحصتان الأولى والثانية : اطراد الدوال

الحصتان الثالثة : القيمة العظمى والقيمة الصغرى

الحصتان الرابعة و الخامسة : الدالة المحدودة .

الحصة السادسة : تمارين صفية

التقويم

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى السؤال التالي :

أ) ارسم الدالة د(س) = |٣س - ١| ، -١ ≤ س < ٢

وابحث اطرادها وأوجد قيمها العظمى والصغرى .

ب) اثبت أن الدالة د(س) = $\frac{١}{س^٢ + ٥}$ محدودة وأوجد حديها .

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ - ٣)

[١] الفقرات ١ ، ٣ ، ٤ ، ٨ دوال تزايدية

والفقرة (٢) دالة تزايدية في الفترة [٠ ، ∞[وتناقصية في الفترة]- ∞ ، ٠]

والفقرة (٥) دالة تناقصية .

والفقرة (٦) دالة تزايدية في الفترة [٣ ، ∞[وتناقصية في الفترة] - ∞ ، ٣]

الفقرات ٧ ، ٩ ، ١٠ فكرة الفقرة (٦) نفسها .

الفقرة (١١) فكرة الفقرة (٢) نفسها

الفقرة (١٢) دالة تزايدية في الفترة [٢ ، ∞[، وتناقصية في الفترة]- ∞ ، ٢[

[٢] الشكل (٢ - ١٤أ) دالة تناقصية في الفترة] - ∞ ، ٠]

و تزايدية في الفترة]٠ ، ∞ [،

م . ت = ح ، المدى =]١ ، ∞ [.

شكل (٢ - ١٤ ب) دالة تناقصية في الفترة] - ∞ ، -٢[

و تزايدية في الفترة] -٢ ، ∞ [

م . ت = ح ، المدى = [- ٣ ، ∞ [

شكل (٢ - ١٤ حـ) دالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ٠ [

و تناقصية في الفترة] ٠ ، ∞ [

م . ت = ح ، المدى =] - ∞ ، ٠ [

شكل (٢ - ١٤ ء) دالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، - ٢ [

و تزايدية في الفترة] - ٢ ، ∞ [

م . ت = ح ، المدى = ح

شكل (٢ - ١٤ هـ) دالة تناقصية في الفترة] ١ ، ٢ [

و تزايدية في الفترة]- ∞ ، ١ [وفي الفترة] ٢ ، ∞ [

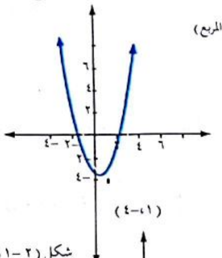
م . ت = ح ، المدى = ح

شكل (٢ - ١٤ و) م . ت = ح ، الدالة تناقصية في الفترة] - ∞ ، + ∞ [، المدى = ح

[٣] ١) د(س) = س٢ - ٢ س - ٣ بالتعويض المباشر أو (بإكمال المربع)

∴ د(س) = (س - ١)٢ - ٤

س	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥



شكل (٢ - ١١)

من الرسم المدى = [- ٤ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة] - ∞ ، ١]

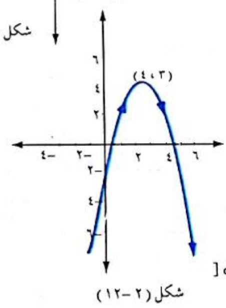
وتزايدية في الفترة [١ ، ∞ [

٢) د(س) = ٦ س - س٢ - ٥

= - (س٢ - ٦ س) - ٥ (بإكمال المربع)

د(س) = ٤ - (س - ٣)٢

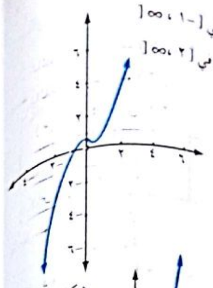
س	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
د(س)	-٥	٠	٣	٤	٣	٠	-٥



شكل (٢ - ١٢)

من الرسم المدى =] - ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية في] - ∞ ، ٣] وتناقصية في [٣ ، ∞ [



شكل (٢-١٣)

٣) المدى [−٢ ، ∞ [، تناقصية في] −∞ ، −١ [وتزايدية في [−١ ، ∞ [

٤) المدى] −∞ ، −٣] ، تزايدية في] −∞ ، ٢ [وتناقصية في [٢ ، ∞ [

٥) د (س) = (س + ١) | س |

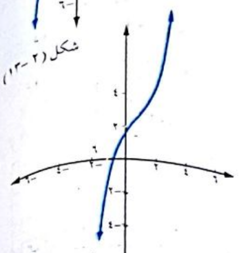
$= \begin{cases} س^٢ + س ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ - س ، & س < ٠ \end{cases}$

	س ≥ ٠			س < ٠			
س	٢	١	٠	$-\frac{١}{٢}$	−١	−٢	−٣
د(س)	٦	٢	٠	$-\frac{١}{٤}$	٠	−٢	−٦

المدى = ح

الدالة تناقصية في [$-\frac{١}{٢}$ ، ٠]

تزايدية في] −∞ ، $-\frac{١}{٢}$] ، [٠ ، ∞ [



شكل (٢-١٤)

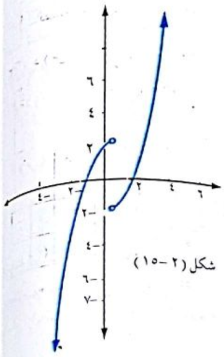
٦) د (س) = ٢ + س | س |

$= \begin{cases} س^٢ + ٢ ، & س \geq ٠ \\ ٢ - س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$

	ص = ٢ + س^٢ ، س ≥ ٠			ص = ٢ − س^٢ ، س < ٠		
س	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
د(س)	٦	٣	٢	١	−٢	−٧

المدى = ح ، الدالة تزايدية على ح

متماثلة بالنسبة للنقطة (٠ ، ٢)



شكل (٢-١٥)

٧) د (س) = $\frac{س^٣ - ٢ س}{| س |}$ = $\begin{cases} س^٢ - ٢ ، & س > ٠ \\ -س^٢ + ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$

	ص = س^٢ − ٢ ، س > ٠			ص = −س^٢ + ٢ ، س < ٠		
س	٣	٢	١	−١	−٢	−٣
د(س)	٧	٢	−١	١	−٢	−٧

من الرسم : المدى = ح / { ٠ }

الدالة تزايدية في] −∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

٨) مماثلة للتمرين رقم (٦) .

٩) مماثلة للتمرين رقم (٧) .

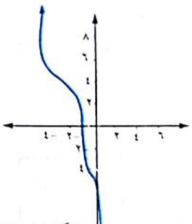
١٠) مماثلة للتمرين رقم (٦) .

١١) د (س) = ٤ − (س + ٢)^٣

س	١	٠	−١	−٢	−٣	−٤
د(س)	−٢٣	−٤	٣	٤	٥	١٢

من الرسم : المدى = ح

الدالة تناقصية على ح



شكل (٢-١٦)

١٢) د (س) = − | س^٣ | − ٤

د (س) = − | س^٣ | − ٤

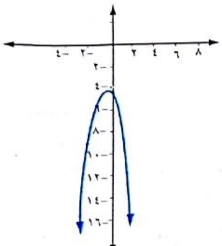
$= \begin{cases} -س^٣ - ٤ ، & س \geq ٠ \\ س^٣ - ٤ ، & س < ٠ \end{cases}$

	ص = − س^٣ − ٤ ، س ≥ ٠				ص = س^٣ − ٤ ، س < ٠		
س	٣	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
د(س)	−٣١	−١٢	−٥	٤	−٥	−١٢	−٣١

من الرسم : المدى =] −∞ ، −٤]

الدالة تزايدية في] −∞ ، ٠] .

تناقصية في [٠ ، ∞ [



شكل (٢-١٧)

١٣) د (س) = $\frac{س^٤ - ٢ س}{| س |}$ ، س ≠ ٠

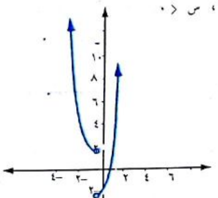
= $\frac{س(س^٣ - ٢)}{| س |}$ ، س ≠ ٠ ، = $\begin{cases} س^٣ - ٢ ، & س > ٠ \\ -س^٣ + ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$

	ص = س^٣ − ٢ ، س > ٠			ص = − س^٣ + ٢ ، س < ٠		
س	٣	٢	١	−١	−٢	−٣
د(س)	٢٥	٦	−١	٣	١٠	٢٩

من الرسم : المدى =] −٢ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة] −∞ ، ٠ [

تزايدية في الفترة] ٠ ، ∞ [



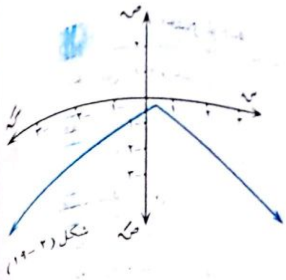
شكل (٢-١٨)

١٤) د(س) = { [illegible]

من الرسم : المدى =] - ∞ ، ٠]

الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ٠ [

تناقصية في الفترة] ٠ ، ∞ [



شكل (٢-١٩)

[٤]

(١) الدالة محدودة ومداها [-٧ ، ١١]

(٢) الدالة محدودة ومداها] ٠ ، $\frac{١}{٢}$]

(٣) فكرة الفقرة رقم (٢)

(٤) الدالة محدودة ومداها] $\frac{٢}{٣}$ ، ١]

(٥) الدالة محدودة ومداها [-١ ، ∞ [

(٦) الدالة محدودة ومداها [-$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

(٧) الدالة محدودة ومداها [$\frac{١}{٢}$ ، ١]

(٨) الدالة محدودة ومداها] ٠ ، $\frac{٩}{٢\sqrt{٧}}$]

(٩) الدالة محدودة ومداها [-٢ ، ٢٣]

٢ : ٤

اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان

الأهداف

يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف هذه الوحدة

تنفيذ الدرس

يُعطى الاختبار الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي استعداداً لاختبار الوحدة .

يعطي الاختبار الذي ادناه أو اختباراً مشابهاً من إعداد المدرس ، بحيث يغطي أهداف الوحدة كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢
٢	٤ ، ٦ ، ٩
٣	٣
٤	٧ ، ٥
٥	٨

الاختبار

[١] أ) عرّف الدالة الحقيقية

ب) أوجد مجموعة تعريف الدالة د (س) = $\frac{\text{س}+٢}{٢-\text{س}}$ ، ومداها .

[٢] ارسم الدالة :

د (س) = |س - ٢ | + ٥ ، وابحث إطرادها وأوجد القيم العظمى والصغرى إن وجدت .

[٣] بيّن نوع الدالة د (س) = س^{٢} + ٣ س من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

[٤] اثبت أن الدالة د (س) = س - [س] دورية ، ودورها (١)

[٥] اثبت أن الدالة د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢}+١}$ محدودة ، وأوجد حديها .

المصطلحات والرموز الواردة في هذه الوحدة

Real function	الدالة الحقيقية
Domain	مجموعة التعريف (المجال)
Co - domain	المجال المقابل
Range	المدى
Even function	الدالة الزوجية
Odd function	الدالة الفردية
Modulus function	دالة المقياس
Step function or the greatest integer functin	الدالة الدرجية أو دالة الصحيح
Square root function	الدالة الجذرية التربيعية
Polynomial function	الدالة الحدودية
Rational function	الدالة النسبية (الكسرية)
Increasing function	الدالة التزايدية
Decreasing function	الدالة التناقصية
Quadratic function	الدالة التربيعية
Constant function	الدالة الثابتة
Identity function	الدالة المطابقة
Linear function	الدالة الخطية
Multi - defined function	الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
Periodic function	الدالة الدورية
Bounded function	الدالة المحدودة
Trigonometric function	الدالة المثلثية
Maximum value	القيمة العظمى
Minimum value	القيمة الصغرى
Boundary	حدود

المراجع

١) التفاضل والتكامل ، د . محمد رجب ، دار المعارف ، القاهرة يناير ١٩٧٥ م

٢) الرياضيات (التفاضل والتكامل) . د . منير مرسي ، د . عبد الحميد ابراهيم .

٣) أصول تدريس الرياضيات / د . نظلة حسن خضر

4) Manaj Dubey R s Tomer, Question Bank in Mathematics for class IX, second edition,Published by Tata Mc Graw- Hill publishing Company Limited New Delhi 99

5) Allan Bellman,Sadie Chavis Bragg, Suzanne H . Chapin- Theodore J.Gardella Bettye C. Hall - Edward Manfre, Advanced Algebra , Prentice Hall - Needhan Massachusetts upper Saddle River, New Jersey .

6) Senior Secondary School Mathematics, Part A , for Class 12 Printed at B B Printers, Panta - 800 006 , 2000.

الوحدة الثالثة

المتتاليات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٣ - ١	المتتالية	٤
٣ - ٢	المتتالية الحسابية	٥
٣ - ٣	المتتالية الهندسية	٧
٣ - ٤	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	١٨

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ - يعرّف المتتالية.

٢ - يميّز المتتالية من دوال معطاة.

٣ - يميّز المتتالية الحسابية ويوجد أساسها وحدّها العام.

٤ - يستنتج قانون الحد العام لمتتالية حسابية.

٥ - يكتب المتتالية الحسابية في صورتها العامة.

٦ - يستنتج قانون مجموع (ن) حداً في متتالية حسابية.

٧ - يوجد مجموع (ن) حداً من متتالية حسابية.

٨ - يميّز المتتالية الهندسية ويوجد أساسها وحدّها العام.

٩ - يستنتج قانون الحد العام لمتتالية هندسية.

١٠ - يكتب المتتالية الهندسية في صورتها العامة

١١ - يستنتج قانون مجموع (ن) حداً من متتالية هندسية.

١٢ - يوجد مجموع (ن) حداً في متتالية هندسية.

١٣ - يحل مسائل رياضية ، وتطبيقات حياتيه على المتتاليات الحسابية والهندسية.

المقدمة

التحليل الحقيقي هو أحد الفروع الهامة في الرياضيات ، يدرس تطبيقات (أو دوالا) مجالها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومداها مجموعة جزئية من ح ، وتسمّى هذه الدوال دوالاً حقيقية ذات متغير حقيقي، وفي هذه الوحدة سندرس نوعاً خاصاً من الدوال الحقيقية تسمّى المتتاليات.

والمتتاليات تتصف بخاصية ثابتة سواء في حالة تزايدها أو في حالة تناقصها. وهذا التغير قد يكون على شكل مقدار ثابت ولذلك يسمى تغيّراً حسابياً (عدديًا) وفي هذه الحالة تسمّى المتتالية متتالية حسابية(عددية) أو قد يكون هذا التغير على شكل نسبة ثابتة ويسمّى تغيّراً نسبيًا وفي هذه الحالة تسمّى المتتالية متتالية هندسية.

وتلعب المتتاليات دوراً هاماً ورئيسياً في مواضيع عدة في الرياضيات وخاصة لحل كثير من العلاقات الرياضية الخطية أو غير الخطية مثل حساب الفوائد وما يرتبط بها من مدد ومبالغ وحجم الإنتاج أو الاستهلاك الذي يخضع للتغير بوحدات ثابتة أو بمعدلات ثابتة.

في هذه الوحدة سوف نميز بين نوعين من أنواع المتتاليات: النوع الأول ويدخل ضمن المتتاليات الحسابية والنوع الثاني ويدخل ضمن المتتاليات الهندسية.

وتشمل هذه الوحدة ثلاثة مواضيع هي:

الأول: المتتاليات بصورة عامة وفيها نتعرّف على النقاط التالية:

- تعريف المتتالية.
- المتتاليات المنتهية وغير المنتهية والتزايدية والتناقصية والثابتة.
- التمثيل البياني للمتتالية.

الثاني: المتتاليات الحسابية وتتعرف فيها على ما يأتي:

- تعريف المتتالية الحسابية.
- قانون الحد العام للمتتالية الحسابية.
- خواص المتتالية الحسابية.
- مجموع (ن) حداً للمتتالية الحسابية.
- تطبيقات.

الثالث: المتتاليات الهندسية وتتعرف فيها على ما يأتي:

- تعريف المتتالية الهندسية.
- قانون الحد العام للمتتالية الهندسية.
- خواص المتتالية الهندسية.
- مجموع (ن) حداً للمتتالية الهندسية.
- تطبيقات.

وهنا نقدم لمحة تاريخية وخلفية علمية عن موضوع المتتاليات تحللها حصر لأهم الرموز والمفاهيم والتعميمات التي وردت فيها، ثم نعرض بعض الإرشادات الطرائقية العامة والتي هي بمثابة مقترحات للمدرس أن يعدّل فيها أو يضيف إليها. ويتبع ذلك تفاصيل كل بند بعدد حصصه وأهدافه وتوزيع وأسئلة التقويم وإجابات وإرشادات لتمارينه مع اختبار للوحدة.

لمحة تاريخية

الرياضيات من العلوم التي نالت الشيء الكثير من اهتمام العرب والمسلمين وعنايتهم فلقد برع وأضافوا إليها إضافات هامة أثارت إعجاب علماء العرب ودهشتهم فاعترفوا بفضل العرب وأثرهم خدمة العلم والمعرفة.

ولقد إطلع العرب على علم حساب الهنود واليونان والإغريق وترجموه إلى العربية وطوروه. التطورات التي حدثت في علم الحساب وخاصة في موضوع المتتاليات نجد أن هناك نصوصا عربية تحوي من أنواع المتتاليات مرفقه بالقواعد الهامة المتعلقة بدراسة المتتاليات وكيفية إيجاد حد المتتالية مهما كانت أو التي تعطي مجموع حدودها إلى أي رتبة. ولقد وجد العرب أن الهنود والإغريق قد عالجوا متتاليات متنوعة إلا أن العرب فهموا خصائص العلم الإغريقي بصورة أسرع وأعطوه الأفضلية على ما تبقى ويعود ذلك إلى تميّزه بالبراهين المنطقية خلافاً للأنظمة الأخرى التي كانت تكتفي بإعطاء القواعد العملية بسبب اتساعها. وعلاوة على ذلك كان للعرب أسلوب خاص في إجراء العمليات وكانوا يوردون طرقاً لإجراء الحسابات. والجدير بالذكر أن هناك مؤلفات عديدة تناولت دور علماء الرياضيات السابقين في المتتاليات بأنواعها فمثلاً هناك متتاليات حسابية (عددية) معينة مثل متتالية المضاعف (٢د)، في عدد كبير من المؤلفات. ونجد أن الاغريق درسوا المتتالية الحسابية العامة التي على الصورة:

١، ١+ء، ١+٢ء، ....، ١+(د-١)ء، ... ...(١)

حيث ١+(د-١)ء هو الحد العام للمتتالية ومجموع الحدود هو :

د + $\frac{1}{2}$ د(د-١)ء.

وعندما نأخذ ء القيم ١، ٢، ٣، ٤ على التوالي نجد أن:

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... هي متتالية الأعداد الصحيحة الموجبة.

١، ٣، ٥، ٧، ٩، .... هي متتالية الأعداد الفردية.

كذلك نحصل على متتاليات مثل :

١، ٤، ٧، ١٠، ...

و ١، ٥، ٩، ١٣، .....

فإذا جمعنا حدود المتتالية (١).

(الأول، ثم الأول و الثاني، فالأول والثاني والثالث، ......) نحصل تدريجياً على.

(١، ٢ + ء، ٣ + ٣ء، ٤ + ٦ء، ...) ... (٢).

وهي متتالية جديدة ومن السهل أن نرى أن حدّها ذا الرتبة د هو مجموع حدود المتتالية (١) حتى الرتبة د أي:

د + $\frac{1}{2}$ د(د-١)ء.

وقد أعطى الإغريق لحدود المتتالية (٢) اسم الأعداد المضلّعة وعندما تاخذ ء في المتتالية (٢) القيم ١، ٢، ٣، ٤ نحصل على:

١، ٣، ٦، ١٠، ....(٣)

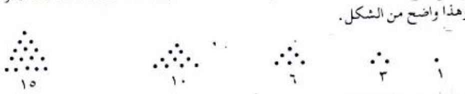
١، ٤، ٩، ١٦، ....(٤)

١، ٥، ١٢، ٢٢، ....(٥)

١، ٦، ١٥، ٢٨، ....(٦)

وهذه الفكرة يونانية الاصل، تعود إلى زمن فيثاغورث وهي كمجمل المفاهيم الرياضية اليونانية ذت أصل هندسي حيث (٣) قد انشئت من بنية كالتالي:

مجموع أي عدد من الحدود المتتالية من متتالية الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، .... ابتدأ بالواحد يشكّل عدداً مثلثاً وهذا واضح من الشكل.



١ ٣ ٦ ١٠ ١٥

لهذا فإن: ١ + ٢ + ٣ + ... + د = $\frac{1}{2}$ د(د+١) هو عدد مثلثي بضلع د.

واستطاع الفيثاغوريون إيجاد المثلث التالي من المثلث السابق بإضافة ضلع المثلث السابق زائداً واحداً كما أن مجموع عناصر أي مثلثين متتاليين مربّع كامل. وهذا ما نعبّر عنه بالرموز الحديثة كما يأتي:

$\Delta_{د}$ = مجـ$_{ك=١}^{د}$ ك = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ... = $\frac{1}{2}$ د(د+١) (للمثلث الذي ضلعه د).

$\Delta_{د+١}$ = مجـ$_{ك=١}^{د+١}$ ك = $\frac{1}{2}$ (د+١)(د+٢) (للمثلث الذي يليه وضلعه د+١).

$\Delta_{د}$ = $\Delta_{د+١}$ = $\frac{1}{2}$ (د+١)(د+د+٢) = $(د+١)^{٢}$

وأما إذا أضيفت الأعداد الفردية المتتالية فإنها تكون مربعاً كاملاً:

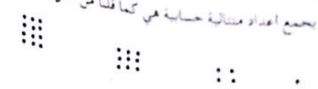
$$\text{١} + \text{٣} + \text{٥} + \text{٧} + \dots + (\text{٢}\text{د} - \text{١}) = \text{د}^{\text{٢}}$$

وهذا ما اكتشفه الفيثاغوريون أيضاً من خواص الأعداد المربعة، أن تكون الأعداد المثلثية

١ ، ١ + ٢ ، ١ + ٢ + ٣ ، ١ + ٢ + ٣ + ٤ ...

والأعداد المربعة: ١ ، ١ + ٣ ، ١ + ٣ + ٥ ...

بجمع أعداد متتالية حسابية هي كما قلنا من أصل هندسي.



وقد صنّف الإعربق جميع المتتاليات إلى ما يأتي:

(١) المتتالية الحسابية فيها الفرق بين حد والحد التالي مباشرة ثابت .

(٢) المتتالية الطبيعية فيها الفرق بين حد والحد التالي مباشرة يساوي ١

(٣) المتتالية الهندسية فيها نسبة حد إلى الحد السابق مباشرة ثابتة.

(٤) المتتالية المضاعفة فيها نسبة حد إلى الحد السابق مباشرة تساوي ٢

(٥) المتتالية الصورية مثل متتالية الأعداد المضاعفة.

أما بالنسبة للعرب والمسلمين فقد انطلقوا بعلم الحساب والجبر انطلاقاً واسعاً وعالجوا كثير من المتتاليات التي تناولها الإعربق. ومن هؤلاء العلماء الكرخي (٠٠٠ – ٤٢١هـ) ، الذي اهتم اهتماماً بالغاً بعلم الحساب والجبر فكان نتاجه عظيماً حيث بقيت أوروبا تنهل منه حقبة طويلة من الزمن ولم يترك موضوعاً في الجبر إلا طوّره .

ويقول الاستاذ روس بول في ملخص تاريخ الرياضيات: إن الكرخي طوّر قانون مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى درجة لم يسبق إليها أحد . وقد ألف الكرخي العديد من الكتب والرسائل منها: رسالة في برهان النظريات التي تتعلق بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية:

$$\text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \text{٤} + \dots + \text{د} = \frac{\text{د}(\text{د}+\text{١})}{\text{٢}} = \frac{\text{د}(\text{د}+\text{١})}{\text{٢}}$$

$$\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} + \text{٣}^{\text{٢}} + \text{٤}^{\text{٢}} + \dots + \text{د}^{\text{٢}} = \frac{\text{د}(\text{د}+\text{١})(\text{١}+\text{٢}\text{د})}{\text{٦}} = \frac{\text{د}(\text{د}+\text{١})(\text{٢}\text{د}+\text{١})}{\text{٦}}$$

$$\text{١}^{\text{٣}} + \text{٢}^{\text{٣}} + \text{٣}^{\text{٣}} + \text{٤}^{\text{٣}} + \dots + \text{د}^{\text{٣}} = \frac{\text{د}^{\text{٢}}(\text{١}+\text{د})^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \frac{\text{د}^{\text{٢}}(\text{د}+\text{١})^{\text{٢}}}{\text{٤}}$$

كما درس المسائل الآتية:

(١) مضروب عدد طبيعي في نفسه، وفي جميع ما تحته من الأعداد يساوي نصف حاصل ضرب العدد نفسه زائداً واحد في مربع العدد ويمكن التعبير عمّا سبق بالرموز على النحو التالي:

$$\text{د}[\text{د} + (\text{د}-\text{١}) + (\text{د}-\text{٢}) + \dots + \text{٣} + \text{٢} + \text{١}] = \frac{(\text{د}+\text{١})\,\text{د}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$$

ويتضح من الطرف الأيمن للمعادلة أن المطلوب إيجاد حاصل ضرب العدد د في مجموع الأعداد بتسلسلها الطبيعي حتى العدد د.

فمثلاً د = ٩ ،

$$\text{٩}[\text{٩} + \text{٨} + \text{٧} + \text{٦} + \text{٥} + \text{٤} + \text{٣} + \text{٢} + \text{١}] = \frac{(\text{٩}+\text{١})\,\text{٩}^{\text{٢}}}{\text{٢}} = \text{٤٠٥}$$

(٢) إذا أردت جمع الأعداد الفردية على النظم الطبيعي فزد الواحد على العدد الفردي الأخير وربع نصفها

أي أن: $\text{١} + \text{٣} + \text{٥} + \text{٧} + \dots + (\text{د} - \text{٢}) + \text{د} = \left(\frac{\text{د}+\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}$ حيث د عدد فردي صحيح

فمثلاً د = ٩ ، ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ وحسب القاعدة: $\left(\frac{\text{٩}+\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} = \left(\frac{\text{٥}}{\text{١}}\right)^{\text{٢}} = \text{٢٥}$

(٣) جمع الأعداد الزوجية: نضرب نصف العدد الزوجي الأخير في ما يليه بواحد أي أن:

$\text{٢} + \text{٤} + \text{٦} + \text{٨} + \dots + (\text{د} - \text{٢}) + \text{د} = \frac{\text{د}}{\text{٢}}\left(\frac{\text{د}}{\text{٢}} + \text{١}\right)$ حيث د عدد زوجي صحيح

فمثلاً د = ١٠ ، ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٠ ، وحسب القاعدة: $\frac{\text{١٠}}{\text{٢}}\left(\frac{\text{١٠}}{\text{٢}} + \text{١}\right) = \text{٥} \times \text{٦} = \text{٣٠}$

كما نجد أن الكرخي في كتابيه «الكافي في الحساب والفخري» قد أعطى صياغة لقانون الحد الأخير لمتتالية عددية (حسابية) عندما يكون أساسها الواحد فقد استنتج أن:

ل = أ + (د − ١) د حيث ل الحد الأخير ، أ الحد الأول.

وكذلك قانون المجموع مجـ = $\frac{\text{د}}{\text{٢}}$. (أ + ل) .

كذلك نجد أن العالم الرياضي الطبيب المسلم السموأل المغربي الذي لا يُعرف بالضبط تاريخ ولادته غير أن وفاته كانت سنة ١١٧٥م قد ألف عدة كتب في الجبر ومن أهم أعماله برهان قوانين متتاليات عددية وغيرها .

أ) مجموع حدود متتالية عددية: $\frac{\text{د}}{\text{٢}}$ (أ + ل)

ب) مجموع مربعات الأعداد الطبيعية التي عددها د

$$= \left(\frac{\text{د}}{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٦}}\right)(\text{د}^{\text{٢}} + \text{د}) = \frac{\text{د}(\text{د}+\text{١})(\text{١}+\text{٢}\text{د})}{\text{٦}}$$

جـ) $(\text{د}-\text{١}) \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك}^{\text{٢}} = (\text{د}-\text{١}) \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}-\text{٣}} \text{ك} + \text{٣}(\text{د}-\text{١})^{\text{٢}}$

د) $\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك}^{\text{٢}} = \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك} + \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك}(\text{ك}-\text{١})$

هـ) $\sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك} + \text{٣} \sum_{\text{ك}=\text{١}}^{\text{د}} \text{ك}^{\text{٢}} = \text{د}(\text{د}+\text{١})^{\text{٢}}$

وهناك كثير من هذه المتطابقات وأمثالها وردت في كتبه مع برهانها.

أما ابن حمزة المغربي فهو من علماء القرن العاشر الهجري الذين عملوا في الرياضيات ووصفوا المؤلفات التي أفضت إلى تقدم نظرية الأعداد وفي كتابة «تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد» قدم أبحاثًا في المتتاليات العددية والهندسية .

يقول ابن حمزة وإن أي أساس أي حد من حدود متتالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يساوي مجموع ... أسس أساس الحدين اللذين حاصل ضربهما يساوي الحد المذكور ناقصاً واحداً، ولا يصاح ذلك نأخذ المتتالية الهندسية الآتية: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ...

والمتتالية العددية: ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ... حدود المتتالية الأولى. وهذا صحيح إذا

فاعتبر ابن حمزة أن حدود المتتالية الثانية هي أسس للأساس من حدود ... أي إذا ابتدأنا بالصفر. إن أساس المتتالية الهندسية ... رجعنا في حدود المتتالية العددية خطوة واحدة إلى اليسار ... فإذا أخذنا عددين حاصل ضربهما (٢) فإذا أخذنا ١٦ نجد أن العدد الذي يقابلها من المتتالية العددية هو (٥) ... (١٦) مثل ٢ ، ٨ فالعددان اللذان يقابلانهما في المتتالية العددية هما ٢ ، ٤ على التوالي، إن العدد (٥) الذي يقابل ١٦ يساوي ٢ + ٤ - ١ .

حلقة علمية

أولاً: المفاهيم والمصطلحات والرموز

- المتتالية: $\langle ح_د \rangle$ ، $\langle ص_د \rangle$ ، ...
- المتتالية المنتهية: $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، \dots ، ح_د \rangle$
- المتتالية غير المنتهية: $\langle ح_1 ، ح_2 ، ح_3 ، \dots ، ح_د ، \dots \rangle$
- الحد العام للمتتالية / الحد النوني $ح_د$
- المتتالية الثابتة $\langle أ \rangle$ ؛ أ عدد ثابت
- بيان المتتالية
- المتتالية المتزايدة (التزايدية)
- المتتالية المتناقصة (التناقصية)
- المتتالية الحسابية (العددية)
- أساس المتتالية الحسابية (د)
- الأوساط الحسابية
- مجموع د حداً من متتالية حسابية $مجـ_د = \sum_{ك=1}^{د}$
- المتتالية الهندسية
- أساس المتتالية الهندسية (ر)
- الأوساط الهندسية
- مجموع د حداً في متتالية هندسية $مجـ_د = \sum_{ك=1}^{د}$

ثانياً: حقائق وتعميمات:

١- المتتالية هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية ط*، أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١، ٢، ٣، ... ، م } ، ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، وعناصر المتتالية تسمى حدود المتتالية.

٢- المتتالية تسمّى أيضاً متوالية ، كما تسمى أحياناً متتابعة .

٣- طرق كتابة المتتالية :

أ) بحدها العام ويرمز له بالرمز $ح_د$ ، ويعبر عن $ح_د$ بقاعدة المتتالية.

فنقول مثلاً المتتالية $ح_د = ٢ د + ٣$

ب) على شكل أزواج مرتبة:

وكل زوج = (رتبة الحد ، قيمة الحد) مبتدئين بالحد الاول ، فلكتابة المتتالية التي قاعدتها ٢ د + ٣

نضع : د = ١ ، $\therefore$ $ح_1$ = ٢ × ١ + ٣ = ٥ فنحصل على الزوج (١ ، ٥)

ثم د = ٢ ، $\therefore$ $ح_2$ = ٢ × ٢ + ٣ = ٧ فنحصل على الزوج (٢ ، ٧)

ثم نضع د = ٣ ثم ٤ ، ... وهكذا.

فتكون المتتالية هي: (١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، ... إلخ .

جـ) ببضعة حدود من المتتالية:

وذلك بكتابة قيم الحدود الأولى للمتتالية. فالمتتالية التي حدّها النوني (العام) = ٢د + ٣ تكتب على الصورة: ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...

وذلك بكتابة $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ ، $ح_5$ ، ...، وقد رمزنا للمتتالية بالرمز $\langle ح_د \rangle$ حيث $ح_د$ حدها العام (النوني).

٤- تمثل المتتالية بيانياً بنقاط في المستوى الديكارتي (مستوى الاحداثيات) وهي تختلف عن التمثيل البياني للدالة في المجال حيث يشترط في المتتالية أن يكون المجال ط* أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١، ٢، ٣، ٤، ...، م } وحيث أن المتغير د في أي متتالية من النوع الوثاب لأن نطاقه (مجاله) يأخذ القيم المتقطعة ١، ٢، ٣، ... لذلك فإن المتتالية لا تمثل بخط منحنٍ متصل وانما بمجموعة من النقاط المنفصلة.

٥- ليس بالضرورة أن يتعين قانون للحد العام لكل متتالية فهناك من المتتاليات ما يتعذر أو يستحيل تعيين قانون حدها العام مثل متتالية الأعداد الأولية ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ...

٦- إذا كانت $ح_د$ تزداد بازدياد قيمة د سميت المتتالية متتالية متزايدة (تزايدية) ، وإذا كانت $ح_د$ تنقص بازدياد قيمة د سميت متتالية متناقصة (تناقصية) .

٧- يقال للمتتالية ‹ $ح_ن$ › أنها متذبذبة إذا وفقط إذا كان: $ح_ن × ح_{ن+١}$ < صفر لجميع قيم ن ∈ ط*

مثال: المتتالية ‹ $(-٢)^ن$ › بعد أن $ح_١ = -٢$ ، $ح_٢ = ٤$ ، $ح_٣ = -٨$ ، $ح_٤ = ١٦$ ، ...

نلاحظ أن حدود المتتالية تتأرجح على التوالي بين أعداد سالبة وأعداد موجبة، أي أن حاصل ضرب أي حدين متتاليين يكون سالباً دائماً كما يلي:

$ح_ر . ح_{ر+١} = (-٢)^ر × (-٢)^{ر+١} = (-٢)^ر × (-٢)^ر × (-٢)$

$= (-٢)^{٢ر} × (-٢)$

$= ٤^ر × -٢ =$ عدد سالب

والمتتالية المتذبذبة حالة خاصة من المتتالية التي ليست تزايدية ولا تناقصية.

٨- يقال للمتتالية ‹ $ح_ن$ › أنها متتالية متناوبة إذا كانت المتتالية تزداد فيها قيمة الحدود وتنقص على التوالي، دون أن تتغير إشارة الحدود، وتكون هذه المتتالية ليست تزايدية ولا تناقصية.

مثال: المتتالية ‹ $ر + (-١)^ر$ › وهي متتالية متناوبة.

هذه المتتالية هي: ‹ ٠ ، ٣ ، ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ... ›

أمثلة أخرى:

أ) ‹ $٣^{ر-٢}$ › متتالية تزايدية.

ب) ‹ $\frac{٣ر+٢}{ر}$ › متتالية تناقصية.

جـ) ‹ $\frac{(-١)^ر}{ر+١}$ › متتالية متذبذبة.

٩- المتتالية التي محالها ط* تسمّى متتالية غير منتهية أما المتتالية التي محالها مجموعة جزئية من ط* على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن } تسمّى متتالية منتهية.

١٠- المتتالية ‹ $ح_ن$ › محدودة من أسفل ⟺ يوجد عدد م، بحيث $ح_ن ≥$ م لجميع قيم ن ∈ ط*

ويكون م حداً سفلياً للمتتالية.

- مثال: ‹ $\frac{١}{ن}$ › هي ‹ ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، ... ›

نلاحظ المتتالية تناقصية وقيم الحدود تقترب من الصفر ولكنها لا تساوي الصفر أبداً، وجميع الحدود موجبة. إذن جميع الحدود أكبر من الصفر، إذن فهي محدودة من أسفل بالعدد (صفر) ($ح_ن$ > صفر ، ∀ن ∈ ط*)

١١- المتتالية ‹ $ح_ن$ › محدودة من أعلى ⟺ يوجد عدد ل ، بحيث أن $ح_ن ≤$ ل لجميع قيم ن ∈ ط*

ويكون حداً علوياً للمتتالية : مثال : ‹ $\frac{٣}{ن^٢}$ › هي ‹ ٣ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٣}{١٦}$ ، ... ›

نلاحظ أن المتتالية تناقصية وواضح أن أكبر الحدود هو الحد الأول وقيمته ٣ إذن جميع الحدود أصغر من ٣ إذن فهي محدودة من أعلى بالعدد ٣ ($ح_ن ≤ ٣$ ، ن ∈ ط*)

١٢- المتتالية ‹ $ح_ن$ › محدودة ⟺ محدودة من أسفل وأيضاً محدودة من أعلى.

أي يوجد عددان م ، ل بحيث م ≤ $ح_ن$ ≤ ل ، ∀ن ∈ ط* .

مثال : ‹ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ›.

١٣- المتتاليات الحسابية: (العددية).

المتتالية الحسابية هي عدة كميات متتالية تبدأ بكمية معينة تسمّى الحد الأول $ح_١$ وتزيد أو تنقص بمقدار ثابت يسمى الأساس (د) حيث د = أي حد - الحد السابق له مباشرة.

أ) الصورة العامة للمتتالية الحسابية. ‹ $ح_١$ ، $ح_١ + د$ ، $ح_١ + ٢د$ ، $ح_١ + ٣د$ ، ... ، $ح_١ + (ن-١)د$ ، ... ›

ب) الحد العام في المتتالية الحسابية ‹ $ح_ن$ › يُعطى بالعلاقة :

$$\boxed{ح_ن = ح_١ + (ن-١) د}$$

حيث ن رتبة الحد.

جـ) ا ، ب ، جـ تكون متتالية حسابية ⟺ ب هو الوسط الحسابي للعددين ا ، جـ أي أن: ب = $\frac{ا + جـ}{٢}$

د) مجموع ن حداً من متتالية حسابية حدها الأول $ح_١$ وحدها الأخير $ح_ن$ يرمز له بالرمز $مجـ_ن$ حيث

$مجـ_ن ح_ن = \frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن)$

وإذا كانت المتتالية حسابية ، حدها الأول $ح_١$ وأساسها د فإن مجموع ن حداً الأولى منها هو:

$مجـ_ن ح_ن = \frac{ن}{٢} (٢ح_١ + (ن - ١) د)$.

هـ) خواص المتتالية الحسابية:

- في المتتالية الحسابية يكون مجموع الحدين الواقعين على بعدين متساويين من الطرفين ثابتاً ويساوي مجموع الحدين الأول والأخير أي أن: إذا كانت لدينا المتتالية الحسابية:

‹ $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... ، $ح_{ن-٢}$ ، $ح_{ن-١}$ ، $ح_ن$ ›

فإن $ح_٢ + ح_{ن-١} = ح_١ + ح_ن$ حيث إن

$ح_٢ = ح_١ + د$

$ح_{ن-١} = ح_ن - د$ وبالجمع

$ح_٢ + ح_{ن-١} = ح_١ + ح_ن$.

- كل حد في المتتالية الحسابية وسط حسابي للحدين اللذين يحصرانه أي أن في المتتالية ⟨ $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ، $ح_د$ ، ... ⟩ : $ح_2 = \frac{ح_1 + ح_3}{2}$ ، $ح_3 = \frac{ح_2 + ح_4}{2}$ ، ...

$ح_د = \frac{ح_{د-1} + ح_{د+1}}{2}$ وتسمى الحدود بين $ح_1$ ، $ح_د$ أوساطاً حسابية وعددها = عدد الحدود − ٢

- إذا كان لدينا المتتالية الحسابية: ⟨ $ح_1$ ، $ح_1$ + د ، $ح_1$ + ٢د ، ... ⟩ فإن:

⟨ $ح_1 \pm$ ك ، $ح_1$ + د $\pm$ ك ، $ح_1$ + ٢د $\pm$ ك ، ... ⟩

هي أيضاً متتالية حسابية لها نفس أساس المتتالية الأصلية. كذلك

⟨ $ح_1$ ك ، ($ح_1$ + د) ك ، ($ح_1$ + ٢د) ك ، ... ⟩ ، ⟨ $\frac{ح_1}{ك}$ ، $\frac{ح_1 + د}{ك}$ ، $\frac{ح_1 + ٢د}{ك}$ ، ... ⟩ ، ك $\neq$ ٠

متتاليتان حسابيتان أيضاً أساسهما د ك ، $\frac{د}{ك}$ على التوالي.

١٤ – المتتالية الهندسية:

أ) هي عدة كميات متتالية تبدأ بكمية معينة تسمى الحد الأول $ح_1$ والنسبة بين أي حد والسابق له مباشرة تسمى الأساس (ر) حيث ر (الأساس) = $\frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}} = \frac{ح_{د+1}}{ح_د}$ ، $ح_د \neq$.

والصورة العامة للمتتالية الهندسية هي:

⟨ $ح_1$ ، $ح_1$ ر ، $ح_1$ ر^2 ، $ح_1$ ر^3 ، ... ، $\frac{ح_د}{ر^2}$ ، $\frac{ح_د}{ر}$ ، $ح_د$ ⟩

والمتتالية الهندسية ليست فيها حد يساوي الصفر.

ب) الحد العام في المتتالية الهندسية: ⟨ $ح_د$ ⟩ ، هو $ح_د = ح_1$ ر$^{د-1}$ ، $ح_1 \neq$ ٠ ، ر $\neq$.

(حيث د رتبة الحد) .

جـ) مجموع متتالية هندسية حدّها الأول $ح_1$ وحدّها الأخير $ح_د$ يعطى بالقانون:

مجـ$_د$ $ح_د = \frac{ح_د ر - ح_1}{ر - ١}$ إذا كانت | ر | > ١ ، أو مجـ$_د$ $ح_د = \frac{ح_1 - ح_د ر}{١ - ر}$ إذا كانت | ر | < ١

ومجموع متتالية هندسية حدّها الأول $ح_1$ وأساسها ر يعطى بالقانون:

مجـ$_د$ = $\frac{ح_1 (ر^د - ١)}{ر - ١}$ ، | ر | > ١ ، أو مجـ$_د$ = $\frac{ح_1 (١ - ر^د)}{١ - ر}$ ، | ر | < ١

د) خواص المتتاليات الهندسية:

- في المتتالية الهندسية نجد أن كلّ حدّ هو وسط هندسي بين مجاوريه فإذا كانت

⟨ $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ⟩ متتالية هندسية نلاحظ استناداً للتعريف أن

$\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{ح_3}{ح_2}$ = ر ، ... وهكذا .

$\therefore (ح_2)^2 = ح_1 \times ح_3$ ، $\therefore ح_2 = \sqrt{ح_1 ح_3}$

وتسمّى الأعداد المرتبة $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ ، ... $ح_{د-1}$ أوساطاً هندسية بين $ح_1$ ، $ح_د$.

- أن حاصل ضرب أي حدين متساويي البعد عن الطرفين ثابت ويعادل حاصل ضرب الحد الأول في الحد الأخير.

لتكن المتتالية الهندسية ⟨ $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ..... ، $ح_{د-2}$ ، $ح_{د-1}$ ، $ح_د$ ⟩ متتالية هندسية.

استناداً لهذه الخاصية نجد أن : $ح_2 \times ح_{د-1} = ح_1 \times ح_د$

حيث $ح_2 = ح_1$ ر ... (١) ، حيث $ح_د = ح_{د-1}$ ر ... (٢)

بقسمة (١) على (٢) نحصل على $\frac{ح_2}{ح_د} = \frac{ح_1}{ح_{د-1}} \Leftarrow ح_2 \times ح_{د-1} = ح_1 \times ح_د$

- لتكن ⟨ $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ، $ح_د$ ، ... ⟩ متتالية هندسية أساسها ر

فإن ⟨ ك $ح_1$ ، ك $ح_2$ ، ... ، ك $ح_د$ ، ... ⟩ أي ⟨ ك $ح_1$ ، ك $ح_1$ ر ، ... ، ك $ح_1$ ر$^{د-1}$ ، ... ⟩

أيضاً متتالية هندسية أساسها ر (حيث ك $\neq$ ٠) ، وكذلك

⟨ $\frac{ح_1}{ك}$ ، $\frac{ح_1 ر}{ك}$ ، $\frac{ح_1 ر^2}{ك}$ ، ... ⟩ متتالية هندسية أساسها ر (ك $\neq$ ٠)

١٥ – المتسلسلة:

أ) درست سابقاً أن المتتالية هي أعداد مرتبة بترتيب معين وفق قاعدة صريحة أو ضمنية وقد أسمينا هذه الأعداد حدود المتتالية ويفصل بين كل حدين متتالين الفاصلة « ، » وإذا ما وضعنا إشارة الجمع مكان الفواصل بين حدود المتتالية فإننا نحصل على ما يسمّى بالمتسلسلة وتكون المتسلسلة غير منتهية إذا نتجت من متتالية غير منتهية وتكون متسلسلة منتهية إذا نتجت من متتالية منتهية.

فالمتتالية ⟨ $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ، $ح_د$ ، ... ⟩

هي متتالية غير منتهية والمتسلسلة الناتجة منها بوضع إشارة الجمع مكان الفواصل هي:

$ح_1 + ح_2 + ح_3 + \dots + ح_د + \dots$

حيث يسمى $ح_د$ الحد النوني للمتسلسلة ، $ح_1$ حدها الأول أما المتسلسلة:

$ح_1 + ح_2 + ح_3 + \dots + ح_د$ فهي متسلسلة منتهية حدّها الأول $ح_1$ وحدّها الأخير $ح_د$

ب) ويمكن التعبير عن المتسلسلة التي حدّها النوني (العام) $ح_د$ باستخدام رمز المجموع (مجـ) على النحو التالي: مجـ$_{د=1}^{\infty}$ $ح_د$

وإذا كانت المتسلسلة منتهية فإننا نستخدم الرمز ... $مجـ ح$ ... = $مجـ ح_{ر}$ + $مجـ ح$ [illegible]

وبعضها الخاصيات $مجـ ح$ ... ومجـ [illegible]

وكثيراً ما نحتاج إلى مجموع عدد كبير من الأعداد الموضوعة في صورة متتالية، فإذا أتبعنا أسلوب [illegible] بالإضافة - أي إضافة قيمة عدد إلى قيمة عدد آخر وهكذا فإن الأمر يتطلب كثيراً من الجهد والوقت [illegible] جانب احتمال الوقوع في خطأ الجمع. لذلك أمكن استنتاج قواعد في صورة علاقة رياضية تحصل منها [illegible] مجموعة الأعداد المتتالية فقط. ونظراً لاختلاف طبيعة تركيب المتتاليات فإن العلاقة الرياضية تشتق [illegible] تركيب حدود المتتالية كما لاحظنا في حالة إيجاد مجموع متتالية حسابية ومجموع متتالية هندسية [illegible] ولذلك نستنتج أنه ليس هناك قاعدة واحدة يمكن تعميمها على جميع المتسلسلات.

حـ) وعند إيجاد المتسلسلة أي مجموع المتتالية، فإنه يلزم تحديد المعلومات اللازمة الآتية:

- عدد حدود المتسلسلة.
- شكل العلاقة التي تربط الحدود المختلفة.
- تحديد شكل الحد العام في المتسلسلة.

ونسرد هنا بعض طرق إيجاد بعض المتسلسلات مثل متسلسلات الأعداد الطبيعية المحدودة [illegible] والمرفوعة إلى قوة أعلى.

- المتسلسلة المحدودة للأعداد الطبيعية التي عدد حدودها د ، أي نأخذ المتتالية المحدودة.

‹ ١، ٢، ٣، ٤، ...، (د-٢)، (د-١)، د › نلاحظ أن $ح_{١}$ =١ و $ح_{د}$ = ١ + $ح_{د}$ [illegible]

∴ $مجـ ح_{د}$ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (د-٢) + (د-١) + د .....(١)

وإذا أعدنا ترتيب المتسلسلة ترتيباً عكسياً لا يتغير قيمتها:

$مجـ ح_{د}$ = د + (د-١) + (د-٢) + ... + ٤ + ٣ + ٢ + ١ ....(٢)

بجمع (١)، (٢) نحصل على

٢ $مجـ ح_{د}$ = (د+١) + (د+١) + (د+١) + ... + (د+١)

ولذلك حصلنا على عدد (د) من الحدود كل منها يساوي (د+١)

∴ ٢ $مجـ ح_{د}$ = د (د+١) ، ∴ $مجـ ح_{د} = \frac{د}{٢}$ (د+١)

وهذا هو مجموع متسلسلة الأعداد الطبيعية التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد د.

- المتسلسلة المحدودة لمربعات الأعداد الطبيعية:

مربعات الأعداد الطبيعية تمثل متتالية من الأعداد ولذلك يمكن إيجاد مجموعها إذا تم تحديد العلاقة الر[illegible] لهذا المجموع، متتالية مربعات الأعداد هي: ‹ $١^{٢}$، $٢^{٢}$، $٣^{٢}$، $٤^{٢}$، ...، $(د-١)^{٢}$، $د^{٢}$ ›

وهناك عدة طرق للحصول على الصيغة الرياضية للمجموع نستعرض بعضاً منها فيما يلي:

طريقة الحذف المتتالي: على سبيل المثال، لإيجاد مجموع المتسلسلة التالية لخمسة حدود $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ٥^{٢}$ نضعها في صورتها العددية كما يلي.

	١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥	
نطرح الحد الأول	-١ - ١ - ١ - ١ - ١	= ١ × ٥ = ٥
	٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤	
نطرح الحد الأول من المتتالية الجديدة	-٣ - ٣ - ٣ - ٣	= ٣ × ٤ = ١٢
	٥ + ١٢ + ٢١	
نطرح الحد الأول من المتتالية الجديدة	-٥ - ٥ - ٥	= ٥ × ٣ = ١٥
	٧ + ١٦	
نطرح الحد الأول من المتتالية الجديدة	-٧ - ٧	= ٧ × ٢ = ١٤
	٩	
نطرح الحد المتبقي	-٩	= ٩ × ١ = ٩
	٠	

إلى أن نصل إلى الصفر ويكون مجموع القيم التي تم طرحها = ٥٥ وحيث أن باقي الطرح = صفراً فتكون القيم المطروحة = مجموع الأعداد ، ∴ قيمة المتسلسلة = ٥٥ .

ويمكن وضع عملية الجمع (جمع الفروق) على الصورة التالية:

(١×٥) + (٣×٤) + (٥×٣) + (٧×٢) + (٩×١)

وحيث أن عدد الحدود = ٥ = د فيمكن وضع العلاقة السابقة بدلالة د كما يلي:

١ × (د) + ٣ (د-١) + ٥ (د-٢) + ٧ (د-٣) + ٩ (د-٤)

ويلاحظ إن هذه القيم تكون متسلسلة، كل حد فيها يتكوّن من حاصل ضرب مقدارين هما المتتاليتين

١) ‹ ١، ٣، ٥، ..... › وهي متتالية الأعداد الطبيعية الفردية ويكون حدّها العام هو ٢ ك -١

٢) ‹ ك، ك-١، ك-٢، ك-٣، ك-٤، ... › وهي متتالية تناقصية حدّها الأول ك وحدّها العام [د-(ك-١)] حيث د عدد حدود المتسلسلة مقدار ثابت إذن الحد العام للمتسلسلة هو:

$ح_{ك}$ = (٢ك - ١) (د- (ك - ١)) ويكون مجموع المتسلسلة هو:

$\sum_{ك=١} ح_{ك} = \sum_{ك=١}^{د} ك^{٢} = \sum_{ك=١}$ (٢ك -١) (د- (ك-١))

$= \sum_{ك=١}^{د}$ (٢ك د -٢ $ك^{٢}$ + ٢ك - د + (ك-١))

$= \sum_{ك=١}^{د}$ ٢ك د $- \sum_{ك=١}^{د}$ ٢ $ك^{٢} + \sum_{ك=١}^{د}$ ٢ك $- \sum_{ك=١}^{د}$ د $+ \sum_{ك=١}^{د}$ ك $- \sum_{ك=١}^{د}$ ١

= ٢ د $\sum_{ك=١}^{د}$ ك -٢ $\sum_{ك=١}^{د} ك^{٢}$ + ٣ $\sum_{ك=١}^{د}$ ك - د $\sum_{ك=١}^{د}$ ١ $- \sum_{ك=١}^{د}$ ١

= ٢ د $(\frac{ك(ك+١)}{٢})$ -٢ $\sum_{ك=١}^{د} ك^{٢}$ + ٣ $(\frac{ك(ك+١)}{٢})$ - دك - ك

$$\frac{3(ك^2+ك)}{2} - \frac{2ك}{2}$$

$$\therefore \sum_{ك=1}^{ن} ك^3 + 3\sum_{ك=1}^{ن} ك^2 = \dots$$

$$3\sum_{ك=1}^{ن} ك^2 = \dots$$

وبعد إجراء عملية جمع الحدود تصبح ك = ن

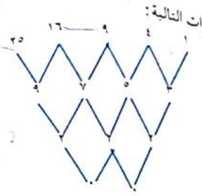
$$\therefore 3\sum ك^2 = \frac{2ن^3+3ن^2+ن}{2} = \frac{ن(2ن^2+3ن+1)}{2} = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{ك=1}^{ن} ك^2 = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$$

وهو قانون إيجاد مربعات الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن

طريقة الفروق :

هذه الطريقة أسهل من سابقتها وأكثر استخداماً في إيجاد مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوى الأعلى فللحصول على مجموع مربعات الأعداد الطبيعية نتبع الخطوات التالية:



- نضع الأعداد في صورتها الطبيعية:
- نأخذ الفرق بين كل عددين متتاليين:
- نأخذ الفرق بين الفروق السابقة:
- نأخذ الفروق الأخيرة:

نلاحظ أن متتالية مربعات الأعداد تبدأ بالعدد (١) وتزداد بمقدار وحدتين وأن عدد حدودها

ونلاحظ أن مجموعة اعداد الفروق الأولى تمثل متتالية حدها الأول (٣) ونلاحظ أن مجموعة أعداد الفروق الثانية يمثل متتالية ثابتة التي يقل واحداً عن حدود المتتالية الأصلية. كما نلاحظ أن مجموعة أعداد الفروق الثانية ونلاحظ أن الفروق الثالثة تصير صفراً. عدد حدودها بمقدار حدين عن عدد حدود المتتالية الأصلية مهما كان عدد حدودها فإننا نتعامل مع ثلاثة أعداد فقط هي:

وللحصول على مجموع مربعات الأعداد الطبيعية مهما كان عدد حدودها فإننا نتعامل مع ثلاثة أعداد فقط هي:

العدد (١) وهو الحد الأول في متتالية مربعات الأعداد ويضرب × $\frac{ن}{1}$

العدد (٣) وهو الحد الأول في متتالية الفروق الأولى ويضرب × $\frac{ن(ن-1)}{1\times2}$

العدد (٢) وهو الحد الأول من المتتالية الفروق الثانية ويضرب × $\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{1\times2\times3}$

وبذلك يمكن الوصول إلى مجموع مربعات الأعداد الطبيعية بتطبيق العلاقة:

$$\sum_{ك=1}^{ن} ك^2 = (1)\times\frac{ن}{1} + (3)\left[\frac{ن(ن-1)}{2}\right] + 2\left[\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{2\times3}\right]$$

وبعد تبسيط ما سبق نستخدم العلاقة: $= \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{6}$

ولإيجاد قيمة متسلسلة مكعبات الأعداد الطبيعية نستعمل أسلوب الطرق السابقة نفسه للوصول إلى العلاقة:

$$\sum_{ك=1}^{ن} ك^3 = \left[\frac{ن(ن+1)}{2}\right]^2$$

وبالأسلوب نفسه يمكن الحصول على مجموع متسلسلة الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى أي قوة

$$\sum_{ك=1}^{ن} ك^4 = \frac{1}{30}\, ن(ن+1)(2ن+1)(3ن^2+3ن-1).$$

توجيهات طرائقية عامة

ينبغي مراعاة ما يأتي عند تدريس هذه الوحدة:

- ابدأ الوحدة بمراجعة سريعة للدالة ومفاهيمها الجزئية: المجال ، المجال المقابل ، قاعدة الدالة.
- ذكّر الطلبة بمفهوم الدالة الحقيقية ، أي: متى تسمّى الدالة «دالة حقيقية».
- تناول أمثلة مختلفة على الدوال الحقيقية واعتبر فقط الدوال التي مجالها ط*أو مجموعة جزئية منها على الصورة {١، ٢، ٣، ....، م} لكي تمثل مدخلاً لمفهوم المتتالية.
- استنتج مع الطلبة متى تكون المتتالية منتهية ومتى تكون غير منتهية من خلال عرض بعض الأمثلة ثم اتّفق معهم على أننا سنعتبر المتتالية غير منتهية إذا لم يُذكر شيء عن المجال.
- وضح للطلبة بانه ليس هناك رمز محدد للحد العام للمتتالية وهناك رموز مختلفة منها مثلاً: $ص_ن$، $ح_ن$، $ل_ن$، ح(ن)، د(ن)، ... كما أن هناك رموزاً مختلفة للمتتالية منها: {$ح_ن$}، ($ح_ن$)، $ح_ن$، ⟨ $ح_ن$ ⟩، ⟨ ح (ن) ⟩ وبيّن لهم أننا سنستخدم الرمز ⟨$ح_ن$⟩ في هذه الوحدة.
- وضح بأن ليس بالضرورة أن يتعين قانون للحد العام للمتتالية، فهناك من المتتاليات ما يتعذّر أو يستحيل تعيين قانون حدها العام. مثل متتالية الأعداد الأولية ⟨ ٢، ٤، ٥، ٧، ١١، ١٣، ...⟩
- يتم توضيح الفرق بين $ح_ن$، ⟨ $ح_ن$ ⟩ حيث يعني الأول الحد العام للمتتالية أما الثاني فهو رمز المتتالية التي حدّها العام $ح_ن$.
- وضّح للطلبة أنّه إذا عرفنا قاعدة الحد العام أحياناً يُسمّي الحد العام للمتتالية بالحد النوني للمتتالية فإننا نستطيع كتابة المتتالية.
- وضحللطلبة أن ترتيب الحدود هي خاصية مميّزة للمتتالية، فالمتتالية: ⟨ ٢، ٥، ٥، ١، ٣ ⟩ والمتتالية ⟨ ٢، ٥، ١، ٥، ٣ ⟩ مختلفتان ، وليس من الضروري أن تكون حدود المتتالية مختلفة

فمثلاً ⟨ ٥، ٥، ٥، ... ⟩ هي متتالية حدها العام هو ٥ مهما كانت قيمة $ن$ وتكتب مثل هذه المتتالية

على النحو ⟨ ٥ ⟩ وتسمى متتالية ثابتة.

- بيّن للطلبة من خلال الأمثلة متى تكون المتتالية تزايدية ومتى تكون تناقصية.

- وضّح للطلبة بأنه لما كانت المتتالية دالة مجالها ط* أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١، ٢، ٣، ......، م } فإن بالإمكان تمثيل المتتالية بيانياً على المستوى الديكارتي (مستوى الإحداثيات) ويكون التمثيل البياني للمتتالية عبارة عن نقاط منفصلة، وبيّن لهم كذلك أن التمثيل يمكّن أن يبيّن المتتالية من حيث كونها تزايدية أو تناقصية.

- بيّن للطلبة أنه إذا ما وضعنا إشارة الجمع مكان الفواصل بين حدود المتتالية فإننا نحصل على متسلسلة وتكون المتسلسلة غير منتهية إذا كانت المتتالية غير منتهية، وتكون المتسلسلة منتهية إذا كانت المتتالية منتهية.

والصورة المختصرة للمتسلسلة: $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ... + ح_{ن} + ...$ هي $\sum_{ك=١}^{ن} ح_{ك}$

- اعتبر الصورة العامة للمتتالية الحسابية كالآتي

$⟨ ح_{١}، ح_{١} + د، ح_{١} + ٢د، ح_{١} + ٣د، ...، ح_{١} + (ن - ١) د، ... ⟩$

وإذا طلب إيجاد آخر حدّ سالب وأول حدّ موجب في متتالية تزايدية نتبع الطريقة السابقة نفسها.

- علماً مما سبق أنه يمكن:

تعيين المتتالية الحسابية إذا علم حدّها الأول $ح_{١}$ والأساس د فتكون :

$⟨ ح_{١}، ح_{١} + د، ح_{١} + ٢د، ... ⟩$

أما إذا كانت شروط المسألة تؤدي إلى معرفة حدّها الأول وأساسها فإنه يمكن تكوينها وذلك باتباع ما يأتي:

- نضع شروط المسألة في صورة معادلات جبرية باستخدام القوانين.
- نحل هذه المعادلات حلاً جبرياً مناسباً لمعرفة المتغيرات المجهولة.
- نكوّن المتتالية حسب الحالة.

- إذا قيل إن المتتالية لها حدّ أوسط م وأساسها د فتكون المتتالية على الصورة:

....، م - ٢د، م - د، م، م + د، م + ٢د، ....

- إذا قيل إن ثلاثة أعداد في توالي عددي نفرض الأعداد هي $ح_{١}، ح_{١} + د، ح_{١} + ٢د$، أو م - د، م، م + د

- استنتج مع الطلبة خواص المتتالية الحسابية من خلال عرض أمثلة عددية مبسّطة.

- وضّح للطلاب أنه إذا طلب إثبات أن ٣ كميات في توالٍ عددي فإنه يجب إثبات أنه

الكمية الثانية - الكمية الأولى = الكمية الثالثة - الكمية الثانية.

وحينئذ يكون

الحد العام للمتتالية الحسابية $= ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١) د$

ومجموع $ن$ الحدود الأولى منها $= مج_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢ح_{١} + (ن - ١) د]$ (إذا علمنا الحد الاول والاساس)

$= \frac{ن}{٢} [ح_{١} + ح_{ن}]$ (إذا علمنا الحد الاول والاخير).

- وضّح للطلبة أنه لتعيين المتتالية الحسابية يلزم معرفة الحد الأول ($ح_{١}$) والأساس (د) أو معرفة قانون الحد العام كما أن قانون الحد العام $= ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١) د$ ، ($ن$ رتبة الحد)

يربط ٤ متغيرات: $ح_{١}$، د، $ن$، $ح_{ن}$ (الحد الاخير) فإذا أعطي الطالب ثلاثة منها أمكنه تعيين الرابع.

- في المتتاليات الحسابية المتتالية التزايدية يكون أساسها موجباً والمتتالية التناقصية يكون اساسها سالبا.

وإذا طلب إيجاد رتبة أول حدّ سالب أو آخر حدّ موجب من متتالية تناقصية يتبع ما يأتي:

يضع $ح_{ن}$ = صفراً في قانون الحد العام ومنه يوجد $ن$ فيكون $ح_{ن-١}$ هو آخر حد موجب في المتتالية و $ح_{ن+١}$ هو أول حد سالب في المتتالية.

ملاحظة: إذا نتجت $ن$ = عدد صحيح + كسر فإنه لا يوجد حد قيمته صفر في هذه الحالة ويكون

آخر حدّ موجب هو $ح_{\text{العدد الصحيح}}$

وأول حدّ سالب هو $ح_{\text{العدد الصحيح}+١}$

وإذا اعطيت أن: ⟨ ك، ل، م، ... ⟩ متتالية عددية فإنها تفرض هكذا:

ك = $ح_{١}$، ل = $ح_{١}$ + د، م = $ح_{١}$ + ٢د

- وضّح للطلبة أنه من قانون مجموع ن حداً متتالية حسابية $مج_{ن} = \frac{ن}{٢} (٢ح_{١} + (ن - ١) د)$

إذا علم عدد حدود المتتالية أمكن إيجاد مجموعها ، وإذا علم مجموع المتتالية أمكن إيجاد عدد حدودها.

- بيّن للطلبة أن الصورة العامة للمتتالية الهندسية كالآتي: $ح_{١}، ح_{١}ر، ح_{١}ر^{٢}، ...، ...، \frac{ح_{ن}}{ر}، ح_{ن}، ...$؛

وحينئذ يكون: $ح_{ن} = ح_{١} ر^{ن-١}$

$$\text{المجموع} = مج_{ن} = \begin{cases} \frac{ح_{١}(ر^{ن}-١)}{ر-١} & |ر| > ١ \\ \frac{ح_{١}(١-ر^{ن})}{١-ر} & |ر| < ١ \\ ن ح_{١} & ر = ١ \end{cases}$$

أو

$$= \begin{cases} \frac{(ح_{ن} ر - ح_{١})}{ر-١} & |ر| > ١ \\ \frac{(ح_{١} - ح_{ن} ر)}{١-ر} & |ر| < ١ \end{cases}$$

- وما قيل في الفقرات السابقة عن المتتالية الحسابية وحدها العام والمجموع يقال أيضاً للحد العام للمتتالية الهندسية والمجموع : $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \, \text{ر}^{\text{ن}-1}$

- تعيين المتتالية الهندسية:

يمكن معرفة المتتالية الهندسية إذا علمت ح_1 ، ر ولإيجادها (حسب طبيعة المسألة) نتبع ما يأتي :

أ) نضع شروط المسألة في صور معادلات باستخدام القوانين.

ب) نحلل هذه المعادلات تحليلاً كاملاً.

جـ) نحل هذه المعادلات بالقسمة أو التعويض وأهم التحليلات هي:

- العامل المشترك والفرق بين مربعين مثل

$$\text{ح}_1 \text{ر}^5 - \text{ح}_1 \text{ر}^3 = \text{ح}_1 \text{ر}^3 (\text{ر}^2 - 1) = \text{ح}_1 \text{ر}^3 (\text{ر} - 1)(\text{ر} + 1).$$

- العامل المشترك ومجموع المكعبين (أو فرقهما) ، مثل :

$$\text{ح}_1 \text{ر}^3 \pm \text{ح}_1 = \text{ح}_1 (\text{ر}^3 \pm 1) = \text{ح}_1 (\text{ر} \pm 1)(\text{ر}^2 \mp \text{ر} + 1)$$

- العامل المشترك و إكمال المربع ، مثل :

$$\text{ح}_1^2 + \text{ح}_1^2 \text{ر}^2 + \text{ح}_1^2 \text{ر}^4 = \text{ح}_1^2 (1 + \text{ر}^2 + \text{ر}^4)$$

$$= \text{ح}_1^2 (1 + \text{ر} + \text{ر}^2)(1 - \text{ر} + \text{ر}^2)$$

- إذا قيل ثلاثة أعداد في توال هندسي نفرض الأعداد :

ح_1 ، $\text{ح}_1 \text{ر}$ ، $\text{ح}_1 \text{ر}^2$ ، أو م ر ، م ، $\frac{\text{م}}{\text{ر}}$ حيث م الحد الأوسط

- إذا طلب إثبات أن ثلاث كميات في توال هندسي فإنه يجب إثبات أن

$$\frac{\text{الكمية الثانية}}{\text{الكمية الأولى}} = \frac{\text{الكمية الثالثة}}{\text{الكمية الثانية}}$$

- إذا أعطيت أن س ، ص ، ع ، ... متتالية هندسية

ضع : $\text{س} = \text{ح}_1$ ، $\text{ص} = \text{ح}_1 \text{ر}$ ، $\text{ع} = \text{ح}_1 \text{ر}^2$

- ينبغي الاهتمام بالتطبيقات الحياتية سواء على المتتالية الحسابية أو الهندسية.

٣ - ١ المتتاليات

عدد الحصص : (٤) حصص

الأهداف

- يعرّف المتتالية ويمثلها بيانياً.
- يكتب حدود متتالية علم حدها العام.
- يعرّف المتتالية المنتهية وغير المنتهية ويميزها .
- يعرّف المتتالية التزايدية والتناقصية ويميزها .
- يعرّف المتسلسلة.
- يعرّف الأس الصحيح السالب .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: المتتالية وحدّها العام.

الحصة الثانية: أنواع المتتاليات.

الحصة الثالثة: التمثيل البياني للمتتالية.

الحصة الرابعة: تمارين صفية .

التقويم

يقوّم المعلّم الطلبة تقويماً بنائياً من خلال المناقشة ومتابعة حل بعض التمارين والمسائل والواجبات المنزلية وفي نهاية الحصة الرابعة يقدّم التمرين الآتي كخطوة تقويم:

١) بين أيًا من الدوال التالية تمثل متتالية:

أ) $\text{د}(\text{ن}) = \text{ن}^2 - 3\text{ن}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ ب) $\text{ح}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}^2}{\text{ن}+1}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}^*$

جـ) $\text{ك}(\text{ن}) = 2\text{ن}(-1)^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$.

٢) اكتب حدود المتتالية : $\langle 2^{\text{ن}} + 1 \rangle$

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ - ١)

[١] أ) لا تمثل متتالية لأن $\text{ن} \in \text{ص}$ ، $\text{ص} \not\subset \text{ط}^*$ ، ب) تمثل متتالية لأن المجال مجموعة جزئية من ط*

جـ) لا تمثل متتالية لأن $\text{ط} \not\subset \text{ط}^*$ د) متتالية.

هـ) لا تمثل متتالية لأن $\text{ح} \not\subset \text{ط}^*$.

[٢] أ) ⟨٠ ، ٠ ، ٢ ، ٨ ، ٢٢ ، ...⟩

ب) ⟨١ ، −٤ ، ٩ ، −١٦ ، ٢٥ ، ...⟩

جـ) ⟨−٣ ، ٥ ، −٧ ، ٩ ، −١١ ، ...⟩

د) ⟨ $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{٨}{١٧}$ ، $\frac{١١}{٢١}$ ، $\frac{١٤}{٢٥}$ ، ...⟩

هـ) ⟨ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{٥}{٣٢}$ ، ...⟩

[٣] الأربعة الحدود الأولى لكل متتالية هي:

أ) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، $\text{ح}_{١٠} = ١٠٢٤$

ب) ١ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٦}{١٠}$ ، $\frac{٨}{١٧}$ ، $\text{ح}_{١٠} = \frac{٢٠}{١٠١}$

جـ) −٣ ، ٥ ، −٧ ، ٩ ، $\text{ح}_{١٠} = ٢١$

د) −١ ، ٠ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\text{ح}_{١٠} = \frac{٤}{٥}$

هـ) ٠ ، −١ ، ٠ ، ١ ، $\text{ح}_{١٠} = -١$

و) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢٠}$ ، $\text{ح}_{١٠} = \frac{٣}{١١٠}$

ز) $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\text{ح}_{١٠} = \frac{٢}{٥}$

[٤] أ) $\text{ح}_{١٠} = \frac{١٠}{١١}$ ، $\text{ح}_{٥٤} = \frac{٥٤}{٥٥}$

ب) $\text{ح}_{١٠} = ١٢$ ، $\text{ح}_{٥٤} = ١٢$

جـ) $\text{ح}_{١٠} = ٣٢$ ، $\text{ح}_{٥٤} = ١٦٤$

[٥] أ) ⟨٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...⟩

ب) ⟨٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، ...⟩

جـ) ⟨−١ ، ٢ ، −٣ ، ٤ ، −٥ ، ...⟩

د) ⟨ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٢}$ ، $\frac{١}{٢٠}$ ، ...⟩

هـ) ⟨٠ ، ٠ ، ٢ ، ٨ ، ٢٢ ، ...⟩

[٦] أ) ⟨١ ، ٢ ، ٥ ، ١٤ ، ٤١ ، ...⟩

ب) ⟨١ ، ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٨}{٥}$ ، ...⟩

جـ) ⟨−٢,٢٤ ، −٠,٤٨٨ ، ١,٦١٤٤ ، ٤,١٣٧٢٨ ، ٧,١٦٤٧٣٦ ، ...⟩

د) ⟨ $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٣}{٦}$ ، $\frac{٣٧}{١٢}$ ، $\frac{٨٥}{٢٤}$ ، $\frac{١٨١}{٤٨}$ ، ...⟩

هـ) ⟨٣,٣٤ ، ٦,٣٤٨ ، ١٢,٩٦٥٦ ، ٢٧,٥٢٤٣ ، ٥٩,٥٥٣٥ ، ...⟩

[٧] أ) $\text{ح}_{\text{ن}} = ٢\text{ن} - ١$

ب) $\text{ح}_{\text{ن}} = (٢\text{ن} - ١)(٢\text{ن})$

جـ) $\text{ح}_{\text{ن}} = (-١)^{\text{ن}+١}(\frac{١}{\text{ن}})$

د) $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}-١}$

و) $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ا} + (\text{ن}-١)\,\text{د}$

هـ) $\text{ح}_{\text{ن}} = (١ - \frac{\text{ن}}{٢})$

[٨] أ) $\text{ح}_{\text{ن}} = ١ + \frac{١}{\text{ن}}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+١} = ١ + \frac{١}{\text{ن}+١}$

ولكن : $\frac{١}{\text{ن}+١} < \frac{١}{\text{ن}}$ ∴ $\text{ح}_{\text{ن}+١} < \text{ح}_{\text{ن}}$ المتتالية تناقصية

ب) المتتالية هي ⟨ −٣ ، ٩ ، −٢٧ ، ... ⟩ واضح أنها ليست تزايدية أو تناقصية

جـ) $\text{ح}_{\text{ن}} = (\frac{١}{٢})^{\text{ن}}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+١} = (\frac{١}{٢})^{\text{ن}+١}$

ولكن : $(\frac{١}{٢})^{\text{ن}+١} < (\frac{١}{٢})^{\text{ن}}$

∴ $\text{ح}_{\text{ن}+١} < \text{ح}_{\text{ن}}$

∴ المتتالية تناقصية

د) المتتالية هي ⟨ −١ ، ١ ، −١ ، ١ ، ... ⟩ واضح أنها ليست تزايدية ولاتناقصية

[٩] ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣

[١٠] −١ ، ٣ ، −١ ، ٧ ، −١

[١١] أ) $\underset{م=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ ٥م = ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ = ٥٠$ ، ب) $\underset{ن=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ (ن+١) = ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$

ب) $\underset{ن=١}{\overset{٦}{\text{مجـ}}}\ \frac{١}{٢ن+١} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{١١} + \frac{١}{١٣}$

[١٢] أ) $\underset{م=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ (٢م + م^٢) = (٢+١) + (٤+٤) + (٦+٩) + (٨+١٦) = ٥٠$

$\underset{م=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ ٢م + \underset{م=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ م^٢ = ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١ + ٤ + ٩ + ١٦ = ٥٠$ المجموعان متساويان.

ب) نعم جـ) $\underset{م=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ ٢ = ٢ \underset{م=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ ١ = ٢(١+١+١+١+١) = ١٠$

$\underset{م=١}{\overset{٥}{\text{مجـ}}}\ ٤ = ٢٠$ ، $\underset{م=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ ك = ن\,ك$

٣ - ٢ المتتالية الحسابية

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

- يعرّف المتتالية الحسابية ويكتبها بصورتها العامة.
- يستنتج قانون الحد العام لمتتالية حسابية.
- يوجد الحد العام لمتتالية حسابية.
- يعيّن متتالية حسابية علم حدها الأول والأساس.
- يعيّن متتالية حسابية علم حد من حدودها والأساس.
- يعيّن حد من حدود متتالية حسابية إذاعلمت رتبته وعلم حد آخر من المتتالية.
- يعيّن عدد حدود متتالية حسابية علم حدها الأول وحدها الأخير وأساسها .
- يدخلُ عدداً من الأوساط الحسابية بين عددين.
- يستنتج قانون مجموع ن حداً الأولى من متتالية حسابية.
- يوجد مجموع ن حداً من متتالية حسابية.
- يحل مسائل رياضية وتطبيقات حياتيه باستخدام قوانين المتتالية الحسابية.

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: المتتالية الحسابية.

الحصة الثانية: الحد العام للمتتالية الحسابية.

الحصة الثالثة: خواص المتتالية الحسابية.

الحصة الرابعة: مجموع متتالية حسابية.

الحصة الخامسة: تمارين صفية.

التقويم

يقوم المعلم الطلبة من خلال المناقشات المستمرة ومن خلال متابعة حل بعض التدريبات الصفيّة والواجب المنزلي وفي نهاية الحصة الخامسة يعطى التمرين التالي:

أوجد مجموع العشرة الحدود الأولى للمتتالية: ‹ ١ ، ٣ ، ٥ ، ... › .

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ - ٢)

[١] الستة الحدود الأولى للمتتاليات الحسابية هي:

أ) $\frac{٥}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٠

ب) ∵ $ح_{٤} - ح_{٣}$ = −٥ + ٩ = ٤ = د ، إذن الحدود هي : −١٧ ، −١٣ ، −٩ ، −٥ ، −١ ، ٣

جـ) ٢٣,٢ ، ٢٣,٨ ، ٢٤,٤ ، ٢٥ ، ٢٥,٦ ، ٢٦,٢

د) ١٥ ، $١٣\frac{١}{٢}$ ، ١٢ ، $١٠\frac{١}{٢}$ ، ٩ ، $٧\frac{١}{٢}$

و) ٩ س + ٥ ، ١١ س + ٢ ، ١٣ س −١ ، ١٥ س −٤ ، ١٧ س −٧ ، ١٩ س −١٠

[٢] أ) $ح_{ن} = ح_{١} + (ن-١)$ د ، $ح_{١٣}$ = ١ + ١٢ × −٨ = ١ − ٩٦ = −٩٥ .

$ح_{٢٠}$ = ١ + ١٩ × −٨ = ١ − ١٥٢ = −١٥١

ب) $ح_{٧} = ح_{١}$ + ٦ د = ٢١٧ ...(١) ، $ح_{١٠} = ح_{١}$ + ٩ د = ٢٥٠ ...(٢)

بحل المعادلتين ينتج أن د = ١١ ، ∴ $ح_{١}$ = ١٥١ ، $ح_{٤}$ = ١٨٤

جـ) $ح_{٥}$ = ٥,٥ ، $ح_{١١}$ = −٢,٥

د) ٧ = $\frac{١}{٤}$ + (ن−١) $\frac{١}{٤}$ ⇐ ن = ٢٨

هـ) −٨٠ = ٥١٢ + (ن−١)(−١٦) ⇐ ن = ٣٨

[٤] أ) $ح_{ن}$ = −(١٤ + ٧ب)

ب) $ح_{٧}$ = $س^{٢}$ − ١٠ س ص + $ص^{٢}$

[٥] أ) ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨

ب) ٧٥ ، ٧٨ ، ٨١ ، ٨٤ ، ٨٧ ، ٩٠ ، ٩٣

جـ) ٤,٥ ، ٧ ، ٩,٥ ، ١٢ ، ١٤,٥ ، ١٧ ، ١٩,٥

د) −١٩ ، −١٢ ، −٥ ، ٢ ، ٩ ، ١٦

[٦] أ = ١٨,٦ ، هـ = ٩٦,٣ .

[٧] أ) عدد الحدود = ٢ + ٢ = ٤ ، $ح_{١}$ = ٥,٢٦ ، $ح_{٤}$ = ٦,٣٤ = ٥,٢٦ + ٣ د

∴ د = ٠,٣٦ ، ∴ الوسطان هما: ٥,٦٢ ، ٥,٩٨

ب) عدد الحدود = ٥ + ٢ = ٧ ، $ح_{١}$ = ٤٠ ، $ح_{٧}$ = ١٠ = ٤٠ + ٦ د

∴ د = −٥ ، ∴ الأوساط هي: ٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٥

$ح_{٦} = ٤١ = ٩ + ٥د$ ⟸ د = ٦,٤

جـ) عدد الحدود = ٤ + ٢ = ٦ ، $ح_{١} = ٩$ ، $ح_{٦} = ٤١$

إذن الأوساط هي: ١٥,٤ ، ٢١,٨ ، ٢٨,٢ ، ٣٤,٦

د) عدد الحدود = ٣ + ٢ = ٥ ، $ح_{١} = ٨,٢٤$ ، $ح_{٥} = ٢,٨ = ٨,٢٤ + ٤د$ ، ∴ د = −١,٣٦

∵ د = −١,٣٦ ، ∴ الأوساط هي ، ٦,٨٨ ، ٥,٥٢ ، ٤,١٦

هـ) −٣ ، −١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ... ، ٢٣

[٨] أ) $ح_{ن} = ح_{١} + (ن-١)\,د$ ، ∴ ٥٦ = ٥ + ٣(ن−١) ، ∵ ن = ١٨ ، ∴ $مج_{ن} = ٥٤٩$

ب) $ح_{١} + (ح_{١} + د) + (ح_{١} + ٢د) = ٣٩$ ، ∴ $ح_{١}(ح_{١} + د)(ح_{١} + ٢د) = ٢١٨٤$

∴ $٣ح_{١} + ٣د = ٣٩$ ⟸ $ح_{١} = ١٣ - د$

∴ (١٣ − د)(١٣)(١٣ + د) = ٢١٨٤

∴ $د^{٢} = ١$ ⟸ د = ±١

∴ $ح_{١} = ١٢$ أو $ح_{١} = ١٤$

∴ المتتالية هي ⟨ ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ... ⟩ أو ⟨ ١٤ ، ١٣ ، ١٢ ، ... ⟩

جـ) $٤ح_{١} + ٦د = ٢٦$ ... (١) $ح_{١}^{٢} + (ح_{١} + ٣د)^{٢} - [(ح_{١} + د)^{٢} + (ح_{١} + ٢د)^{٢}] = ١٦$ ... (٢)

بحل (١) ، (٢) ، ∴ د = ±٢

أما $ح_{١} = \frac{٧}{٢}$ ، ∴ المتتالية هي ⟨ $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$ ، $\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{١٩}{٢}$ ، ... ⟩

أو $ح_{١} = \frac{١٩}{٢}$ ، ∴ المتتالية هي ⟨ $\frac{١٩}{٢}$ ، $\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ ، ... ⟩

د) $ح_{٢} = ٩ = ح_{١} + د$ ...(١) ، $ح_{ن} = ٣٦ = ح_{١} + (ن-١)\,د$ ....(٢)

$مج_{ن} = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن}) = (ح_{١} + ٣٦)$ ...(٣)

ن = ١١ ، $ح_{١} = ٦$ ، د = ٣ المتتالية المطلوبة. ⟨ ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، .... ، ٣٦ ⟩

هـ) $٢ح_{ن} = ح_{١}$ ، ∴ $ح_{١} + ١٤د = ٠$ ...(١) ، $\frac{٢٠}{٢}(٢ح_{١} + ١٩د) = ٢٧٠$

∴ $٢ح_{١} + ١٩د = ٢٧$ ... (٢) بحل المعادلتين د = −٣ ، $ح_{١} = ٤٢$

∴ المتتالية ⟨ ٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ، ... ⟩

[٩] ن = ٢٩ ، ∵ الحدود الوسطى هي $ح_{١٤}$ ، $ح_{١٥}$ ، $ح_{١٦}$ ، ∴ $ح_{١} + ١٣د + ح_{١} + ١٤د + ح_{١} + ١٥د = ١٤١$

∴ $٣ح_{١} + ٤٢د = ١٤١$ أو $ح_{١} + ١٤د = ٤٧$ ...(١)

الحدود التي قبلها: ١٣ حدا ، حدها الأول = $ح_{١}$ ، ∵ $مج_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢ح_{١} + (ن-١)\,د]$

∴ $مج_{١٣} = \frac{١٣}{٢}[٢ح_{١} + ١٢د] = ١٣(ح_{١} + ٦د)$ الحدود التي بعدها: ١٣ حداً حدها الأول = $ح_{١٧}$

∴ $مج = \frac{١٣}{٢}[٢ح_{١٧} + ١٢د] = ١٣(ح_{١٧} + ٦د) = ١٣(ح_{١} + ١٦د + ٦د)$

$= ١٣(ح_{١} + ٢٢د)$ ...(٢)

$\frac{مج}{مج} = \frac{ح_{١} + ٦د}{ح_{١} + ٢٢د} = \frac{٢٣}{٧١}$

∴ $٣ح_{١} - ٥د = ٠$ ...(٣) ، بحل (١)،(٣) ، ∴ د = ٣ ، $ح_{١} = ٥$

المتتالية هي ⟨ ٥ ، ٨ ، ١١ ، ... ⟩

[١٠] $ح_{٤} = ٣ح_{١}$ ، ∴ $ح_{١} + ٤د = ٣(ح_{١} + د)$ ، ∴ $٢ح_{١} = د$ ... (١)

$مج_{٣١} = ح_{١١}^{٢}$

∴ $\frac{٣١}{٢}[٢ح_{١} + ٣٠د] = [ح_{١} + ١٥د]^{٢}$ ، ∴ $ح_{١} + ١٥د = ٣١$ ... (٢)

بحل (١) ، (٢) نحصل على $ح_{١} = ١$ ، د = ٢ ∴ $ح_{٤٠} = ١ + ٣٩ \times ٢ = ٧٩$

[١١] $ح_{ن} = ١ + (ن-١) \times ٤$ ، $ح_{ن} = -١٨ + (ن-١) \times ٨$

∴ −١٨ + ٨(ن−١) − (١ + ٤(ن−١)) = ٥ ، ∴ ن = ٧

$ح_{٤ن-٣} = ح_{٤\times٧-٣} = ح_{٢٥} = ٩٧$ (في الأولى) ، ١٧٤ (في الثانية)

[١٢] $ح_{١١} = ٤٩$ في المتتالية الأولى ، من المتتالية الثانية −٣ = ٤٣ + (ن − ١)(−٢)

∴ ن = ٢٤

ن [٦ + ٢(٢ن−١)] = $\frac{ن}{٢}$ [٨٦ − ٢(ن−١)]

∴ ن = ٨

[١٣] ن = ٨ أو ٢٥ ، د = ١ ، مجموع الحدود الأولى = $مج_{٨} = -١٠٠$ ، $مج_{٢٥} = -١٠٠$ أيضاً)

فلا بد أن مجموع الحدود ابتداءً من الحد التاسع إلى الحد الخامس والعشرين = صفراً

ولتحقيق ذلك نقول ، $ح_{٩} = -١٦ + ٨ \times ١ = -٨$ ، $ح_{٢٥} = -١٦ + ٢٤ \times ١ = ٨$

∴ $مج = \frac{ن}{٢}(ح_{١} + ح_{ن})$ ،

∴ مجموع حدود المتتالية ابتداءً من الحد التاسع إلى الحد الخامس والعشرين = $\frac{١٧}{٢}(-٨ + ٨)$ = صفراً .

[١٤] $٢٥٠ = \frac{١٠}{٢}(٢ح_{١} + ٩د)$ ، ∴ $٢ح_{١} + ٩د = ٥٠$ ... (١)

$٢٥٠ + ٤٥٠ = \frac{٢٠}{٢}(٢ح_{١} + ١٩د)$ ، ∴ $٢ح_{١} + ١٩د = ٧٠$ ... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $ح_{١} = ١٦$ ، د = ٢

∴ المتتالية هي : ⟨ ١٦ ، ١٨ ، ٢٠ ، ... ⟩

Scanned by CamScanner

[١٥] الأعداد الصحيحة المتتالية تكون متتالية يمكن جمعها. ، الأعداد المحصورة بين ٥٠، ٥٠٠ والتي تقبل القسمة على ١١ تكون متتالية عددية أخرى يمكن جمعها فإذا طرحنا المجموع الثاني من الأول نتج المطلوب.

الأعداد المحصورة بين ٥٠ ، ٥٠٠ هي ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤،...، ٤٩٩ ، وهي تكون متتالية حسابية حدها الأول ٥١ وأساسها ١ ، ∴ ح د = ٤٩٩ = ٥١ + (د-١) × ١ ، ∴ د = ٤٤٩

مجـ ٤٤٩ = (د/٢) (ح١ + ح د) = (٤٤٩/٢) (٥١+٤٩٩) = ١٢٣٤٧٥

أول عدد بعد ٥٠ يقبل القسمة عل ١١ هو ٥٥ وآخر عدد قبل ٥٠٠ يقبل القسمة على ١١ هو ٤٩٥

إذن الأعداد هي: ٥٥ ، ٦٦ ، ٧٧ ،... ، ٤٩٥ ، د = ١١ ،

∴ ٤٩٥ = ٥٥ + (د-١) × ١١ ،

∴ د = ٤١ ، ∴ مجـ ٤١ = (٤١/٢) (٥٥ + ٤٩٥) = ١١٢٧٥ ،

∴ المطلوب = ١٢٣٤٧٥ - ١١٢٧٥ = ١١٢٢٠٠

[١٦] أ) ح د = ٢ د - ١ ، ح١ = ١ ، ح٢ = ٣ ، ح٣ = ٥ ، (١)

د = ح٢ - ح١ = ٢ = ح٣ - ح٢ = ٢ ، اذن ‹ ح د › متتالية حسابية لذلك

ح د+١ - ح د = ٢(د+١) - ١ - (٢ د-١) = ٢ د + ٢ - ١ - ٢ د + ١ = ٢

مجـ ٢٠ = (٢٠/٢) [٢ + ١٩ × ٢] = ٤٠٠

ب) ح د = (د/٢) + ١ ، ح١ = (٣/٢) ، ح٢ = ٢ ، ح٣ = (٥/٢) ، ...

د = ح٢ - ح١ = ح٣ - ح٢ = (١/٢)

كذلك ح د+١ - ح د = ((د+١)/٢) + ١ - (د/٢) - ١ = (١/٢) ∴ المتتالية حسابية .

مجـ ١٧ = (١٧/٢) [٣ + ١٦ × (١/٢)] = (١٨٧/٢) = ٩٣,٥

[١٧] ح١ = ٩٠ ، د = ١٢٠ ، د = ٢٠ ، مجـ ٢٠ = (٢٠/٢) [٢ × ٩٠ + ١٩ × ١٢٠] = ٢٤٦٠٠ سم .

[١٨] أ) ح١ = ٢ + ١٨ = ٢٠ ، ح٢ = ٤ + ١٨ = ٢٢ عدد المقاعد في الصفين الأول والثاني = ٤٢

ح ر = ٢ ر + ١٨ ، ح ر+١ = ٢ر + ٢ + ١٨ ، ح ر+١ - ح ر = ٢ (المتتالية حسابية)

ب) ح٣٠ = ٢ × ٣٠ + ١٨ = ٧٨

مجـ ٣٠ = (٣٠/٢) [ح١ + ح٣٠] = (٣٠/٢) [٢٠ + ٧٨] = ١٤٧٠ مقعداً .

[١٩] ح١ = ١٦ ، د = ٣٢ ، د = ١١ ، المتتالية: ‹ ١٦ ، ٤٨ ، ٨٠ ، ... › حسابية

مجـ ١١ = (١١/٢) [٢ × ١٦ + ١٠ × ٣٢] = ١٩٣٦ قدماً ، إذا كانت د = س ثانية

مجـ س = (س/٢) [٢ × ١٦ + (س-١) × ٣٢] = ١٦س + س (س - ١) × ١٦ = ١٦ س٢

٣ - ٣ المتتالية الهندسية

عدد الحصص : (٧) حصص

الأهداف

- يعرّف المتتالية الهندسية ويكتبها في صورتها العامة.
- يستنتج قانون الحد العام للمتتالية الهندسية.
- يوجد الحد العام لمتتالية هندسية .
- يعيّن متتالية هندسية علم حدّها الأول وأساسها.
- يعيّن متتالية هندسية علم حدّ من حدودها وأساسها.
- يعيّن حد من متتالية هندسية علم رتبته وحد آخر منها .
- يعيّن عدد حدود متتالية هندسية علم حدّها الأول والأخير وأساسها .
- يوجد عدداً من الأوساط الهندسية بين عددين.
- يستنتج قانون مجموع د حداً الأولى من متتالية هندسية.
- يوجد مجموع د حداً في متتالية هندسية.
- يحل مسائل رياضية وتطبيقات حياتية بإستخدام قوانين المتتالية الهندسية .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذالبند في سبع حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: المتتالية الهندسية.

الحصة الثانية: الحد العام للمتتالية الهندسية.

الحصة الثالثة: تمارين صفية .

الحصة الرابعة: خواص المتتالية الهندسية.

الحصة الخامسة: مجموع المتتالية الهندسية.

الحصة السادسة: تطبيقات حياتية .

الحصة السابعة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال المناقشات ومتابعة حل بعض التدريبات الصفية والواجب المنزلي وفي نهاية الحصة السابعة يقدم التمرين الآتي كخطوة تقويم:

أوجد مجموع العشرة الحدود الأولى للمتتالية ‹ ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .... › .

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ - ٣)

[١] أ) ‹٣، ١٢، ٤٨، ١٩٢، ٧٦٨، ٣٠٧٢، ...›

ب) ‹٨، -٤، ٢، -١، $\frac{١}{٢}$، $-\frac{١}{٤}$، ...›

جـ) ‹٣، $\sqrt{٣}$، ١، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$، ...›

[٢] أ) متتالية هندسية أساسها أ - ب، $\text{ح}_٥ = (\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}-\text{ب})^٤$

ب) متتالية حسابية أساسها أ + ٢ب، $\text{ح}_٥ = ١٥\text{أ} + ١٠\text{ب}$

جـ) متتالية هندسية أساسها $-\sqrt{٢}$، $\text{ح}_٥ = ٨$

د) هندسية وأساسها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$، $\text{ح}_٥ = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

هـ) متتالية حسابية أساسها ٠,٦، $\text{ح}_٥ = ٢٥,٦$

و) متتالية حسابية أساسها $\frac{٩}{٤}$، $\text{ح}_٥ = ١٢\frac{١}{٤}$

[٣] أ) $\text{ح}_٨ = \text{ح}_١ \text{ر}^٧ = ٦٤ \times (\frac{١}{٢})^٧ = \frac{١}{٢}$ ، $\text{ح}_{١٢} = ٦٤ \times (\frac{١}{٢})^{١١} = \frac{١}{٣٢}$

ب) $\text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = ٧٢ \Leftarrow \text{ح}_١ + \text{ح}_١\text{ر} = ٧٢$ ، $\text{ح}_٣ + \text{ح}_٤ = ٥٦ \Leftarrow \text{ح}_١\text{ر}^٢ + \text{ح}_١\text{ر}^٣ = ٥٦$

$\text{ر} = \frac{١}{٣}$ و $\text{ر} = \frac{٢}{٣}$

أولاً: $\text{ر} = \frac{١}{٣} \Leftarrow \text{ح}_١ = ٥٤$ ، وتكون المتتالية: ‹٥٤، ١٨، ٦، ٢، ...›

ثانياً: $\text{ر} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \text{ح}_١ = \frac{٢١٦}{٥}$ ، المتتالية: ‹$\frac{٢١٦}{٥}$، $\frac{١٤٤}{٥}$، $\frac{٩٦}{٥}$، $\frac{٦٤}{٥}$، ...›

جـ) ن = ٩، ∴ $\frac{١}{٢٧}$ هي قيمة الحد التاسع من المتتالية.

[٤] أ) $\text{ح}_١ + \text{ح}_١\text{ر} + \text{ح}_١\text{ر}^٢ = ٢٦$ ، $\text{ح}_١\text{ر}^٣ + \text{ح}_١\text{ر}^٤ + \text{ح}_١\text{ر}^٥ = ٧٠٢$

$\frac{\text{ح}_١(١+\text{ر}+\text{ر}^٢)}{\text{ح}_١\text{ر}^٣(١+\text{ر}+\text{ر}^٢)} = \frac{٢٦}{٧٠٢}$ ، ∴ $٢٦\text{ر}^٣ = ٧٠٢$

$\text{ر}^٣ = \frac{٧٠٢}{٢٦} = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$

∴ $\text{ر} = ٣$ ، $\text{ح}_١ = ٢$

∴ المتتالية هي : ‹٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...›

ب) ‹٩، -١٨، ٣٦، -٧٢، ١٤٤، ....›

جـ) ن = ٦

د) $\text{ح} = \frac{٢}{٢٧}$

[٥] أ) ‹$\sqrt{٣}$، $\sqrt{٦}$، $٢\sqrt{٣}$، $٢\sqrt{٦}$، ...›

ب) ‹١٢,٨، ٦,٤، ٣,٢، ١,٦، ٠,٨، ...›

جـ) ‹٢، ٤، ٨، ...› أو ‹٨، ٤، ٢، ...›

د) ‹٧، ٢١، ٦٣، ...› أو ‹٤٢، -٨٤، ١٦٨، -٣٣٦، ٦٧٢، ...›

[٦] أ) ن = ٧ ، ب) ن = ٧ جـ) ن = ٦

[٧] أ) ‹$\frac{٥}{٨}$، $\frac{٥}{٤}$، $\frac{٥}{٢}$، ٥، ١٠، ٢٠، ...›

ب) ‹$\frac{٣}{٤}$، $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٩}$، $\frac{٤}{٢٧}$، ...›

جـ) ‹١، ٢س، ٤$\text{س}^٢$، ٨$\text{س}^٣$، ١٦$\text{س}^٤$، ...›

[٨] $\text{ح}_١\text{ر}^٢ - \text{ح}_١\text{ر} = ١٢$ ...(١)

$\text{ح}_١\text{ر}^٥ - \text{ح}_١\text{ر}^٤ = ٣٢٤$ ...(٢)

بقسمة (٢) على (١) نحصل على ر = ٣ ، $\text{ح}_١ = ٢$ ، ∴ المتتالية: ‹٢، ٦، ١٨، ...›

[٩] $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١٣٥}{\text{ص}} \Leftarrow \text{س}^٢ = ٥\text{ص}$ و $\text{ص}^٢ = ١٣٥\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ص}^٢}{١٣٥}$

∴ $\frac{\text{ص}^٤}{١٣٥^٢} = ٥\text{ص} \Leftarrow \text{ص}^٣ = ٥^٣ \times ٢٧^٢$ ، ∴ $\text{ص} = ٥ \times ٣^٢ = ٤٥$ ، س = ١٥

[١٠] $\text{ح}_١ + \text{ح}_١\text{ر} + \text{ح}_١\text{ر}^٢ = ١٩$ ...(١)

$\text{ح}_١ + ٣$ ، $\text{ح}_١\text{ر} + ٥$ ، $\text{ح}_١\text{ر}^٢ + ٦$ تكون متتالية حسابية

$\text{ح}_١\text{ر} + ٥ = \frac{\text{ح}_١ + ٣ + \text{ح}_١\text{ر}^٢ + ٦}{٢}$ ، ∴ $\text{ح}_١ + \text{ح}_١\text{ر}^٢ - ٢\text{ح}_١\text{ر} = ١$ ...(٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{\text{ح}_١(١+\text{ر}+\text{ر}^٢)}{\text{ح}_١(١+\text{ر}^٢-٢\text{ر})} = ١٩ \Leftarrow \text{ر} = \frac{٢}{٣}$ أو $\frac{٣}{٢}$

إذا كانت $\text{ر} = \frac{٢}{٣}$ نحصل على ‹٩، ٦، ٤، ...›

إذا كانت $\text{ر} = \frac{٣}{٢}$ نحصبل على ‹٤، ٦، ٩، ...›

[١١] أ) $ح_١ = ٨$ ، $ح_٤ = ح_١ ر^٣ = ٦٤$ ، ∴ $ر = ٢$

فيكون الوسطان: ١٦، ٣٢

ب) الوسطان هما: $\frac{١}{\sqrt{١٩٦}}$ ، ٠ ، $\frac{١}{٢\sqrt{١٤}}$ ،

جـ) الأوساط هي: $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٨}{٢٧}$ ، $\frac{١٦}{٨١}$

د) الأوساط هي: ٣٢٠ ، ١٦٠، ٨٠، ٤٠، ٢٠، ١٠

[١٢] نفرض أن العددين س ، ص ، ∴ $\frac{س + ص}{٢} = ٧٥$ ،

$\sqrt{س ص} = ٦٠ \Leftarrow س ص = ٣٦٠٠$ ، ∴ س = ١٢٠ ، ص = ٣٠

[١٣] الوسط الحسابي = $\frac{١٣}{٢}$ والوسط الهندسي= ٦ ، أ = ٤ ، ب= ٩ أو أ= ٩ ، ب = ٤

[١٤] أ) $(م^٢ - ب^٢)$

ب) ٤ ، ٣٦

[١٦] $\sqrt{س ص} = ٨$ ، ∴ س ص = ٦٤ ، $\frac{١}{٢}(\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}) = \frac{٥}{٣٢} \Leftarrow ص + س = ٢٠$

∴ س = ٤ أو ١٦ ، ص= ١٦ أو ٤

[١٧] من خواص المتتالية $\frac{س}{٩٦} = \frac{١,٥}{ص}$ ، ∴ س ص=١٤٤ ، س- ص= ٤٥

∴ ص = ٣ ، س = ٤٨

[٢٠] $ح_ن = ٣ (٢)^ن$ ، $ح_١ = ٦$ ، $ح_٢ = ١٢$ ، $ح_٣ = ٢٤$ ، ....

المتتالية هي: ‹ ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...› وهي متتالية هندسية مجـ٥ = ١٨٦

[٢١] $مجـ_ن = ٨ - ٦ (\frac{٣}{٤})^{ن - ١}$ ، ∴ $مجـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + ... + ح_ن$

∴ $مجـ_١ = ح_١ = ٢$ ، $\frac{٧}{٢} = مجـ_٢ = ح_١ + ح_٢ = ٢ + ح_٢$ ، ∴ $ح_٢ = \frac{٣}{٢}$

$\frac{٣٧}{٨} = مجـ_٣ = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ = ٢ + \frac{٣}{٢} + ح_٣$

∴ المتتالية ‹ ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، ....› وهي متتالية هندسية.

[٢٢] $ر = \frac{س - ١}{س - ٢} = \frac{٣س - ٥}{س - ١}$

∴ $٢س^٢ - ٩س + ٩ = ٠$ أما س = ٣ أو س = $\frac{٣}{٢}$

[٢٣] المتتالية الهندسية: ‹ $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٨}{٣}$ ، ...› ،

والمتتالية الحسابية: ‹ $\frac{٤}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٨}{٣}$ ، ...›

[٢٤] ‹ ٥٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٢٠٠٠ ، ٤٠٠٠ ، .....› ، $ر = \frac{١٠٠٠}{٥٠٠} = ٢$

$مجـ_ن = \frac{ح_١(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، ∴ $مجـ_{١٠} = \frac{٥٠٠(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٥١١٥٠٠$

عدد البكتيريا بعد عشرة ايام = ٥١١٥٠٠

[٢٥] ‹ ٢٤٣ ، ٣٢٤ ، ٤٣٢ ، ...› ، $ر = ١\frac{١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

$مجـ_٦ = \frac{٢٤٣((\frac{٤}{٣})^٦ - ١)}{\frac{٤}{٣} - ١}$ = ٣٣٦٧ جالوناً

[٢٦] أ) $ح_ن = (-\frac{١}{٣})^ن$

$ح_١ = -\frac{١}{٣}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٩}$ ، $ح_٣ = -\frac{١}{٣^٣} = \frac{-١}{٢٧}$ ... متتالية هندسية فيها:

$ر = -\frac{١}{٣}$ ، $\underset{ن=١}{مجـ_٦} = \frac{-\frac{١}{٣}(١ - (-\frac{١}{٣})^٦)}{١ - (-\frac{١}{٣})} = -\frac{١٨٢}{٧٢٩}$

ب) $ح_ن = (-\sqrt{٣})^ن$

$ح_١ = -\sqrt{٣}$ ، $ح_٢ = ٣$ ، $ح_٣ = -٣\sqrt{٣}$ ، ..... ، ن = ٨

$\underset{ن=١}{مجـ_٨} = \frac{-\sqrt{٣}((-\sqrt{٣})^٨ - ١)}{-\sqrt{٣} - ١} = \frac{٨٠\sqrt{٣}}{\sqrt{٣} + ١} \approx ٥٠,٧٢$

٣ : ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان

الهدف يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف هذه الوحدة.

تنفيـــذ البند

ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي:

الحصة الأولى : مناقشة الاختبار الذي في كتاب التمارين ، بعد تكليفهم به كواجب منزلي

الحصة الثانية : يُعطى الاختبار الذي في الدليل أواختبار آخر مشابه لذلك بحيث يغطي أهداف الوحدة

كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١(أ ، ب ، جـ)	١ ، ٢
٢	٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩
٣	١٠، ١١ ، ١٢
٤ أ	٥
٤ ب	٦ ، ٧
٥	١٣

الاختبار

[١] عيّن أيًا من الدوال الآتية تمثل متتالية:

أ) $\text{د}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ن}^{٢}-٣}$ ، ن $\in$ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ب) $\text{ح}(\text{ن}) = \frac{١}{\text{ن}^{٢}}$ ، ن $\in$ ح*

جـ) هـ(ن) = ٣ ن −١ ، ن $\in$ ط*

[٢] بيّن نوع كل من المتتالية الآتية (من حيث كونها حسابية أو هندسية ، ثم أوجد حدها العام إن أمكن.

أ) ⟨ ٢، ٥، ٨، ١١، ١٤،...⟩ ب) ⟨ −٤، −٢، −١،...⟩ جـ) ⟨ ١٢ ، ٧ ، ٢ ، −٣،...

[٣] متتالية هندسية حدّها الثالث ١٢ وحدّها الخامس ٤٨ أوجد مجموع العشرة الحدود الأولى منها.

[٤] أ) أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين العددين ١٣ ، ٥٧

ب) ما المتتالية الحسابية التي حدّها الرابع ٣٥ ومجموع الاثنى عشر حداً الأولى منها ٥٧٠؟

[٥] خزان زيت فارغ ، صُبّ فيه في اليوم الأول ٢٥٦ جالوناً وصب فيه بعد ذلك في كل يوم ضعف ما صـ فيه في اليوم السابق مباشرة . أوجد سعة الخزان علماً بأنه امتلأ في ٦ أيام.

المصطلحات

المتتاليات	Sequences
متتالية غير منتهية	Infinite Sequence
متتالية منتهية	finite Sequence
حد	term
الحد العام	Genernal term
الحد النوني	n th - term
متتالية حسابية	Arithmetic Sequence
مجموع (ن) حداً الأولى	Sum of the first n terms
الأوساط الحسابية	Arithmetic means
الأوساط الهندسية	Geometric means
متتالية هندسية	Geometric Sequence
متسلسلة	Series
متسلسلة حسابية	Arithmetic series
متسلسلة هندسية	Geometric series
النسبة	ratio
الفرق	difference

المراجع

١– قدري حافظ طوقان : تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك ، دار الشروق بيروت ، ١٩٦٣م.

٢– رشدي راشد : تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب ، مركز دراسات الوحدة العربية بيروت ١٩٨٩م.

٣– سليمان ابو صبحا : الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية ، الناشر دار ومكتبة بغدادي للنشر والتوزيع ، الطبعة الأولى ١٩٩٤م.

٤– الرياضيات للصف الثاني عشر (علمي) الجزء الأول ، مكتب التربية العربي لدول الخليج ، المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج الطبعة الأولى ١٩٩٦م.

الوحدة الرابعة

اللوغاريتمات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٤ – ١	الدالة الأسية	٣
٤ – ٢	اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية	٤
٤ – ٣	قوانين اللوغاريتمات	٤
٤ – ٤	اللوغاريتم المعتاد	٣
٤ – ٥	اللوغاريتم الطبيعي	٣
٤ – ٦	تبسيط العمليات الحسابية باستخدام اللوغاريتمات	٢
٤ – ٧	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢١

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يرسم الدالة الأسيّة .
٢ – يوجد مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية ويرسم بيانها .
٣ – يطبِّق قوانين اللوغاريتمات في حل التمارين والمسائل.
٤ – يبيّن العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية .
٥ – يوجد اللوغاريتم الطبيعي باستخدام الآلة الحاسبة .
٦ – يحوّل اللوغاريتم لأي أساس إلى لوغاريتم بأساس آخر .
٧ – يستخدم اللوغاريتمات في حل التمارين الحسابية المعقدة (الضرب ، والقسمة ، والجذور) .

المقدمة

سنجد في هذه الوحدةمادة علمية شيّقة وسلسة ، تم تنسيقها وتقديمها بشكل مترابط وفق تسلسل منطقي، بحيث تتناغم وتترابط بنود المفاهيم مع بعضها، كما تعتمد على ما سبقها من موضوعات وتمهّد لما يليها وفيما يلي توضيح لبنود هذه الوحدة :

١ – الدالة الأسيّة : اعتمد هذا البند على موضوع الأسس والقوى الذي قُدّم على فترات مختلفة في السنوات السابقة، وبجرعات مناسبة لكل سنة دراسية ، وفي هذا الجانب فهو يقدم تمهيداً مناسباً لموضوع اللوغاريتمات وقوانين اللوغاريتمات، كما أن الدالة الأسّية مدخل جيد لدراسة الدالة اللوغاريتمية، من حيث هي كدالة عكسية للدالة الأسّية، في الوقت نفسه يتضمن رسم الدالة الأسيّة مدخلاً عملياً للدالة اللوغاريتمية ورسم بيانها .

٢ – اللوغاريتمات والدالة اللوغاريتمية : وفيه تسلسل الموضوعات الرئيسية في هذه الوحدة ، وهي :
– اللوغاريتمات .
– تطبيقات للقواعد الحسابية في التحويل من الأسس إلى اللوغاريتمات والعكس .
– الدالة اللوغاريتمية ، تعريفها ، رسمها ، وسلوك بيانها ، مداها .

٣ – قوانين اللوغاريتمات .

٤ – اللوغاريتم المعتاد (العشري) :
تطبيق عملي وتعريف لمفهوم اللوغاريتم المعتاد ،كما يعتبر جزءاً هامًا يعيد علاقة الأسس باللوغاريتمات ، وينطلق نحو تعميم إيجاد لوغاريتم أي عدد موجب للأساس عشرة . كما يمكننا من إيجاد لوغاريتم أي عدد موجب لأي أساس (باستخدام قانون التحويل) بدلالة الأساس العشري ، كما تضمن هذا البند إيجاد العدد القابل (وهو العدد الذي علم لوغاريتمه للأساس عشرة) ، وذلك باستخدام جدوال اللوغاريتمات، وباستخدام الآلة الحاسبة .

٥ – اللوغاريتم الطبيعي : وقد تم التقديم لهذا الموضوع بالدالة الأسيّة الطبيعية، وهي الدالة الأسيّة التي أساسها العدد هـ (ويسّمى الأساس الطبيعي) ويعتبر هذا البند تطبيقاً مباشراً للوغاريتم المعتاد حيث يستبدل الأساس (١٠) بالأساس (هـ) كما يتضمن هذا البند إيجاد العدد المقابل ، وقد اكتفينا (لإيجاد اللوغاريتم والعدد المقابل) باستخدام الآلة الحاسبة .

٦ – التبسيط باستخدام اللوغاريتمات : ونعني بالتبسيط هنا استخدام قوانين وخصائص اللوغاريتمات في حل التمارين والمسائل الحسابية التي تحوي عمليات مطوّلة ومعقّدة (ضرب وقسمة وجذور)أعداد معقدة .

وقد شملت الوحدة مسائل وتمارين لكل بند على حدة تعالج مفاهيم كل بند وتقّدم صورة واضحة لمدى استيعاب الدارسين لمحتوى الوحدة .

لمحة تاريخية

تم اكتشاف هذا الفرع من فروع الرياضيات من قبل عالم رياضيات مسلم مشهور هو الخوارزمي . وجاء بعده في القرن السابع عشر العالم الاسكتلندي جون نيبر حيث طوّر فكرة اللوغاريتمات العشرية ، ونظم جداول اللوغاريتمات الذي كان عظيم الفائدة ولعب دوراً كبيراً في حل المسائل الحسابية المعقدة . ومن خلال قواعد وقوانين اللوغاريتمات أمكن تسهيل إجراء عمليات الضرب والقسمة على الأعداد المعقدة بتحويرها إلى شكل أبسط باستخدام عمليتي الجمع والطرح. كما أن استخدام اللوغاريتمات بسّط حساب القوى وحسابات الجذور.

ولقد لعبت اللوغاريتمات دوراً فعالاً ومؤثراً في حسابات علم الفلك والكيمياء والفيزياء والهندسة، ومع تطور العلوم تم اختراع المسطرة الحاسبة ثم الآلة الحاسبة المكنيكية ثم حاسبات الجيب ثم الكمبيوتر؛ مما قلل من أهمية اللوغاريتمات إلى حد ما. وعلى الرغم من ذلك مازالت اللوغاريتمات تحتل مكانة هامة، وستبقى أداة ذات أهمية علمية عالية في عالم الرياضيات والعلوم الأخرى بمختلف فروعها .

خلفية علمية

تقوم قوانين اللوغاريتمات على قواعد وقوانين الأسس، فنجد في الدالة الأسيّة إذا كانت د (س) = أ^{س} ، فإن: د (س + ص) = د (س) × د (ص)، وهذا ما يدعم قانوناً هاماً في اللوغاريتمات : .

لو (س . ص) = لو س + لو ص .

كما نجد أن $\frac{\text{د (س)}}{\text{د (ص)}}$ = د (س − ص) ، د (س^{ن}) = ن د (س) ؛

وهما حقيقتان من الأسس تدعم القانونين التاليين في اللوغاريتمات .

لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو س − لو ص ، لو س^{ن} = ن لو س .

وما يجب أن يؤخذ في الاعتبار في قوانين اللوغاريتمات هو أن يكون الأساس موحّداً في المسألة الواحدة؛ فتوضع جميع الأعداد على صورة قوى لهذا الأساس . وبسهولة نجد أن :

لو$_{أ}$ (أ^{ن} × أ^{م}) = ن + م اعتماداً على ثلاثة قوانين في اللوغاريتمات هي :

١ − لو$_{أ}$ (أ^{ن} × أ^{م}) = لو$_{أ}$ أ^{ن} + لو$_{أ}$ أ^{م}

٢ − لو$_{أ}$ أ^{ن} + لو$_{أ}$ أ^{م} = ن لو$_{أ}$ أ + م لو$_{أ}$ أ

٣ − ن لو$_{أ}$ أ + م لو$_{أ}$ أ = ن (١) + م (١) = ن + م

هنا يمكننا اختزال الخطوات السابقة بأن نقول إن :

لو$_{أ}$ (أ^{ن} × أ^{م}) = لو$_{أ}$ أ$^{ن+م}$ = (ن + م) لو$_{أ}$ أ = (ن + م) .

وذلك برفع الأساس أ إلى القوة (ن + م) باستخدام قانون (ضرب الأساسات المتساوية في الضرب) . وهذه الفكرة مع اعتبار الأساس ١٠ تمكننا من تبسيط العمليات الحسابية والمحتوية على أعداد معقدة وعمليات حسابية مطولة .

إلاّ أن هناك أهمية علمية وتربوية للوغاريتمات هي التدريب المستمر لابنائنا على التفكير العلمي، وحل المشكلات، من خلال دراسة قوانين اللوغاريتمات وبرهنةمبرهناته، وكذلك من خلال استخدام خواص وقواعد اللوغاريتمات في حل التمارين والمسائل الحسابية المطولة والمركبة .

الأخطاء الشائعة

هناك أخطاء قد يقع فيها الطالب أو المدرس بقصد، أو بغير قصد، ومن هذه الاخطاء :

١ − عدم الدقة في رسم المحاور الإحداثية − مثل − عدم تعامد المحورين ، وعدم تساوي المسافات بين أي عددين صحيحين متتاليين في كلا المحورين .

والصحيح: أن نرسم المحورين متعامدين، ونجعل المسافات بين أي عددين صحيحين متتاليين في كلي المحورين متساوية.

٢ − كتابة القوى بشكل خاطئ كألاّ يكون الأس في موقعه الصحيح من الأساس مثل أ س

والصحيح : أ^{س} يكون الأس أعلى يسار الأساس .

٣ − كتابة اللوغاريتم بشكل خاطئ ، كأن نكتب لو أ^{س}

والصحيح : لو$_{أ}$ س

٤ − كتابة قانون تحويل حاصل الضرب إلى مجموع في اللوغاريتمات مثل :

لو (س + ص) = لو س + لو ص وهذا خطأ فادح ؟

والصحيح هو : لو (س . ص) = لو س + لو ص .

توجيهات طرائقية عامة

تأتي أهمية الإرشادات الطرائقية في عملية التدريس والعملية التعليمية بشكل عام ، من كون هذه الإرشادات تقدم في الوقت المناسب والموضوع المناسب إضافة إلى أنها تختص بكيفية وطرائق تقديم المعلومة الخاصة بالأسس واللوغاريتمات ودوالها ، وعلى المدرس أن يركز في هذه الوحدة على ما يلي :

١ − تعميق مفهوم الأسس والدالة الأسيّة من خلال بيان الفرق بين الأسس كصيغة للتعبير عن عملية الضرب المتكرر للأساس الواحد ، والدالة الأسيّة كدالة يكون الأساس فيها عدداً حقيقياً موجباً وأسّها هو المتغير المستقل .

٢ − توضيح العلاقة بين الأساس واللوغاريتمات والعلاقة بين الدالة الأسّية والدلة اللوغاريتمية كدالة عكسية للدالة الأسيّة ، وتكرار هذا المفهوم عند رسم بيان كل من الدالة الأسيّة والدالة اللوغاريتمية التي تكافئها .

٣ – الاستعانة بالرسم البياني لتوضيح العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية التي أساسها أ ، مع الدالة اللوغاريتمية ا...
أساسها $\frac{١}{أ}$ (حيث العدد المراد إيجاد لوغاريتميه هو نفسه في الحالتين) .

٤ – توضيح الفترات التي تكون فيها الدالة اللوغاريتمية موجبة، والفترات التي تكون فيها سالبة؛ ونوه...
مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية ومداها .

٥ – المقارنة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية من حيث المدى ومجموعة التعريف، وشكل بيان الدالة (أين تقع...
كلٌ منهما محور السينات أو الصادات – مع ذكر شروط ذلك – متى تكون الدالة تزايدية ومتى تكون تناقصية...

٦ – إثبات قوانين اللوغاريتمات – إن سمح الوقت – وإذا لم يكن ممكناً فتعطى القوانين المتبقية ويترك إثبا...
واجبًا منزليًا، مع ضرورة التوضيح للعلاقة بين كلٌ منها .

٧ – التأكيد على أن القانون [لو$_{أ}$ س = ن $\Leftarrow$ س = أ^{ن}] وتوضيح أن القانونين [لو$_{أ}$ أ = ١ ، لو$_{أ}$ ١ = ٠
ما هما الا تطبيقاً للتعريف .

٨ – الحرص على توضيح أهمية القانون [لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ر}\text{س}}{\text{لو}_{ر}\text{ص}}$] في عملية التحويل من لوغاريتم لأساس معلوم إلى
لوغاريتم لأساس آخر .

٩ – في بند اللوغاريتم المعتاد ، سيكون الهدف الرئيس في البند هو إيجاد اللوغاريتم المعتاد والعدد المقابل
باستخدام الآلـة الحاسبة ؛ فمن خلال هذا المفهوم سوف تقدّم للطلاب مجالاً خصباً للتعلم بطريقة
حل المشكلات بالإضافة إلى أن الموضوع يعتبر نموذجاً رائعاً من الدروس التي يتعلّم أبناؤنا من خلا...
طريقة التفكير المنطقي بالإضافة إلى تعلّم النظام والانضباط والترتيب وتنظيم وتنسيق المعلومات ، ولهذا
يجب أن نركز على العلاقة بين اللوغاريتم العشري وقوى العدد عشرة . سواءً كان العدد صحيحاً
كسراً عشريًا أو كان عدداً صحيحا وكسرا . وكيفية إيجاد العدد البياني في اللوغاريتم العشري باستخ...
قوى العدد عشرة.

مثال : احسب لو ٥٤٣,٢

الحل : أولاً نضع العدد ٥٤٣,٢ في صورته القياسية وهي الصورة التي يكون فيها العدد على شكل ...
صحيح مكوّن من مرتبة واحدة هي عدد صحيح و كسر عشري

٥٤٣,٢ = ٥,٤٣٢ × ١٠^{٢}

هنا لو$_{١٠}$ ٥٤٣,٢ = لو$_{١٠}$ (٥,٤٣٢ × ١٠^{٢})

= لو$_{١٠}$ ٥,٤٣٢ + لو$_{١٠}$ ١٠^{٢}

= لو$_{١٠}$ ٥,٤٣٢ + ٢

و لو$_{١٠}$ ٥,٤٣٢ هو العدد الواقع في سطر (٥٤) عمود (٣) مع إضافة فروق (٢) إليه .

مثال : احسب لو ٠,٠٢٠٠٥٣

الحل : ٠,٠٢٠٠٥٣ = ٠,٠٢٠٠٥

= ٢,٠٠٥ × ١٠$^{-٢}$

لو$_{١٠}$ ٠,٠٢٠٠٥٣ = لو$_{١٠}$ (٢,٠٠٥ × ١٠$^{-٢}$)

= لو$_{١٠}$ ٢,٠٠٥ + لو$_{١٠}$ ١٠$^{-٢}$

= لو$_{١٠}$ ٢,٠٠٥ + (-٢)

طبعاً نوجد لو ٢,٠٠٥ من الجدول سطر ٢٠ وعمود الصفر ثم نضيف فروقه ٥
كما يجب أن نؤكد على ذلك عند إيجاد العدد المقابل وذلك من خلال التاكيد على ما يلى :

١ – يجب أن يكون في قيمة اللوغاريتم المطلوب إيجاد العدد المقابل له كسر موجب، ومعه عدد صحيح سالب أو موجب حيث سيكون هذا العدد الصحيح هو أس في قوى العشرة التي سيضرب في ناتج البحث عن العدد المقابل للكسر الموجب .

مثال : أوجد العددالمقابل للوغاريتم العشري : ٣,٢٤٥

الحل : لو$_{١٠}$ س = ٣,٢٤٥

نبحث في جدول الأعداد المقابلة عن صف ٠,٢٤ في عمود ٥
والناتج نضربه × ١٠^{٣} حيث ٣ هو العدد الصحيح في اللوغاريتم المفروض .

مثال : أوجد العدد المقابل للوغاريتم العشري : -٢,٤٢٧٥

الحل : -٢,٤٢٧٥ = -٢,٤٢٧٥ + ٣ -٣

= $\overline{٣}$,٥٧٢٥ (حيث تُحوَّل إلى عدد صحيح سالب وكسر موجب)؛
وبهذا نحوّل الكسر العشري في العدد إلى موجب ويبقى العدد الصحيح سالبا .
نبحث عن العدد المقابل للعدد ٠,٥٧٢٥ في الجدول للأعداد المقابلة ثم نضرب الناتج × ١٠$^{-٣}$

١٠– يجب التأكيد على أمرين :

الأول : إن الأساس عشرة في اللوغاريتم المعتاد قد سهّل لنا إيجاد لوغاريتم أيّ عدد موجب للاساس عشرة .

الثاني: قانون التحويل [لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{ر}\text{س}}{\text{لو}_{ر}\text{ص}}$] قد سهّل لنا إيجاد لوغاريتم أيّ عدد لايّ أساس وذلك بتحويله إلى لوغاريتم للأساس عشرة .

١١– عند تطبيق قوانين اللوغاريتم في حل المسائل ، يجب أن نضع المقدار المطلوب إيجاد لوغاريتمه مساوياً س ؛ ثم نطبق القانون : $\boxed{\text{س = ص} \Leftrightarrow \text{لوس = لوص}}$

ثم نكمل الحل مؤكّدين أن الحل هو إيجاد قيمة س الذي هو العدد المقابل للوغاريتم المقدار المطلوب إيجاد قيمته والذي يتم فيه تطبيق قوانين اللوغاريتمات بتحويل عمليات الضرب إلى جمع والقسمة إلى طرح ... الخ.

١٢ – نؤكد على أن هناك جداول لإيجاد اللوغاريتم الطبيعي مماثلة لجداول اللوغاريتم المعتاد ولكننا سنكتفي بإيجاد اللوغاريتم الطبيعي والعدد المقابل باستخدام الآلة الحاسبة .

وأخيراً نأمل أن نكون قد قدّمنا ما يرفع من مستوى أداء المعلم ويفيده في مجال عمله إن شاء الله تعالى .

٤ - ١ مراجعة الدالة الأسية

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

- يحدّد مجموعة تعريف الدالة الأسّية ومداها، ونقاط تقاطع بيانها مع المحاور .
- يرسم الدالة الأسّية في المستوى الإحداثي .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص موزعة على النحو التالي :

الحصة الأولى : تعريف الدالة الأسّية وخواصها .

الحصة الثانية : رسم الدالة الأسّية .

الحصة الثالثة : تمارين صفية.

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

. ارسم الدالة : $\text{ص} = \text{٣}^{-\text{س}}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ - ١)

[١] ب) الطرف الأيمن = $\text{د}(\text{س} - \text{ص})$

$= \text{أ}^{\text{س} - \text{ص}}$

الطرف الأيسر = $\dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}(\text{ص})}$

$= \dfrac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{أ}^{\text{ص}}}$

$= \text{أ}^{\text{س}} \times \text{أ}^{-\text{ص}}$

$= \text{أ}^{\text{س} - \text{ص}}$

= الأيمن

[٢] ز) $\text{ص} = \text{٢}^{\text{س} + \text{١}}$

س	٢	١	٠	١-	٢-	٣-	٤-
ص	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

نحدّد هذه النقاط (من الجدول) في المستوى الإحداثي ونصل بينها .

٤ - ٢ اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

- يكتب الصيغة الأسّية بالصيغة اللوغاريتيمة والعكس .
- يوجد لوغاريتم عدد موجب لأساس معين بدلالة قوى الأساس .
- يوجد مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية ومداها ونقاط تقاطعها مع المحاور .
- يحدد العلاقة بين بياني الدالة الأسّية والدالة اللوغاريتمية .
- يرسم الدالة اللوغاريتمية .
- يحدد العلاقة بين بياني دالتين لوغاريتميتين، أساس إحداهما يساوي مقلوب أساس الأخرى .

تنفيذ حصص البند

ينفَّذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : تعريف الصيغة اللوغاريتمية للأسس والتحويل من الصيغة الأسّية إلى الصيغة اللوغاريتمية والعكس .

الحصة الثانية : إعطاء أمثلة على الدالة اللوغاريتميه.

الحصة الثالثة : تعريف الدالة اللوغاريتمية وخواصها ورسمها .

الحصة الرابعة : رسم الدالة اللوغاريتمية ، وتمارين صفية .

التقويم

أوجد مجموعة تعريف الدالة : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{٢}}(\text{س} - \text{٣})$ ثم ارسم بيانها .

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ - ٢)

[١] جـ) $\text{٦}\sqrt{\text{٦}} = \text{٦} \times \text{٦}^{\frac{١}{٢}} = \text{٦}^{\frac{٣}{٢}}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{٦}}\, \text{٦}\sqrt{\text{٦}} = \text{لو}_{\text{٦}}\, \text{٦}^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٣}{٢}\, \text{لو}_{\text{٦}}\, \text{٦} = \frac{٣}{٢}$

[٢] و) $\text{لو}_{\text{٢}}(\text{س} - \text{٣}) = \text{٠} \Leftrightarrow \text{س} - \text{٣} = \text{٢}^{\text{٠}}$

$\Leftarrow \text{س} - \text{٣} = \text{١} \Leftarrow \text{س} = \text{٤}$

[٣] ب) $\text{لو}_{\text{١١}}\, \frac{١}{١٢١} = \text{لو}_{\text{١١}}\, \frac{١}{(١١)^{٢}}$

$= \text{لو}_{\text{١١}}\, \text{١١}^{-\text{٢}} = -\text{٢}\, \text{لو}_{\text{١١}}\, \text{١١} = -\text{٢}$

[٤] د) $\text{لو}_{٢\sqrt{٢}}\ ٣٢\sqrt[٥]{٤} = \text{س} \Leftrightarrow \text{لو}_{٢\sqrt{٢}}\ ٢^{٥} \times ٢^{\frac{٢}{٥}} = \text{س}$

$\Leftarrow \text{لو}_{٢\sqrt{٢}}\ ٢^{\frac{٢٧}{٥}} = \text{س}$

$\Leftarrow \text{لو}_{٢\sqrt{٢}}\ (٢\sqrt{٢})^{\frac{١٨}{٥}} = \text{س}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{١٨}{٥}$

[٥] د) $\text{لو}_{(\text{س}^{٢}+١)} \frac{١}{٢٥} = -٢ \Leftrightarrow (\text{س}^{٢}+١)^{-٢} = \frac{١}{٢٥} \Leftarrow (\text{س}^{٢}+١)^{٢} = ٢٥$

$\Leftarrow \text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١ = ٢٥$

$\Leftarrow \text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} - ٢٤ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٦) = ٠$

$\text{س}^{٢} + ٦ \neq ٠ \qquad \Leftarrow \text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$

[٦] $\because \text{د}(\text{س}) = \text{ب}^{\text{س}} \qquad \Leftarrow \text{د}(\text{س} - \text{ﻫ}) = \text{ب}^{\text{س} - \text{ﻫ}} = \frac{\text{ب}^{\text{س}}}{\text{ب}^{\text{ﻫ}}} = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}(\text{ﻫ})}$

[٧] جـ) لو (٣س − ١) = ص ⇐ د(س) معرّفة عند ٣ س − ١ > ٠

$\Leftarrow \text{س} > \frac{١}{٣}$

⇐ مجموع تعريف د(س) = $]\frac{١}{٣} ، \infty[$

[١٠] د) $\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س} - ١) = \text{ص} \Leftarrow \text{س} - ١ = \text{ه}^{\text{ص}}$

$\Leftarrow \text{س} = \text{ه}^{\text{ص}} + ١$

س	١٢٦/١٢٥	٢٦/٢٥	٦/٥	٢	٦	٢٦	١٢٦
ص	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣

من الجدول نحصل على النقاط التي نحدّدها على المستوى الإحداثي ونصل بينها لنحصل على المنحنى الذي يمثّل الدالة ص = $\text{لو}_{\text{ه}}$ (س − ١)

٤ - ٣ قوانين اللوغاريتمات

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

- يبرهن قوانين اللوغاريتمات .
- يحل مسائل المعادلات اللوغاريتمات باستخدام قوانين اللوغريتمات .
- يختصر المقادير اللوغاريتمائية إلى أبسط صورة باستخدام قوانين اللوغاريتمات .
- يحوّل لو غاريتم عدد موجب بأساس معلوم إلى لو غاريتم نفس العدد وبأساس آخر .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في اربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : دراسة القوانين من [١] إلى [٤] وإعطاء أمثلة عليها .

الحصة الثانية : دراسة وإثبات القوانين من [٥] الى [٧] وإعطاء أمثلة عليها .

الحصة الثالثة : دراسة المبرهنة وإعطاء تطبيقات عليها.

الحصة الرابعة : حل مسائل وتمارين .

التقويم

اختصر : $\text{لو} \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}} - \text{لو}(\text{ا} + \text{ب}) + \text{لو}(\text{ا}^{٢} + \text{ب}^{٢}) + \text{لو} \left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا} + \text{ب}}\right)^{٢} - \text{لو}(\text{ا} + \text{ب})^{٢}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ - ٣)

[١] أ) $\text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = \text{لو}_{٥}\ ٥^{٣} = ٣\ \text{لو}_{٥}\ ٥$

ع) $\text{لو}_{٣} \sqrt[٤]{٧٢٩ \sqrt[٣]{\frac{١}{\sqrt[٩]{(\frac{١}{٢٧})^{٤}}}}} = \text{لو}_{٣} \left(٣^{٦} \left(\frac{١}{٣^{٣} \times ٣^{-٤}} \right)^{\frac{١}{٣}} \right)^{\frac{١}{٤}}$

$= \text{لو}_{٣} \left(٣^{\frac{٣}{٢}} (٣^{٢})^{\frac{١}{١٢}} \right) \quad = \text{لو}_{٣}\ ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٦}}$

$= \text{لو}_{٣}\ ٣^{\frac{١٠}{٦}}$

$= \frac{٥}{٣}\ \text{لو}_{٣}\ ٣$

$= \frac{٥}{٣}$

ز) ٣ لو$_م$ ٩م^٢ − لو$_م$ ١٥م + لو$_م$ ١٢م^٢

المقدار = ٣ لو$_م$ ٣^٢ + ٣ لو$_م$ م^٢ − (لو$_م$ ٣ × ٥ × م) + لو (٢^٢ × ٣ × م^٢)

= ٦ لو$_م$ ٣ + ٦ لو$_م$ م − لو$_م$ ٣ − لو$_م$ ٥ − لو$_م$ م + ٢ لو$_م$ ٢ + لو$_م$ ٣ + ٢ لو$_م$ م

= لو$_م$ $\frac{٣^٦ \times م^٧ \times ٢^٢}{٥}$

[٢] أ) لو$_٢$ ٣٢ = لو$_٢$ ٢^٥

= ٥ لو$_٢$ ٢

= ٥ (٠,٣٠١)

= ١,٥٠٥

[٣] ب) لو$_٤$ ٨ = $\frac{لو_٢ ٨}{لو_٢ ٤}$

= $\frac{لو_٢ ٢^٣}{لو_٢ ٢^٢}$ = $\frac{٣ لو_٢ ٢}{٢ لو_٢ ٢}$

= $\frac{٣}{٢}$

٤ − ٤ اللوغاريتم المعتاد

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

- يكتب الأعداد على شكل قوى العدد عشرة مضروبة في عدد عشري.
- يعرّف اللوغاريتم المعتاد.
- يوجد لوغاريتم قوى العدد عشرة للأساس عشرة بأسس سالبة أو موجبة .
- يضع أيّ عدد مطلوب لوغاريتمه العشري المعتاد في صورته القياسية (عدد صحيح أصغر من عشرة وكسر × قوى العدد عشرة).
- يوجد اللوغاريتم المعتاد باستخدام الجداول .
- يوجد العدد المقابل للوغاريتم المعتاد باستخدام الجداول .
- يوجد اللوغاريتم المعتاد والعدد المقابل باستخدام الآلة الحاسبة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى : لوغاريتم قوى العدد عشرة للأساس عشرة، أمثلة عليها .

الحصة الثانية : إيجاد اللوغاريتم المعتاد والعدد المقابل، باستخدام الجداول وأيجاد العدد المقابل أيضاً .

الحصة الثالثة : إيجاد اللوغاريتم المعتادوالعدد المقابل باستخدام الالة الحاسبة .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :
احسب قيمة لو$_{١٠}$ ٣,٢٦ باستخدام الآلة الحاسبة

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ − ٤)

[١] أ) لو ١٦٤,٣٥ ، نبحث في الجداول عن لو غاريتم ١٦٤,٣٥ للأساس عشرة بعد أن نضع هذا العدد بالصورة القياسية

⟸ ١٦٤,٣٥ = ١,٦٤٣٥ × ١٠^٢

⟸ لو ١٦٤,٣٥ = لو ١,٦٤٣٥ + لو ١٠^٢

= لو ١,٦٤٣٥ + لو ١٠^٢

= لو ١,٦٤٤ + ٢

سطر ١٦ عمود ٤ = ٠,٢١٤٨ ، فروق ٤ = ٠,٠٠١١

⟸ لو ١,٦٤٤ = ٠,٢١٥٩

⟸ لو ١٦٤,٣٥ = ٠,٢١٥٩ + ٢ ، = ٢,٢١٥٩

[٢] ب) لو $\sqrt[٦]{٧٨\sqrt[٣]{٦٤٩}}$ = لو (٧٨ (٦٤٩)$^{\frac{١}{٣}}$)$^{\frac{١}{٦}}$

= $\frac{١}{٦}$ لو [٧٨ × (٦٤٩)$^{\frac{١}{٣}}$]

= $\frac{١}{٦}$ لو ٧٨ + $\frac{١}{٦}$ لو (٦٤٩)$^{\frac{١}{٣}}$

= $\frac{١}{٦}$ لو ٧٨ + $\frac{١}{١٨}$ لو ٦٤٩

ومن الجداول لو ٧٨ = ١,٩٣٩٥ ، لو ٦٤٩ = ٢,٨١٢٣

⟸ لو $\sqrt[٦]{٧٨\sqrt[٣]{٦٤٩}}$ = $\frac{١}{٦}$ (١,٩٣٩٥) + $\frac{١}{١٨}$ (٢,٨١٢٣) ،

= ٠,٤٧٩٥

[٣] أ) لو س = ($\overline{٢}$ ٠,٧٣٠٨) = ٠,٧٣٠٨ + (−٢)

لو س = − ١,٢٦٩٢ ⟺ س = ١٠$^{−١,٢٦٩٢}$ = $\frac{١}{١٠^{١,٢٦٩٢}}$ = ٠,٠٥٣٨٠٢٢

ومن الآلة نوجد ١٠^{١,٢٦٩٢} ثم نوجد معكوسه

[٤] أ) − ٢,٥٤٢١ = $\overline{٣}$,٤٥٧٩

من الجدول نوجد سطر ٤٥ وعمود ٧ = ٢,٨٦٤ ، وفروق ٩ = ٠,٠,٠٠٦

العدد المقابل للعدد ٠,٤٥٧٩ = ٢,٨٧٠ اما العدد (−٣) فيستخدم كقوة للعدد ١٠ والذي بدوره سوف يضرب × العدد المقابل للحصول على الإجابة .

⟸ العدد المقابل للعدد $\bar{3},4579 = 2,87 \times 10^{-3}$

⟸ العدد المقابل للعدد $\bar{3},4579 = 0,00287$

هذا يعني لو $0,00287 = \bar{3},4579$

[٦] ب) لو$_{13}$ ٣٩ = $\frac{لو ٣٩}{لو ١٣} = \frac{لو (٣,٩ \times ١٠)}{لو (١,٣ \times ١٠)}$

ومن الجدول نجد أن لو$_{13}$ ٣٩ = ١,٤٢٨٣١٧٣٤

٤ - ٥ اللوغاريتم الطبيعي

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

- يعرّف الدالة الأسيّة الطبيعية .
- يعرّف الدالة اللوغاريتم الطبيعيه وخواصها .
- يميّز بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم المعتاد .
- يوجد اللوغاريتم الطبيعي مع العدد المقابل له باستخدام الآلة الحاسبة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الدالة الطبيعية واللوغاريتم الطبيعي وخواصه.

الحصة الثانية : إيجاد اللوغاريتم الطبيعي والعدد المقابل له باستخدام الآلة الحاسبة

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم:

أ) أوجد لو$_{هـ}$ ١,٢٣٥

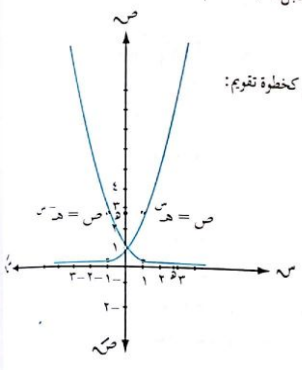
ب) حل المعادلة : لو$_{هـ}$س = ١,٥٣

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ - ٥)

[١] ص = هـ^{س}

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	$\frac{1}{هـ^2}$	$\frac{1}{هـ}$	١	هـ	هـ^2

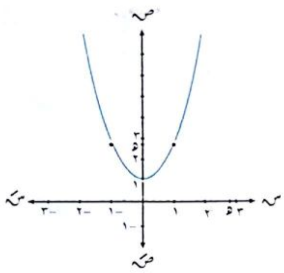
، ص = هـ$^{-س}$



س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	هـ^2	هـ	١	$\frac{1}{هـ}$	$\frac{1}{هـ^2}$

أ) ص = هـ$^{|س|}$

س	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ص	هـ^2	هـ	١	هـ	هـ^2	هـ^3



[٢] ب) هـ$^{لو_{هـ} ٠,٠٠٥}$ = ٠,٠٠٥

[٣] جـ) لإيجاد لو$_{هـ}$ ٣٢٠٠ نستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على مفاتيح العدد ٣٢٠٠ ثم على لو$_{هـ}$ فنجد أنه ٨,٠٧٠٩٠٦٠٠٩

[٤] أ) إذا كانت لو$_{هـ}$س = ١,٤٣٢

لإيجاد قيمة س : لو$_{هـ}$س = ١,٤٣٢ ⟺ س = هـ^{1,432}

ومن الآلة الحاسبة نضغط Sheft

ثم نضغط على العدد ١,٤٣٢ ثم على e^x وهي تقابل هـ^x بالعربية فنحصل على قيمة س .

وهناك طبعاً x تدل على العدد المعطى .

أما س فهو العدد المقابل المطلوب إيجاده

[٥] هـ) ٢ (هـ^{س} + ١) = ١٠

⟸ هـ^{س} = ٤ ⟸ هـ^{س} = ٢^2 ⟸ س = ٢ لو$_{هـ}$٢

ز) (٤٩)^{س} − ٥ × ٧^{س} = −٦ ⟺ ٧^{2س} − ٥ × ٧^{س} + ٦ = ٠

⟸ (٧^{س} − ٣) (٧^{س} − ٢) = ٠ ⟸ ٧^{س} = ٣ ⟸ س = لو$_{٧}$ ٣

أو ٧^{س} = ٢ ⟸ س = لو$_{٧}$ ٢

٤ ٦ تبسيط العمليات الحسابية باستخدام اللوغاريتمات

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف

- يحل تمارين حسابية على الضرب والقسمة والجذور ذات الأعداد المعقدة الإجراءات الحسابية باستخدام قوانين اللوغاريتمات .
- يحل مسائل تطبيقية باستخدام اللوغاريتمات .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصتين موزعتين على النحو التالي :

يتم خلالهما عمليات حسابية مطوّلة ومعقّدة باستخدام العدد

الحصة الأولى : إيجاد قيم المقادير المحتوية على عمليات حسابية مطوّلة ومعقّدة باستخدام العدد المقابل للوغاريتم الطبيعي او العشري .

الحصة الثانية : تطبيقات وتمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد قيمة : $\dfrac{\sqrt[٥]{٢,٣} \times (٦,٣٥)^{٦}}{(٤,٣٠٢)^{٧}}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ - ٦)

[١] د) ضع س = $\sqrt[٣]{(٠,٣٥٧)^{٥}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس ١٠

$\Leftarrow$ لو س = لو $\sqrt[٣]{(٠,٣٥٧)^{٥}}$

= $\frac{٥}{٣}$ لو ٠,٣٥٧

ويمكن إيجاد لو ٠,٣٥٧ من الآلة الحاسبة

نجد أن $\frac{٥}{٣}$ لو ٠,٣٥٧ = − ٠,٧٤٥٦

$\Leftarrow$ لو س = − ٠,٧٤٥٦

من الاعداد المقابلة س = $١٠^{-٠,٧٤٥٦}$

$\Leftarrow$ س = $\sqrt[٣]{(٠,٣٥٧)^{٥}}$ = ٠,١٧٩٦٥٨١٩

٤ - ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يقيس مدى تحقيق أهداف الوحدة

تنفيـــذ البند

يكلف المدرس طلبته بحل الاختبار الموجود في كتاب التمارين كعمل منزلي وكتهيئة لاختبار الوحدة وفي حصتي اختبار الوحدة يعطي المدرس الاختبارالتالي أو اختبار شبيه من إعداد المدرس نفسه شريطة أن يغطي أهداف الوحدة كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
الأول	١، ٢ ، ٣
الثاني	٣
الثالث	٥، ٦
الرابع	٤ ، ٢ ، ٨

الاختبار

اجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول : ١) حل المعادلة $٣^{س^{٢}-٣س} = ٩$.

٢) ارسم بيان الدالة : ص = $٣^{س}$.

٣) اوجد مجموعة تعريف الدالة ص = $\text{لو}_{٣}$ (س −٣) .

السؤال الثاني : ١) حل المعادلة $\text{لو}_{\sqrt[٣]{٢}} ٣٢ \sqrt[٥]{٤}$ = س.

٢) اثبت أن $\text{لو}_{٢}$ ٣٢ + $\text{لو}_{٢}$ ١٢٨ = $\text{لو}_{٢}$ ٤٠٩٦ .

٣) حل المعادلة $\text{لو}_{٣}$(س −٣) + $\text{لو}_{٣}$(س + ٥) = $\text{لو}_{٣}$ ٨ .

٤) أثبت أن $\text{لو}_{١٠} \frac{١٧٠}{٧}$ − $\text{لو}_{١٠} \frac{١٨}{٣٥}$ + $\text{لو}_{١٠} \frac{٧٢}{٢٤}$ = ٢ .

السؤال الثالث : ١) اكتب ما يأتي على شكل [عدد قياسي × ١٠]

٠,٣٢٥ ، ٣٢٥

٢) أوجد باستخدام الآلة الحاسبة كلاً من :

أ) $لو_{هـ}$ ٠,٠٠٣٢٥ ، ب) $لو_{١٠}$ ٠,٠٠٣٥

جـ) $لو_{هـ}$ ١٨ ، د) $لو_{١٠}$ ٠,٠٠٩

٣) ما هو أساس الدالة اللوغاريتمية التي يمر بيانها بالنقطة (٣٢، ٥) .

السؤال الرابع : ١) إذا كانت $لو_{١٠}$ س = ٣,٤٥٢٣ فاوجد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة س .

٢) احسب باستخدام اللوغاريتمات كلاً من :

أ) $\frac{(٠,٠٨٧)^{٢}(١,٢٥)^{٣}}{(١,٣٦)^{٢}\sqrt[٣]{٤٣٤}}$ ، ب) $\frac{(٣,٢٣)\sqrt[٥]{١٣}\sqrt[٣]{٨٧}}{(٦,٥٤٣)^{\frac{٣}{٢}}}$

٣) إذا كان نصف قطر قاعدة إسطوانة دائرية قائمة من القانون نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$

احسب قيمة نق حيث ح = ٤٨٢,٣ سم^{٣} ، ع = ١٢,٤٢ سم ، ط = ٣,١٤١٦ .

٤) ارسم الدالة : ص = $لو_{٢}$ س مستفيداً من بيان الدالة ص = $لو_{٢}$ س .

المفاهيم والمصطلحات

بيان	Graph
أس	Index (exponent)
معكوس	Inverse
الدالة اللوغاريتمية	Logarithmic function
لوغاريتم طبيعي	Natural Logarithin
الأساس الطبيعي (هـ)	Natural base (e)
الدالة الأسيّة	Exponeutial function
الأساس	Base

الوحدة الخامسة

النهايات والاتصال والاشتقاق

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٥ – ١	نهاية متتالية	٣
٥ – ٢	نهاية الدوال الحقيقية	٥
٥ – ٣	الاتصال	٤
٥ – ٤	معدل تغير الدالة	٣
٥ – ٥	المشتقة	٥
٥ – ٦	المشتقة عند نقطة، وعلى فترة	٣
٥ – ٧	قواعد الاشتقاق	٦
٥ – ٨		
	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٣١

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد دراسة الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرّف مفهوم نهاية متتالية غير منتهية تسعى إلى نهاية محددة .

٢ – يحسب نهاية متتالية ⟨ $ح_{د}$ ⟩ عندما د ← ∞

٣ – يعرّف نهاية الدالة الحقيقية عند نقطة وعند اللانهاية .

٤ – يحسب نهاية الدالة عند نقطة وعند اللانهاية .

٥ – يطبّق خواص النهايات في حل المسائل .

٦ – يعرّف مفهوم الاتصال عند نقطة، وعلى فترة .

٧ – يطبّق خواص الاتصال في حل المسائل .

٨ – يعرّف مفهوم تغير الدالة جبرياً وهندسياً .

٩ – يعرّف مفهوم المشتقة جبرياً وهندسياً .

١٠– يحسب مشتقة الدالة عند نقطة، وعلى فترة .

١١– يحل مسائل تطبيقية باستخدام قواعد الاشتقاق .

المقدمة

تتكوّن الوحدة الخامسة لموضوع النهايات والاتصال والاشتقاق للدوال الحقيقية من ثمانية بنود، هي:

- نهاية المتتاليات عند اللانهاية لمتتاليات غير منتهية.
- نهاية الدوال الحقيقية عند نقطة وعند اللانهاية.
- الاتصال عند نقطة، وعلى فترة.
- معدل تغيّر الدالة (ميل المماس)، ومتوسط التغير (ميل القاطع).
- مفهوم المشتقة جبرياً وهندسياً.
- المشتقة عند نقطة، وعلى فترة.
- قواعد الاشتقاق.
- اختبار الوحدة.

لمحة تاريخية

تاتي أهمية اللمحة التاريخية لموضوع النهايات والاتصال والاشتقاق للدوال الحقيقية من ارتباطه بمواضيع رياضية وعلمية أخرى بإتجاه تحقيق الأهداف التالية:

١) تنمية الاتجاه الإيجابي نحو الرياضيات وأهميتها العلمية والعملية.

٢) تقدير جهود علماء الرياضيات، والاعتزاز بإسهامات علماء العرب المسلمين في التمهيد لاكتشاف قواعد التفاضل والتكامل وتطوير التحليل الرياضي.

٣) تقدير أهمية الرياضيات في حياة الإنسان المعاصر الأكاديمية منها والعملية.

تشير الكثير من الكتابات والدراسات الحديثة لتاريخ الرياضيات إلى أن أوروبا والغرب عامة لم يشهد أي تطور يذكر حتى القرن الخامس عشر الميلادي. و البداية الحقيقية للتطور بدأت مع انتقال الحضارة الإسلامية إلى الغرب في القرن الثاني عشر الميلادي.

وبذلك يؤكد المؤرخون أن العالم العربي (ابن حمزة المغربي) هو أول من توّصل في القرن العاشر الهجري إلى قاعدة هامة مفادها أن « أس أساس أي حد من حدود متوالية هندسية تبدأ بالواحد الصحيح يساوي مجموع أسس أساس الحدين اللذين حاصل ضربهما يساوي الحد المذكور ناقصاً واحد ».

ويأتي أبو الوفاء (المولود عام ٩٤٠م) ليتابع التقدم في هذا الموضوع حتى استطاع اكتشاف بعض العلاقات الهامة بين الجيب والمماس ونظرائها تمهيداً لاكتشاف قواعد التفاضل والتكامل فيما بعد بصورتها الأولية على يد العالم العربي شرف الدين الطوسي (المتوفي عام ٦١٠هـ) المشار إليها في كتابه « قوام الحساب » ، موضحاً بشكل آخر المفهوم الذي عُرف لاحقاً بالمشتق من خلال عرضه للمعادلات التي درجتها اصغر من أو يساوي ٣ خصائص الدوال . ولحل هذه المعادلات تمكن الطوسي من دراسة القيمة العظمي للعبارات الجبرية بأخذ المشتق الأول لهذه العبارات (دون أن يستعمل اسمه) ثم يعدمه ، وبالتالي استطاع أن يبرهن على أن جذري المعادلة التي حصل عليها إذا ما عوض في العبارة الجبرية أعطى القيمة العظمى للعبارة.

ويأتي علماء علماء الغرب في عصر نهضتهم على إثر الإستفادة من علوم العرب، لبذل الكثير من الجهود بإتجاه تطوّرها حتى نشأ علم التفاضل والتكامل بصورته الأولية . في حين قام العالم الفرنسي باسكال Pascal (٦٢٣ ١٦٦٢١م) فيما بعد بتعريفه دون تطبيقه بصورة يمكن استعمالها، يليه العالم الانجليزي نيوتن Newton (٦٤٢ ١٧٢٧١م) الذي تمكن بعد عشر سنوات من تقديمه بصورة أكثر تجريداً ، بينما وضع العالم الالماني ليبنز Leibnz (١٦٤٦-١٧١٦م) له الكثير من الرموز مثل:

د (س)، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، $\int$.

وتأتي جهود علماء القرن الثامن عشر الميلادي ، لتضع معظم المواضيع الرياضية والمتعارف عليها بالرياضيات التقليدية بصورة حديثة بإستخدام طرق مستحدثة في التفاضل والتكامل، دون إعطاء اهتمام للتقارب والتباعد، والأساليب النهائية للدوال ، ذلك لأن الرياضيات حينها كانت خاصة بالعدد والشكل ، وليس بالتركيب.

مع العلم أن نهاية هذا القرن قد شهد نمواً كبيراً في دراسة التفاضل والتكامل وتطبيقاته في الميكانيكا والفلك والمساحة إذ قدّم نخبة من العلماء – أمثال ديموافر ، جاكوب ، برنولي ، تيلور ، ماكلورين ، ولا مبرت – التفاضل والتكامل في مسائل متنوعة ومختلفة مع الجديد في حساب التغير للدوال، وآخرين لا مجال لحصرهم ، أبرزهم:

- العالم الانجليزي الفرنسي لجرانج Lagrang (١٧٣٦– ١٨١٣م) والذي ابدع في حساب التغير وتطبيقاته في الديناميكا.
- العالم الالماني أويلر Euler (١٧٠٧– ١٧٨٣م) الذي قدّم التفاضل الجزئي وحساب التغير وتطبيقاتهما .الأمر الذي يوضح أن من أهم سمات القرن الثامن عشر هو تقديم الجديد في حساب التغير للدوال Calculas of Varition حيث نشر تيلور سنة ١٧١٥م المعادلة بالصورة:

$$\text{د}(\text{س}+\text{ا}) = \text{د}(\text{س}) + \text{ا}\,\text{د}'(\text{س}) + \frac{\text{ا}^{2}}{2!}\,\text{د}''(\text{س}) + \frac{\text{ا}^{3}}{3!}\,\text{د}'''(\text{س}) + \ldots$$

إلا أن تيلور لم يأخذ في حينها الاعتبار لتقارب المتسلسلات ، وبذلك حاول لجرانج أن يضع النهايات في صورة مجردة لبناء التفاضل والتكامل على أساس مجرد، لكن محاولته باءت بالفشل لكونه لم يعط اهتماماً بتفاصيل التباعد والتقارب.

ويأتي العالم الفرنسي لا بلاس Laplace (١٧٤٩–١٨٢٧م) ليساهم في تطور المعرفة للتفاضل والتكامل ، من خلال تقديم تحويلاته Laplace transforms – كأساس للنظرية التي قدمها هيفسد بعد ذلك في حساب التفاضل والتكامل ذي العمليات ، Operational Calculas ليأتي فيما بعد العالم الالماني فيرستراس (١٨١٥ ١٨٩٧م) فيضع أساس نظرية الدوال ذات المتغير المركّب على متسلسلات القوى ، وقدّم الكثير عن التكامل الناقص الزائدي والمعادلات التفاضلية الجبرية متميزاً عن غيره بصلابته في البرهان لنظريته الخاصة بالدوال وحساب التغير.

بينما شهد القرن التاسع عشر وما بعده تطوراً حقيقياً للتحليل الحقيقي في وضع الأساس المنطقي له – تمثل في أعمال كوشي وريمان ، حيث قدم كوشي عام ١٨٢١م نظرية أكثر تجريداً للنهايات ، ووضع فيها تعاريف مقبولة لتقارب والاستمرار للدوال التفاضلية والتكامل المحدود . إلا أن عمل كوشي كان محتاجاً إلى أساس أعمق ، إذ اعتمد على فكرة حدسية عن نظام الأعداد الحقيقية ، التي لم تظهر إلا في دراسة فيرستراس – مع نهاية القرن التاسع عشر ، علماً بأن أساسيات الأعداد الحقيقية لم تنل أيّ تطوير إلا من قبل ، ديدكند ، كانتور ،

فيرستراس، مع نهاية القرن التاسع عشر ، ومن خلال تقديم تعاريف الأعداد القياسية تمهيداً لاكتشاف نظ
المجموعات اللانهائية ، وأعداد ما وراء اللانهائيات ، من قبل كانتور (١٨٩٠–١٨٩٧م) . وتواصلت الجهود
هذا المجال من قبل العالم الألماني – جاوس Gauss – والفرنسي جالو Galois – وريمان Riemman (١٨٢٦
١٨٦٦م) أحد تلامذة جاوس – الأكثر تأثيراً في الرياضيات الحديثة بأعماله المشهورة حول المتسلسلات اللا
، وأساسيات التحليل ، إذ قدّم تعريف التكامل الريماني، ليأتي فيما بعد ليبيج (١٩٠٢م) مستفيداً من منش
الميكانيكا الإحصائية في نظرية القياس لتطوير الفرع التجريدي للرياضيات التي قام به علم التكامل فذهب إلى
أبعد ما توصّل إليه أرشميدس وكوشي وريمان من عالم الفراغات المجردة .

خلفية علمية

الفكرة الأساسية لمفهوم نهاية دالة تتلخّص في دراسة سلوك الدالة بجوار كل نقطة من نقاط مجال تعريفها
(مجموعة تعريفها) ومعرفة ما إذا كانت متصلة أم لا ، وعادة تتحدد بقيمة المتغير التابع بدلالة قيم المتغير
المستقلة سواء كانت متقطعة كما هو الحال في المتتاليات عندما $د \in ط^*$ أو المستمرة في الدوال الحقيقية. بينما
فكرة الاتصال تتلخص بعدم وجود فجوات أو انقطاع على مستوى جميع نقاط مجموعة تعريف الدالة.

وتنبع أهمية دراسة النهاية والاتصال والاشتقاق للدوال من أهمية تطبيقاتها الرياضية والفيزيائية من جهة، ب
الركائز الأساسية لمادة التحليل الرياضي ، واستخداماتها العملية في الميكانيكا من جهة أخرى، وعليها يُعتمد
كثيراً في حساب مسارات القذائف والصواريخ والأقمار الصناعية والكواكب والنجوم إلى غير ذلك من قوانين
الحركة وتطبيقاتها الهندسية ، وبالتالي فإن دراسة أي دالة حقيقية عند عدد حقيقي وليكن ا فإنه يَلزم أن تكون
الدالة معرّفة عند هذه القيمة ونهايتها معرّفة عند قيم قريبة من العدد ا ، عندئذ تسمى الفترة المفتوحة التي
ينتمي إليها العدد ا جوار للعدد ا.

علاوة على ذلك، فإن دراسة نهاية متتالية يتطلّب أولاً التعرّف على نوعها (متزايدة أم متناقصة، تقاربية،
تباعدية) اعتماداً على الحد العام (الحد النوني) ، $\forall د \to ط^*$

فإذا كانت $\langle ح_د \rangle < \langle ح_{د+1} \rangle$ عند ئذٍ يقال إن المتتالية متزايدة .

في حين إذا كانت $\langle ح_د \rangle > \langle ح_{د+1} \rangle$

يقال عنها بأنها متتالية متناقصة ، ولا يمكن إيجاد نهاية للمتتالية ما لم تكن تقاربيه.

فمثلاً : لتكن $\langle ح_د \rangle$ متتالية حيث $ح_د = \frac{(-1)^د}{د}$ ، $\forall د \in ط^*$ يلاحظ أن :

$\left|\frac{(-1)^د}{د}\right| = \frac{1}{د}$، فإذا كانت $د > 10$ فإن $\frac{1}{د} < \frac{1}{10} \Leftarrow \left|\frac{(-1)^د}{د}\right| < \frac{1}{10} \Leftarrow \frac{1}{10} > \frac{(-1)^د}{د} > -\frac{1}{10}$

بمعنى أن حدود المتتالية التي رتبتها أعلى من ١٠ واقعة ضمن الفترة $]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$ وبذلك يقال بصورة عامة إذا كانت $\frac{1}{د} < \frac{1}{10^{م}} \Leftarrow د > 10^{م}$ فإن الحدود التي تزيد عن $10^{م}$ تقع ضمن الفترة $]-\frac{1}{10^{م}}, \frac{1}{10^{م}}[$ مهما كان طول الفترة . فيما عدا ذلك تقع خارج هذه الفترة وبالتالي يعبّر عن نهاية متتالية لنهاية الحدود بالصورة:

$$\lim_{د \to \infty} \left|\frac{(-1)^د}{د}\right| = \lim_{د \to \infty} \frac{1}{د} = \text{صفراً}$$

ذلك لأنه كلّما تم التعويض عن ($د \in ط^*$) بأعداد كبيرة فإن الحدود المتتابعة في المتتالية تقترب من الصفر، علماً بأن الصفر لا يمثّل أيَّ حدٍّ من حدودها.

أما في حالة أن يكون المطلوب معرفة حدود المتتالية التي يكون الفرق بين كل منها ونهايتها ($ل \in ح$) أقل من أي قيمة اختيارية موجبة ε (وتُقرأ أبسلُنْ) ولتكن $\varepsilon = (10)^{-9}$، فإن :

$$\left|\frac{(-1)^د}{د} - ل\right| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{(-1)^د}{د} - 0\right| < 10^{-9} \Leftarrow \frac{1}{د} < 10^{-9} \Leftrightarrow د > 10^{9}$$

وهذا يعني أن كل الحدود التي يزيد قيمتها على 10^{9} تحقق المتراجحة ، وتقع ضمن الفترة المفتوحة $]-10^{-9}, 10^{-9}[$ ، ومهماكان طول الفترة فيما عدا ذلك فإن القيمة تقع خارجها. وبالتالي يقال أن للمتتالية $\langle ح_د \rangle$ النهاية (ل) إذا كان لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ (مهما صغرت قيمته) يوجد عدد $م \in ط^*$ (تعتمد قيمته على اختيار ε) متحققة إذا كان : $|ح_د - ل| < \varepsilon$، $\forall د > م$ (أصغر عدد طبيعي)

$\langle ح_د \rangle \in ف(ل، \varepsilon) - \{ل\}$. الأمر الذي يوضح أن الفترة ف تتحدد عادة بعد معرفة مركزها (ل)

وإذا كان طول الفترة $= 2\varepsilon$ ، عندئذٍ يعبر عن الفترة المفتوحة لجوار النقطة ل بالصورة

$]ل - \varepsilon، ل + \varepsilon[$ ، $\forall د > م \in ط^* \Leftarrow ل + \varepsilon > د > ل - \varepsilon$ أو بالصورة المكافئة :

$د > م \Leftarrow |ح_د - ل| < \langle \varepsilon، \varepsilon \rangle$. يُعبر عنها بالصورة $\lim_{د \to \infty} ح_د = ل$

أما في حالة إذا كان الحد العام للمتتالية $\langle ح_د \rangle$ بالصورة الأسية : $ا^{د}$، $د \in ط^*$ ، $ا \neq 1$
أو الجذرية بالصورة: $\sqrt{د}$ أو بصورة دالة القوى أو مضاعفاتها أو لاتتبع قاعدة معينة ولا تسعى إلى نهاية محددة. فإن المتتالية ليس لها نهاية ، ذلك لأن حدودها لا تقترب من عدد معين عندما $د \to \infty$ ، عندئذ يقال إن المتتالية متباعدة نحو ∞ ، ويُعبَّر عنها رمزياً بالصورة: $\lim_{د \to \infty} ح_د = \infty$.

في البند (٥–٢) تناول نهاية الدوال الحقيقية عند نقطة ا وذلك لدراسة سلوك الدالة عندما تقترب من العدد (ل) دون أن تساويها عندما $س > ا$ بقيم تتناقص ، بحيث تقترب من العدد ا من جهة اليمين، أو $س < ا$ بقيم تتزايد، بحيث تقترب من العدد ا من جهة اليسار ، وبقيمة أصغر منه ، وفقاً لمتتالية على الصورة $(ا + \frac{1}{10^{د}})$ عندما $س \to ا^{+}$ ، وبالصورة $(ا - \frac{1}{10^{د}})$ عندما $س \to ا^{-}$ ، لها النهاية ا ،

وما يناظرها من قيم د(س) التي تقترب من (ل) وفقاً لمتتاليات مناظرة على الصورة $(\text{ل} - \frac{1}{10}\text{د})$ عندما د(س) ← ل$^{+}$ ، وبالصورة $(\text{ل} + \frac{1}{10}\text{د})$ عندما د(س) ← ل$^{-}$ الأمر الذي يوضّح إمكانية التحكّم بالقيمة المطلقة للفرق $|\text{د(س)} - \text{ل}|$ بتصغيره صغراً كافياً كما نريد، اعتماداً على الفرق المطلق $|\text{س} - \text{ا}|$ الذي يتوقف اختياره على الفرق المطلق $|\text{د(س)} - \text{ل}| < \varepsilon$ ؛ عندئذٍ يقال أن د(س) ← ل عندما س ← ا إذا تحققت الشروط التالية :

$\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، ل $\in$ ح اذا كان :

١ - $|\text{د(س)} - \text{ل}| < \varepsilon$ أصغر من أي عدد اختياري موجب (ε) ، أي أن :

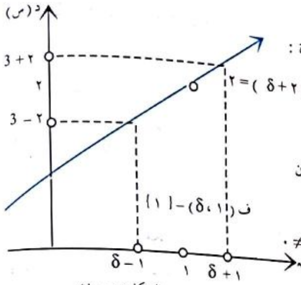
٢ - $|\text{س} - \text{ا}| < \delta$ والذي يتوقف قيمته على اختيار ε

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: بحيث أن : $|\text{د(س)} - \text{ل}| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |\text{س} - \text{ا}| < \delta$

وكانت س $= \text{ا} + \delta$ عندما س ← ا فإن $\delta \to 0$.

وبصورة عامة إذا كانت $\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، لتكافئ $\lim_{\delta \to 0} \text{د}(\text{ا} + \delta) = \text{ل}$

ولتوضيح حالة التكافؤ مابين $\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \text{د(س)} = \text{ل}$ ، $\lim_{\delta \to 0} \text{د}(\text{ا} + \delta) = \text{ل}$ نضع أمام المعلم المثال التوضيحي التالي :



الشكل (٥ - ١)

عندما $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ ، س = ١ + δ تكون بالصورة :

$\lim_{\delta \to 0} \frac{(1+\delta)^2 - 1}{(1+\delta) - 1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} (2 + \delta) = 2$

[أنظر الشكل (٥-١) لبيان الدالة المعطاة] لذلك

فإن إثبات أن $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} = 2$ يكافئ إثبات أن

$\lim_{\delta \to 0} (2 + \delta) = 2$ ذلك لأن

$|(2 + \delta) - 2| < \varepsilon \Leftarrow |\delta| < \varepsilon$ ، $\delta \neq 0$ ،

$\therefore |(2 + \delta) - 2| < \varepsilon$ ، $\forall\ 0 < |\delta| < \varepsilon$

أي أن : $\lim_{\delta \to 0} (2 + \delta) = 2 \Leftrightarrow \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} = 2$

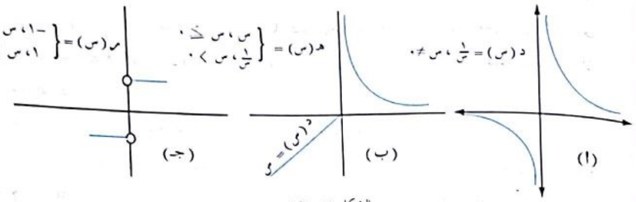
وهنا يجب التأكيد على أنه في حالة إذا كانت لدينا $\lim_{\text{س} \to \text{ا}^{+}} \text{د(س)} = \text{ل}_1$ ، $\lim_{\text{س} \to \text{ا}^{-}} = \text{ل}_2$ فإنه يمكن الاستنتاج إن د(س) ← ل عندما س ← ا في حالة تحقيق الشروط الثلاثة التالية:

الأول: وجود النهاية اليمنى ل$_1$ ، عندما س ← ا$^{+}$ ،

الثاني: وجود النهاية اليسرى ل$_2$ ، عندما س ← ا$^{-}$ ،

الثالث: أن تكون ل$_1$ = ل$_2$ ، فيما عدا ذلك لا وجود للنهاية .

على النحو الموضح في الشكل (٥-٢)، بفروعه الثلاثة (ا ، ب ، جـ) لانتفاء شرط أو أكثر من الشروط الثلاثة السابقة:



الشكل (٥ - ٢)

ذلك لأن في الشكل (ا) $\lim_{\text{س} \to 0^{-}} \text{د(س)}$ ، $\lim_{\text{س} \to 0^{+}} \text{د(س)}$ غير موجودة ،

وفي الشكل (ب) $\lim_{\text{س} \to 0^{-}} \text{هـ(س)} = 0$ ، $\lim_{\text{س} \to 0^{+}} \text{هـ(س)}$ غير موجودة ،

وفي الشكل (جـ) $\lim_{\text{س} \to 0^{-}} \text{ر(س)} \neq \lim_{\text{س} \to 0^{+}} \text{ر(س)}$

أما في حالة الدوال الكسرية لأسس صحيحة أو كسرية نجد أن :

$\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{ا}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{(\text{ا}+\delta)^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\delta} = \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}$ ، س = ا + δ ، δ = (ا + δ) − ا

$\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{ن}-\text{م}}$ ، $\forall$ ن ، م $\in$ ح ، م $\neq 0$.

وتاتي حالة عدم التعيين لنهاية دالة كثيرة الحدود ، عندما تساوي صفراً، ما يشير إلى أن (س−ا) عامل من عوامل كثيرة الحدود ، عندئذٍ يمكن إيجاد بقية العوامل من خلال قسمة كثيرة الحدود على العامل (س−ا) والاستفادة من هذه الخاصية عندما تكون نتيجة التعويض المباشر في بسط الدالة الكسرية ومقامها

$= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

كما نؤكد على أهمية تفهّم معاني ودلالة الاتصال عند نقطة فيما إذا تحقّقت الشروط التالية:

١ - د(س) معرفة عن س = ا

٢ - د(س) لها نهاية عند س = ا

٣ - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}} \text{د(س)} = \text{د(ا)}$

ذلك بما يسهل تناول مفهوم الاشتقاق للدوال الحقيقية عند نقطة، أو على فترة في هذا الجزء من الوحدة.

المفاهيم الرئيسة لتدريس الوحدة

١) إذا كانت د: $\text{س} \leftarrow \text{ص}$ دالة حقيقية، $\forall$ س، ص $\in$ ح عندئذ يسمّى المتغير س بالمتغير المستقل، ص بالمتغير التابع، ويعرف مدى الدالة بالمجموعة {ص $\in$ ص: ص = د (س)، س $\in$ س}.

٢) **الدالة الثابتة**: د(س) = ا ، $\forall$ س $\in$ ح ، ا عدد حقيقي ثابت لجميع قيم س ، مجالها = ح ومداها = {ا}.

٣) **دالة التطابق**: قاعدتها د(س) = س ، $\forall$ س $\in$ ح ، مجالها = ح ، ومداها = ح فيما عدا إذا عُرّفت على مجموعة جزئية من ح.

٤) **دالة الدرجة الأولى**: قاعدتها د(س) = ا س + ب ، $\forall$ س $\in$ ح ، ا، ب ثوابت من ح ، ا $\neq$ صفراً ، مجالها = ح ، ومداها = ح ، ويمثلها هندسياً خط مستقيم.

٥) **دالة الدرجة الثانية**: قاعدتها د(س) = ا س^2 + ب س + جـ ، $\forall$ س $\in$ ح ، ا ، ب ، جـ ثوابت من ح ، ا $\neq$ صفراً ، مجالها = ح ، ومداها = ح

٦) **دالة كثيرة الحدود**: د : ح $\leftarrow$ ح ، $\forall$ س $\in$ ح ، د(س) = $\text{ا}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \ldots + \text{ا}_2\text{س}^2 + \text{ا}_1\text{س} + \text{ا}_0$ من الدرجة ن ، ن $\in$ ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) ، $\text{ا}_{\text{ن}} \in \text{ح}^*$ ، $\text{ا}_{\text{ن}-1}$ ، $\text{ا}_{\text{ن}-2}$ ، ..... ، ا_0 $\in$ ح

٧) **الدالة الجذرية**: إذا كانت د (س) = $\sqrt{\text{هـ (س)}}$ فإن شرط تعريف الدالة هو هـ (س) $\geq$ ٠ الأمر الذي يوضّح أهمية تفهم إشارة المقدار الجبري بداخل الجذر والتأكيد عليها أثناء دراسة سلوك الدوال.

٨) **الدالة الكسرية**: قاعدتها : د (س) = $\frac{\text{ر (س)}}{\text{هـ (س)}}$ $\forall$ ، هـ(س) $\neq$ ٠ .

٩) **الدالة الأسية**: قاعدتها : د (س) = $\text{ا}^{\text{س}}$ ، س $\in$ ح ، ا $\in$ ح $-$ {٠، ١} ومداها = ح^+ أي أن د : ح $\leftarrow \text{ح}^+$

١٠) **الدالة اللوغاريتمية**: - د : $\text{ح}^+ \leftarrow$ ح ، د(س) = $\text{لو}_{\text{ا}}$ س ، ا $\in$ ح $-$ {٠، ١}

الرموز والمصطلحات لمحتوى الوحدة

- يُرمز لدليل الفترة المفتوحة بالرمز (ف) مركزها ا ، $\forall$ ا $\in$ ح والعدد δ (ويُقرأ دلتا)، لأي عدد اختياري يمثل نصف قطر الفترة على الصورة: ف (ا ، δ) =] ا $-$ δ ، ا + δ [لجوار النقطة ا
- باستبعاد مركز الفترة ا من الجوار ف (ا ، δ) نحصل على الفترة المفتوحة بالجوار المحذوف للنقطة (ا) مركز الفترة بالصورة: ف (ا، δ) $-$ {ا} =] ا $-$ δ ، ا [$\cup$] ا ، ا + δ [، عند ئذ تسمّى الفترة] δ ، δ [جواراً للعدد ا] δ ، δ [، [$-$ {ا} جواراً محذوفا للعدد ا ،] ا ، δ] جواراً أيسر ،] δ ، ا [جواراً أيسر محذوفا للعدد ا ، [ا ، δ [جواراً أيمن ،] ا ، δ [جواراً أيمن محذوف للعدد ا .

- رمز المتتالية < $\text{ح}_{\text{ن}}$ > ، ن $\leftarrow \infty$ عندما تؤول ن إلى اللانهاية.
- عندما تؤول س إلى ا من الجهة اليسرى: س $\leftarrow \text{ا}^-$
- عندما تؤول س إلى ا من الجهة اليمنى: س $\leftarrow \text{ا}^+$
- عندما تؤول س إلى ا : س $\leftarrow$ ا
- نهاية الدالة د(س) عندما تؤول س إلى ا من الجهة اليمني ، $\lim_{\text{س} \to \text{ا}^+}$ د (س) ومن الجهة اليسرى $\lim_{\text{س} \to \text{ا}^-}$ د(س) ، وعندما س $\leftarrow$ ا فإن نهاية الدالة تكون بالصورة $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س)
- نهاية الدالة د (س) عندما س $\leftarrow \infty$ ، س $\leftarrow -\infty$ بالصورة $\lim_{\text{س} \to \infty}$ د(س) ، $\lim_{\text{س} \to -\infty}$ د (س)
- تزايد الدالة إلى ما لانهاية : $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س) = ∞ ، وتناقصها إلى سالب مالا نهاية بالصورة : $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س) = $-\infty$
- حالات عدم التعيين : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، ٠ $\times \pm\infty$
- Δ س معدل التغير ، ص = د'(س) = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ رمز المشتقة الأولى للدالة .

حقائق وتعميمات

- إذا كانت د(س) = ل هي الدالة الثابتة، فإن: $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س) = ل
- إذا كانت $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س) = ل_1 ، $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ ر (س) = ل_2 فإن :
  - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ [د(س) $\pm$ ر(س)] = $\text{ل}_1 \pm \text{ل}_2$ ،
  - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ [د(س) . ر(س)] = $\text{ل}_1 \cdot \text{ل}_2$ ،
  - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ = $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$ ، ر (س) $\neq$ ٠ ،
- إذا كان ل $\geq$ ٠ ، وكانت د (س) $\geq$ ٠ لقيم س القريبة من ا ، فإن :
  - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ $\sqrt{\text{د (س)}}$ = $\sqrt{\text{ل}}$
- $\lim_{\text{س} \to \text{م}}$ ($\text{ا}_{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{س}^{\text{ن}-1} + \ldots + \text{ا}_1\text{س} + \text{ا}_0$) = $\text{ا}_{\text{ن}}\text{م}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{م}^{\text{ن}-1} + \ldots + \text{ا}_1\text{م} + \text{ا}_0$
  - $\lim_{\text{س} \to \infty}$ $\frac{1}{\text{س}}$ = صفراً = $\lim_{\text{س} \to -\infty}$ $\frac{1}{\text{س}}$.
- إذا كان : $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د(س) = $\pm \infty$ فإن $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د (س) غير موجودة
- إذا كان : $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د(س) = $\pm \infty$ ب $\in$ ح فان :
  - $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ [د(س) $\pm$ ب] = $\pm \infty$

- $\lim\limits_{\text{س}\to \text{ا}} \text{ب} \cdot \text{د}(\text{س}) = \pm\infty$ ، ب $\in$ ح$^{+}$ أو $\mp\infty$ عندما ب $\in$ ح$^{-}$

- إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{ا}_{\text{د}}\,\text{س}^{\text{د}} + \text{ا}_{\text{د}-1}\,\text{س}^{\text{د}-1} + \dots + \text{ا}_1\,\text{س} + \text{ا}_0$ ،

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ب}_{\text{م}}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ب}_{\text{م}-1}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \dots + \text{ب}_1\,\text{س} + \text{ب}_0$ فإن :

- $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\text{ا}_{\text{د}}}{\text{ب}_{\text{م}}}$ عندما م = د

$= $ صفراً عندما : م > د

$= \infty$ عندما : م < د ، ا$_{\text{د}} \in$ ح$^{+}$

$= -\infty$ عندما : م < د ، ا$_{\text{د}} \in$ ح$^{-}$

- الدالة الثابتة متصلة على أي فترة مغلقة في مجالها.
- دالة كثيرة الحدود متصلة على أي فترة مغلقة في مجالها.
- مجموع دالتين متصلتين والفرق بينهما هو دالة متصلة.
- حاصل ضرب دالتين متصلتين هو دالة متصلة.
- قسمة دالتين متصلتين فيهما دالة المقام لا تساوي (صفراً) خلال فترة الاتصال ، هو دالة متصلة.
- إذا كانت د(س) دالة متصلة على الفترة [ب ، جـ] وغير سالبة خلال هذه الفترة ، فإن $\sqrt{\text{د}(\text{س})}$ هي أيضاً دالة متصلة على هذه الفترة.
- إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند النقطة ا ، فإن الدالة تكون متصلة عند هذه النقطة والعكس غير صحيح.
- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، جـ $\in$ ح فإن : $\text{د}'(\text{س}) = 0$ ، $\forall$ س $\in$ ح
- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}$ فإن: $\text{د}'(\text{س}) = 1$ ، $\forall$ س $\in$ ح
- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\text{د}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{د}\ \text{س}^{\text{د}-1}$
- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{جـ} \cdot \text{ق}(\text{س})$ ، جـ $\in$ ح فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{جـ} \cdot \text{ق}'(\text{س})$

- $[\,\text{ق}(\text{س}) \pm \text{ك}(\text{س})\,]' = \text{ق}'(\text{س}) \pm \text{ك}'(\text{س})$

- $[\,\text{ق}(\text{س}) \cdot \text{ر}(\text{س})\,]' = \text{ق}'(\text{س})\ \text{ر}(\text{س}) + \text{ر}'(\text{س})\ \text{ق}(\text{س})$

- $\left(\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}\right)' = \dfrac{\text{ر}(\text{س}) \cdot \text{ق}'(\text{س}) - \text{ر}'(\text{س})\ \text{ق}(\text{س})}{[\,\text{ر}(\text{س})\,]^2}$

حيث $\text{ر}(\text{س}) \neq 0$

الأخطاء الشائعة

هناك أخطاء محتملة غالبًا ما يرتكبها الطلبة وينبغي تلافيها من خلال استخدام الأمثلة واللا أمثلة والأشكال، ومن أهمها:

- عدم وضوح الفرق بين مفهوم نهاية الدالة وقيمتها.
- عدم وضوح الفرق بين المتغير المتقطع د $\in$ ط* في المتتاليات، والمتغير المستمر س $\in$ ح في الدوال الحقيقية.
- إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to\text{ا}} \text{د}(\text{س}) = \pm\infty$ فهذا لا يعني أن النهاية موجودة وتساوي ($\pm\infty$)، وإنما هو اصطلاح للتعبير عن عدم وجود قيمة محددة كبيرة جداً أو صغيرة جداً، أو أنها غير موجودة في حالة إيجاد قيمة الدالة.
- الخلط بين حالة عدم التعيين للنهايات بالصورة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ يتم عادةً عن إغفال شرط أن نهاية دالة المقام يجب ألا تساوي صفراً. وبالمثل الحالة $\frac{\infty}{\infty}$ تنشأ من خطأ . التطبيق لخاصية نهاية قسمة دالتين ، مع أن نهايتي البسط والمقام غير موجودتين في الأصل.
- عدم إدراك الطالب لطبيعة الصلة الوثيقة بين الاتصال والاشتقاق للدوال عند نقطة معينة ، ومدى صحة عكس هذه العلاقة.

توجيهات طرائقية عامة

١- لتوضيح خاصية تقارب حدود المتتاليات من بعضها ، واقترابها من قيمة معينة ضمن فترة مفتوحة ينبغي استخدام التمثيل الهندسي على خط الأعداد ، خاصة لتلك المتتاليات المتقاربة التي قد لا تظهر بوضوح بالصيغة الجبرية، ذلك تمهيداً لدراسة الجوار كفترة مفتوحة من جهتيه اليمنى واليسرى.

٢- يمهد لموضوع نهاية الدوال الحقيقية بمراجعة لمفهوم الدالة وأمثلة على بعض الدوال المشهورة ورسم منحنياتها.

٣- يركز المعلم قدر الإمكان في تناوله لنهاية الدالة عند نقطة، على الجداول الحسابية، والاستعانة بالصور الهندسية لتوضيح عملية اقتراب النهاية من عدد معين.

٤- عداد أمثلة توضيحية إضافية، إذا تيسَّر للمعلم الوقت، لتناول الدوال الكسرية التي يقترب فيها المقام من الصفر.

٥- التأكيد عند حساب $\lim\limits_{\text{س}\to\text{ا}} \text{د}(\text{س})$. فإن س $\neq$ ا مطلقاً، وأن تكون د(س) معرّفة لجميع القيم عن يمين ويسار العدد (ا).

٦- عند عرض خواص النهايات ينبغي تقديم أمثلة تطبيقية عليها للاستقراء.

٧- تدريب الطلاب على الحكم بوجود النهاية عند نقطة من عدمه بمجرد النظر إلى منحنى الدالة، فإذا كان المنحنى متصلاً عند هذه النقطة فالنهاية موجودة ، مع العلم أن إيجاد نهاية دالة لا يعتمد على تعريف الدالة عند هذه النقطة.

٨- قبل الشروع في دراسة نهاية، الدالة على المعلم التأكد من مدى استيعاب الطلاب، لمعاني ودلالة الرموز ←، $\pm\infty$، δ، ε، $ا^{+}$، $ا^{-}$، ∞، $-\infty$.

٩- التأكيد على أن العبارة: نهـا (س ← ا) د (س) = $\pm\infty$ لا تعني أن النهاية موجودة وتساوي $\pm\infty$ وإنما اصطلاح للتعريف بأن النهاية غير موجودة، وأن الدالة تتزايد أو تتناقص بلا حدود. عند ما س ← ا أو س ← ∞.

١٠- عند دراسة حالات عدم التعيين يجب التاكيد على أن هذه الحالات تنشأ من التطبيق الخاطئ لخواص النهايات.

١١- عند تدريس الاتصال يجب التاكيد على أن تكون الدالة معرّفة عند ا، أو أن تكون نهـا (س ← ا) د (س) = د (ا).

١٢- لفت أنظار الطلاب إلى التشابه الكبير بين خواص النهايات وخواص الاتصال، ذلك لأن مفهوم الاتصال يعتمد اعتماداً كبيراً على مفهوم النهاية.

١٣- عند إيجاد: نهـا (س ← ا) د (س) لا يهمنا معرفة هل الدالة معرّفة عند ا أم لا ؟ وإذا كانت معرّفة عندها فلا تهمنا قيمة د(ا) بينما للتأكد من الاتصال يتوجب أن تكون الدالة معرّفة عند ا وأن تكون نهـا (س ← ا) د (س) = د (ا).

١٤- ضرورة الإشارة إلى تعريف النهاية بالطريقة المجردة باستخدام ε، δ؛ مع الالتزام بما عرض من أسلوب مبسّط.

١٥- التركيز على مسائل النهايات من النوع (احسب نهاية الدالة)، على اعتبار ذلك تطبيقًا مباشرًا لخواص النهايات.

١٦- الربط بين النهايات والاتصال والاستفادة من دراسة كل منهما في دراسة الآخر قدر الإمكان.

١٧- التمهيد للمشتقة من خلال تناول متوسط التغير (ميل القاطع)، ومعدل التغير (ميل المماس).

١٨- الحرص على دقة التعبير حيث يقال دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة، أو دالة قابلة للاشتقاق على فترة.

١٩- عند التعامل مع دالة ثنائية القاعدة، يلزم التنبيه إلى أن تساوي مشتقاتهما من اليمين واليسار يعني وجود المشتقة.

مهارات وخوارزميات

- حساب نهاية متتالية باستخدام الجداول مع الاستعانة بالرسم، وتعريف النهاية، عندما ن ← ∞.
- حساب النهايات من اليمين واليسار، وعند نقطة انقطاع منحنى الدالة.
- استخدام خواص النهايات في إيجاد نهاية الدوال جبرياً.
- حساب نهاية الدوال الكسرية، والجذرية عندما س ← $\pm\infty$.
- إيجاد: نهـا (س ← $\pm\infty$) د(س) / $\sqrt{\text{ر(س)}}$ بضرب البسط والمقام في مرافق المقام.
- إيجاد: نهـا (س ← ∞) د(س) / ر(س) بقسمة بسط الدالة الكسرية ومقامها على المتغير ذو الأس الأكبر لمتغير أي من الدالتين، أو التحليل والاختصار للمقادير.
- دراسة اتصال دالة عند نقطة في ضوء الشروط الثلاثة، لتحقيق خاصية الاتصال عند نقطة.
- تعيين نقاط الاتصال لدالة باستخدام الملاحظة المباشرة لمنحنى الدالة.

- إعادة تعريف دالة لتكون متصلة عند نقطة.
- استخدام خواص الاتصال وتعريفاته في دراسة اتصال دالة عند نقطة وعلى فترة.
- إنشاء الجداول والأشكال لإيضاح نهاية الدوال ونقاط اتصالها.
- تعيين معدل التغير لدالة حقيقية.
- دراسة قابلية الدالة للاشتقاق.
- تعيين مشتقة دالة باستخدام تعريف النهاية للمشتقة.
- تعيين مشتقة دالة باستخدام القواعد الأساسية للاشتقاق.
- حساب قيمة المشتقة عند نقطة وعلى فترة.
- تعيين مشتقة دالة القوى. د (س) = $س^{ن}$، ن $\in$ ق، (ق هي مجموعة الأعداد النسبية)
- تعيين مشتقة المجموع الجبري لعدة دوال.
- تعيين مشتقة حاصل ضرب، ناتج قسمة دالتين أو أكثر.
- استخدام قواعد الاشتقاق في تطبيقات رياضية وفيزيائية.

تنمية أساليب التفكير من خلال:

- التعرّف على مفهوم نهاية متتالية عند اللانهاية وأهميته في دراسة سلوك المتتالية (تقاربية، تباعدية)، (منتهية، غير منتهية).
- التعرّف على مفهوم نهاية دالة عند نقطة، واللانهاية، وأهميته في دراسة سلوك الدالة.
- اتباع الأسلوب الأستقرائي في إيجاد قيمة النهايات.
- دراسة العمليات الجبرية على النهايات.
- دراسة سلوك الدوال الجبرية عندما يتزايد متغيرها أو يتناقص نحو اللانهاية.
- التعامل مع حالات عدم التعيين للنهايات.
- ربط مفهوم نهاية الدالة عند نقطة مع قيمة الدالة عند هذه النقطة في دراسة الاتصال.
- ربط مفهوم المتتالية مع مفهوم نهاية الدالة عند نقطة في دراسة النهايات.
- ربط الصورة الهندسية لمنحنى الدالة بالمفهوم الجبري للاتصال.
- ربط مفهوم المشتقة عند نقطة وعلى فترة بمفهوم النهاية والاتصال عند تلك النقطة أو الفترة.
- التعرف على مفهوم المشتقة عند نقطة وعلى فترة وأهميته في التعامل مع التطبيقات الهندسية والجبرية والفيزيائية.
- التعرف على القواعد الأساسية للاشتقاق وأهميتها في إيجاد مشتقة الدوال القابلة للاشتقاق.

٥ - ١ نهاية متتالية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يقرأ ويكتب الرموز المتضمنة في هذا البند.
- يتعرّف مفهوم الجوار لنقطة ما على فترة مفتوحة.
- يتعرّف مفهوم نهاية متتالية.
- يحسب نهاية متتالية بطريقة مباشرة، باستخدام التعريف والجداول والأشكال.
- يوجد نهاية متتالية باستخدام خواص المتتاليات.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الاولى: مفهوما الجوار ونهاية متتالية.

الحصة الثانية: أمثلة وتدريبات (٥–١)

الحصة الثالثة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم:

أوجد $\lim\limits_{\text{د} \to \infty} \dfrac{٢\text{د}+١}{٣\text{د}+٣}$ منتهية .

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ - ١)

[١] عدد الارتطامات بالأرض لتصل الكرة إلى ارتفاع (١,٣٣) متراً يساوي ٨ ارتطامات .

[٢] بقسمة بسط الكسر ومقامه على متغير أكبر أس في المتتالية، ليكون صيغة الحد العام للمتتالية بالصورة:

$$\lim_{\text{د} \to \infty} \frac{٢ + ٣(\frac{١}{\text{د}}) + ٤(\frac{١}{\text{د}^٢})}{١} = \frac{٢+٠+٠}{١} = ٢ .$$

[٣] $\text{د} = ٥٠٠$

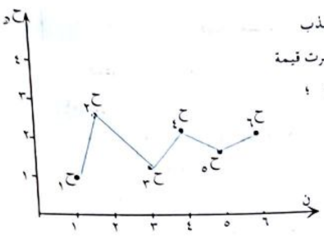
[٤] $\lim\limits_{\text{د} \to \infty} \dfrac{\text{د}+٢}{\text{د}+٣} = \lim\limits_{\text{د} \to \infty} \dfrac{١+٢(\frac{١}{\text{د}})}{١+٣(\frac{١}{\text{د}})} = \dfrac{١+٠}{١+٠} = ١ .$

[٥] $\varepsilon = ٠,٠٠١$ ، $\text{ن} > ٩٩٩$.

[٦] حدود المتتالية هي : $١ ، ٢\frac{١}{٢} ، ١\frac{٢}{٣} ، ٢\frac{١}{٤} ، ١\frac{٤}{٥} ، ٢\frac{١}{٦}$ ؛

عندما ن تأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .

عندئذ يلاحظ من الشكل (٥ – ٣) أن النقاط تتذبذب حول الخط المستقيم ص = ٢ ، وتقترب منه كلما كبرت قيمة د ، فأحياناً $ح_\text{د} < ٢$ ، وأحياناً تكون $ح_\text{د} > ٢$ ؛



الشكل (٥ – ٣)

فإذا كان الحد المطلق مثلاً :

$$|ح_\text{د} - ٢| < ٠,٢ \Leftarrow \text{د} > ٥$$

أي أن جميع حدود المتتالية بعد الحد الخامس تقع بين المستقيمين ص = ٢ – ٠,٠١ ، ص = ٢ + ٠,٠١

وإذا كانت $|ح_\text{د} - ٢| < ٠,٠١ \Leftarrow \text{د} > ١٠٠$

أي أن جميع حدود المتتالية بعد $ح_{١٠٠}$ تقع في المنطقة المحصورة بين المستقيمين ص = ٢ – ٠,٠١ ،ص = ٢ + ٠,٠١ . وهكذا . . .

وبصورة عامة إذا كان (ε) أي عدد اختياري لأصغر عدد حقيقي موجب فإن :

$|ح_\text{د} - ٢| < \varepsilon \Leftarrow \text{ن} > \text{ر}$ حيث $\text{ر} = \frac{١}{\varepsilon}$ عندئذ يُعبّر عنها جبرياً بالصورة :

$$\lim_{\text{د} \to \infty} \left(٢ + \frac{(-١)^\text{د}}{\text{د}}\right) = ٢ \Leftarrow \left|٢ + \frac{(-١)^\text{د}}{\text{د}} - ٢\right| < \varepsilon$$

$$\Leftarrow \left|\frac{(-١)^\text{د}}{\text{د}}\right| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{١}{\text{د}}\right| < \varepsilon \Leftarrow |\text{د}| > \frac{١}{\varepsilon}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{\varepsilon} < \text{د} < \frac{-١}{\varepsilon}$$

$\therefore \left|٢ + \frac{(-١)^\text{د}}{\text{د}} - ٢\right| < \varepsilon$ ، $\text{د} > \text{ر}$ حيث $\text{ر} = \frac{١}{\varepsilon}$ بذلك تكون المتتالية $\langle ح_\text{د} \rangle$ تقاربية ونهايتها بتذبذب محدود بجوار النقطة ٢ يعبّر عنه رمزياً بالصورة :

$$\lim_{\text{د} \to \infty} \left(٢ + \frac{(-١)^\text{د}}{\text{د}}\right) = ٢ .$$

[٧] : (أ) متقاربة ونهايتها = ٣

(ب) حدود المتتالية المعطاة : –١ ، ١ ، –١ ، ١ ، . . . أي أنها تأخذ القيمتين ١ ، –١ فهي غير متقاربة.

(جـ) متباعدة .

٥ - ٢ نهاية الدوال الحقيقية

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

- يقرأ ويكتب الرموز المتضمنة في هذا البند
- يتعرّف مفهوم نهاية الدوال الحقيقية عند نقطة، وعند اللانهاية .
- يحسب نهاية الدوال البسيطة بطريقة مباشرة باستخدام الجداول .
- يحسب نهاية الدوال باستخدام التعريف .
- يحسب نهاية الدوال باستخدام خواص النهايات .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مفهوم نهاية الدالة عندنقطة .

الحصة الثانية : مفهوم نهاية الدالة عند ما س $\leftarrow \infty$.

الحصة الثالثة : خواص النهايات، وحالات عدم التعيين .

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الخامسة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد نهاية الدالة د (س) = $\sqrt{\text{س} - ١} - ٢$ عندما س = ٥ .

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ – ٢)

[١] : (أ) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٣) = ٢$.

(ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(٢\text{س}^٢ + \text{س} - ١)^٢} = \infty$.

(جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{٢\text{س}^٢ + \text{س} + ١} = ٠$.

(د) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$ هنا يستلزم دراسة سلوك الدالة في حالتين هما :

١ – عندما (س – ١) $\geq$ ٠ لجميع قيم س المجاورة للواحد من اليمين، و عندئذٍ يكون :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١} = \sqrt{٠} = \text{صفراً}.$$

٢ – عندما (س – ١) > ٠ فإن جميع قيم س المجاورة للواحد من اليسار :

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$ (غير موجوذة) ذلك لان س – ١ > ٠ .

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$ (غير موجودة)

[٢] : (أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\sqrt{\text{س}} - ٢})}{(\cancel{\sqrt{\text{س}} - ٢})(\sqrt{\text{س}} + ٢)} = \dfrac{١}{٤}$

(ب) بوضع ص = ٢ س – ٥ $\Leftarrow \frac{١}{٢}$ (ص – ١) = س – ٣ ، أي انه عندما س $\leftarrow$ ٣ فإن ص $\leftarrow$ ١

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} - ٥)^٩ - ١}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{ص} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^٩ - ١}{\frac{١}{٢}(\text{ص} - ١)} ،$$

$$= ٢ \underset{\text{ص} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^٩ - ١}{\text{ص} - ١}$$

$$= ١٨$$

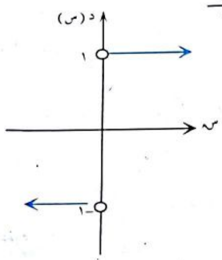
[٣] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ ، & \text{س} > ٠ \\ -١ ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ١$ ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = -١$ ؛

أي أن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) \neq \underset{\text{س} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة .



الشكل (٥ – ٤)

[٤] بالتعويض المباشر نجد أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}}{٢\text{س}} \right) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (حالة عدم التعيين) لذلك نضرب البسط والمقام في مرافق البسط فيكون:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}})(\sqrt{١ + \text{س}} + \sqrt{١ - \text{س}})}{٢\text{س}(\sqrt{١ + \text{س}} + \sqrt{١ - \text{س}})}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + \text{س} - (١ - \text{س})}{٢\text{س}(\sqrt{١ + \text{س}} + \sqrt{١ - \text{س}})}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

[٥] د(١) = ١٢,٠٧! < ٠٫٠ ، $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ د(س) = ٠

د(١) = ١٢ + ١,٠٧! > ٠٫٠ ، $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ د(س) = ١

∴ $\lim\limits_{س \to ١^-}$ د(س) ≠ $\lim\limits_{س \to ١^+}$ د(س)

أي أن النهاية غير موجودة وفق التعريف .

وهنا نكتفي بالإثبات عندما س < ٠

كما يلي :

|٢س – ٠| < 3 ⟸ ٢|س| < 3 ، س ≠ ٠

أي إذا كانت |س| < $\frac{3}{٢}$ ، س ≠ ٠ فإن

|٢س – ٠| < 3 لكل س بحيث أن: ٠ < |س| < δ ⟸ δ = $\frac{3}{٢}$

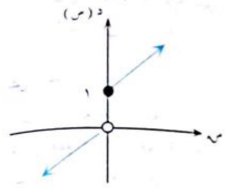
[٦] : (أ) $\lim\limits_{س \to \infty}$ ($\sqrt{س^٢ + س + ١}$ – $\sqrt{س^٢ – س + ١}$) = ١

(ب) $\lim\limits_{س \to \infty}$ $\frac{س + ٣}{س^٢ – ٩}$ = صفراً

(جـ) $\lim\limits_{س \to \infty}$ $\frac{٣ + ٢س – س^٢}{٥ + ٣س – ٢س^٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(د) $\lim\limits_{س \to ٤}$ $\frac{٧}{(٤ – س)^٢}$ = ∞

[٧] $\lim\limits_{س \to ١}$ $\frac{١}{|س – ١|}$ = ∞



الشكل (٥ – ٥)

٥ – ٣ الاتصـال

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

- يعرف مفهوم الإتصال .
- يعرّف الاتصال عند نقطة .
- يعرّف الاتصال على فترة .
- يبحث اتصال دالة عند نقطة .
- يذكر شروط اتصال دالة عند نقطة .
- يطبق مفهوم الاتصال عند نقطة في دراسة الاتصال على فترة .

- يبحث اتصال دالة على فترة .
- يذكر مجال اتصال الدالة الثابتة ودالة كثيرة الحدود .
- يطبق خواص الاتصال في دراسة اتصال دالة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مفهوم الاتصال عند نقطة من اليمين واليسار .

الحصة الثانية: مفهوم الاتصال على فترة ، وخواص الاتصال .

الحصتان الثالثة والرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

لتكن الدالة :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ – ١٦}{س – ٤} ، & \forall س \ne ٤ \\ ل ، & \forall س = ٤ \end{cases}$$

وبفرض أن الدالة مستمرة أوجد قيمة ل .

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ – ١)

[١] |د(س)| = $\begin{cases} ١ – س ، & س < ١ \\ صفر ، & س = ١ \\ س – ١ ، & س > ١ \end{cases}$

∵ د(١) = صفراً ،

∴ الدالة معرّفة عند س = ١ ...(١)

∵ $\lim\limits_{س \to ١^-}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ١^-}$ (١ – س) = ٠

$\lim\limits_{س \to ١^+}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ١^+}$ (س – ١) = ٠ ،

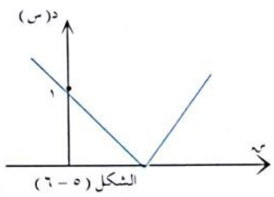
∴ $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) = ٠ ،

الدالة لها نهاية عند س = ١ ...(٢)

∴ $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) = د(١) = ٠ ...(٣)

ومن (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن د(س) = |س – ١| متصلة عند س = ١

على النحو الموضّح في الشكل (٥ – ٦) .



الشكل (٥ – ٦)

[٢] $ر(١) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^-} ر(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ١^+} ر(س) = ١$ ،

∴ $\lim_{س \to ١} ر(س) = ١$ ، ∴ الدالة متصلة عند س = ١ .

[٣] $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - س - ١٢}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٣)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٣) = ٧$.

[٤] ه معرّفة بشرط أن $٤ - س^٢ \geq ٠ \Leftrightarrow س^٢ \leq ٤ \Leftrightarrow |س| \leq ٢$

$\Leftrightarrow -٢ \leq س \leq ٢ \Leftarrow$ مجال ه هو [−٢ ، ٢].

ولبحث اتصال الدالة على الفترة [−٢ ، ٢] ،

– نبحث اتصال ه في]−٢، ٢[من اليمين عند س = −٢، واليسار عند س = ٢ بفرض أن $أ \in]-٢ ، ٢[$.

∴ $\lim_{س \to أ} ه(س) = \lim_{س \to أ} \sqrt{٤ - س^٢} = \sqrt{٤ - أ^٢} = ه(أ)$

∴ $\lim_{س \to أ} ه(س) = ه(أ) \Leftarrow$ ه متصلة في]−٢ ، ٢[$\quad\quad$ ...(١)

– $\lim_{س \to -٢^+} ه(س) = \lim_{س \to -٢^+} \sqrt{٤ - س^٢}$ = صفراً ، ه(−٢) = صفراً .

∴ $\lim_{س \to -٢^+} ه(س) = ه(-٢) \Leftarrow$ ه متصلة على يمين س = −٢ $\quad\quad$ ...(٢)

– $\lim_{س \to ٢^-} ه(س)$ = صفراً ، ه(٢) = صفراً .

∴ $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ه(٢) \Leftarrow$ ه متصلة على يسار س = ٢ $\quad\quad$ ...(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن ه متصلة في الفترة [−٢ ، ٢] .

[٥] : (أ) $ر(أ) = أ + ١ ، \forall أ < ٢$ ، $\lim_{س \to أ} ر(س) = أ + ١ ، \forall أ < ٢$

∴ الدالة متصلة على الفترة]−∞ ، ٢[$\quad\quad$ ...(١)

$ر(أ) = أ + ٢ ، \forall أ > ٢$ ،

$\lim_{س \to أ} ر(س) = أ + ٢ ، \forall أ > ٢$.

∴ الدالة متصلة على الفترة]٢ ، ∞[$\quad\quad$ ...(٢)

أما عند س = ٢ فإن : $\lim_{س \to ٢^+} ر(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ر(س) = ٣$

أي أن : $\lim_{س \to ٢^+} (س + ٢) \neq \lim_{س \to ٢^-} (س + ١)$

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٢ ، ومن (١) ، (٢) يُلاحظ أن الدالة متصلة على ح − {٢}.

(ب) م . ت =]−∞ ، −٥[∪]−٥ ، ١[∪]١ ، ∞[

بفرض أن $أ \in]-\infty ، -٥[$ ، نجد أن $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$ ،

الدالة متصلة $\forall س \in]-\infty ، -٥[$ ، وبالمثل الدالة متصلة على كل من الفترات

]−٥ ، ١[،]١ ، ∞[، ∴ الدالة متصلة $\forall س \in]-\infty ، -٥[\cup]-٥ ، ١[\cup]١ ، \infty[$

(جـ) بالطريقة نفسها المتبعة في الفقرة (ب) من التمرين (٥) .

[٦] بالطريقة نفسها المتبعة في حل التمرين [٣] .

[٧] لإعادة التعريف $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}{\cancel{س - ١}} = ٣$ ، ∴ للدالة نهاية .

وبما أن الدالة غير معرفة عند س = ١ ولها نهاية يمكن إعادة التعريف كما يلي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} & \text{عند } س \neq ١ \\ ٣ & \text{عند } س = ١ \end{cases}$$

[٨] $\lim_{س \to -١} د(س) = \lim_{س \to -١} \sqrt{س^٤ + ١} = \sqrt{٢}$ ،

$د(-١) = \sqrt{(-١)^٤ + ١} = \sqrt{٢}$ ، ∴ د(س) متصلة عند س = −١ .

[٩] $د(هـ(س)) = د(س^٢ - ١) = ٥ - ٣ س^٢$ (كثيرة حدود) ،

وهي متصلة لجميع قيم س وبالتالي متصلة عند س = صفراً .

٥ – ٤ معدل تغيّر الدالة

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

– يتعرّف مفهوم تغير الدالة .
– يحسب قيمة متغير الدالة .
– يتعرّف مفهوم متوسط تغير الدالة .
– يتعرّف معاني ودلالة الرموز . $\Delta س$ ، $\Delta ص$ ، $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$.
– يوجد متوسط تغيرالدالة .
– يوجد معدل تغير الدالة .
– يحل مسائل تطبيقية فيزيائية .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مفهوم معدّل تغير الدالة ومفهوم متوسط التغير هندسياً وجبرياً .

الحصتان الثانية والثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد دالة التغير ومتوسط التغير عند س = س،

للدالة : د : س ⟵ ٢ س + ١، عند س = ٢ ثم عند س = −١

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ − ٤)

[١] متوسط التغير $= \frac{\text{د}(\text{س}_٢) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{د}(٢) - \text{د}(٠)}{٢ - ٠} = \frac{١٣ + ١}{٢} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

[٢] (أ) متوسط التغير $= \frac{\text{د}(\text{س}_٢) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{(٣\text{س}_٢ + ٥) - (٣\text{س}_١ + ٥)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \frac{(٣ \times ٤ + ٥) - (٣ \times ٢ + ٥)}{٤ - ٢} = \frac{١٧ - ١١}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$.

(ب) متوسط التغير $= \frac{\text{د}(٦) - \text{د}(٣)}{٦ - ٣} = \frac{٢٣ - ١٤}{٣} = ٣$.

[٣] السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية تساوي $= \frac{\text{د}(٣) - \text{د}(١)}{٣ - ١} = \frac{١٥ - ٧}{٢} = ٤$ م / ث .

[٤] $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$.

وباعتبار أن $\text{س}_١ = ٣$ ، $\text{س}_٢ = ٤,٥$ ، $\text{هـ} = \text{س}_٢ - \text{س}_١ = ٤,٥ - ٣ = ١,٥$ ، وأن

$\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١) = \sqrt{(٣ + ١,٥ - ٢)} - \sqrt{٣ - ٢}$

$= \sqrt{٤,٥ - ٢} - \sqrt{١} = \sqrt{٢,٥} - ١ \approx ١,٦ - ١ = ٠,٦$.

[٥] مساحة المربع = طول الضلع × نفسه = $\text{ل}^٢$

متوسط التغير $= \frac{\text{د}(١٠,١) - \text{د}(١٠)}{١٠,١ - ١٠} = \frac{\text{ل}_٢^٢ - \text{ل}_١^٢}{٠,١} = \frac{١٠٢,٠١ - ١٠٠}{٠,١}$

$= \frac{٢,٠١}{٠,١} = \frac{٢٠١}{١٠} = ٢٠,١$ سم^٢

معدل التغير عندما يكون طول الضلع ٢٠ سم $= \frac{\text{د}(٢٠,٢) - \text{د}(٢٠)}{٢٠,٢ - ٢٠} = \frac{٨,٠٤}{٠,٢} = ٤٠,٢$ سم^٢

[٦] مساحة الدائرة (مساحة الصفيحة) = ط نق^٢ ، ثم يكمل الحل كما في التمرين رقم (٥) السابق .

[٧] (أ) $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{س}_١ + \text{هـ})^٢ - (\text{س}_١ + \text{هـ}) + ١ - (\text{س}_١^٢ - \text{س}_١ + ١)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٢+٢)^٢ - (٢+٢) + ١ - (٢^٢ - ٢ + ١)}{٢} = \frac{١٦ - ٤ + ١ - ٣}{٢}$

$= \frac{١٠}{٢} = ٥$

(ب) تحل بنفس طريقة الفقرة (أ) .

(جـ) $\text{س}_١ = -١$ ، $\text{س}_٢ = ١$ ، $\text{هـ} = \text{س}_١ - \text{س}_٢ = -٢$

$\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt{(\text{س}_١ + \text{هـ}) + ٣} - \sqrt{\text{س}_١ + ٣}}{\text{هـ}}$

$= \frac{\sqrt{(١ - ٢) + ٣} - \sqrt{١ + ٣}}{-٢}$

$= \frac{\sqrt{٢} - ٢}{-٢} \approx \frac{١,٤ - ٢}{-٢} = ٠,٣$

(د) تُحل بطريقة (جـ) نفسها .

٥ − ٥ المشتقة

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

- يعرّف مشتقة الدالة د(س) عند نقطة، ويتعرف على رمزها دَ(س) .
- يميّز بين مدلول د(س) ، دَ(س).
- يتعرّف على التفسير الهندسي للمشتقة.
- يعيّن ميل المماس لمنحنى معلوم عند نقطة معلومة.
- يوجد معادلة المماس لمنحنى معلوم عند نقطة معلومة.
- يوجد معادلة العمودي لمنحنى معلوم عند نقطة معلومة.
- يحلّ مسائل وتطبيقات حياتية على السرعة.
- يتعرّف مدلول الرموز صَ ، دَ(س) ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : مفهوم المشتقة.

الحصة الثالثة : التفسير الهندسي للمشتقة.

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الخامسة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

إذا كانت الدالة د(س) زوجية وقابلة للاشتقاق ،

برهن أن المشتقة دَ(س) دالة فردية .

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ - ٥)

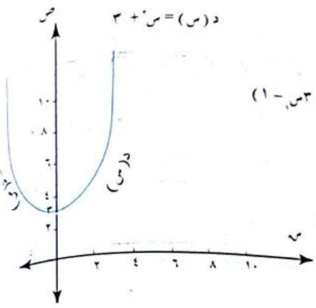
[١] أ) $\Delta \text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1 = 2$

ب) $\Delta \text{ص} = \text{ص}_2 - \text{ص}_1 = (3\text{س}_2 - 1) - (3\text{س}_1 - 1)$

$\Leftarrow \Delta \text{ص} = 6$

جـ) $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \dfrac{6}{2} = 3$

[٢] ١) الشكل المرسوم جانباً يمثل الدالة .



٢) متوسط تغيّر الدالة هو $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ عندما

يتغير س من ١ إلى ٣

هو $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{د}(3) - \text{د}(1)}{3 - 1} = \dfrac{12 - 4}{2} = 4$

٣) لإيجاد ميل القطعة اب ، يكون الميل $= \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\therefore \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{12 - 4}{2} = 4$.

[٣] أ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\text{س}_1 + \text{هـ} + 1} - \dfrac{1}{\text{س}_1 + 1}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{-\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{س}_1 + \text{هـ} + 1)(\text{س}_1 + 1)} = \dfrac{-1}{(\text{س}+1)(\text{س}+1)} = \dfrac{-1}{(\text{س}+1)^2}$

لإيجاد المشتقة عند س = ٢

$\therefore \text{د}'(2) = \dfrac{-1}{(2+1)^2} = \dfrac{-1}{9}$

ب) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{[(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 2] - (\text{س}_1^2 + 2)}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{هـ}(2\text{س}_1 + \text{هـ})}{\text{هـ}} = 2\text{س}$

جـ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} - \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} - \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}}{\text{هـ}} \times \dfrac{\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} + \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}}{\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} + \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}}$

وذلك بالضرب في مرافق البسط .

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1 - \text{س}_1^2 - 1}{\text{هـ}\left(\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} + \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}\right)} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{هـ}(2\text{س}_1 + \text{هـ})}{\text{هـ}\left(\sqrt{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 + 1} + \sqrt{\text{س}_1^2 + 1}\right)}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}}{2\sqrt{(\text{س}^2 + 1)}} = \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$

د) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ}}} - \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1}}}{\text{هـ}}$ بضرب البسط والمقام في مرافق البسط ، نجد أن :

$\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\text{س}_1 + \text{هـ}} - \dfrac{1}{\text{س}_1}}{\text{هـ}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ}}} + \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1}}\right]} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\dfrac{-\text{هـ}}{(\text{س}_1 + \text{هـ})(\text{س}_1)}}{\text{هـ}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ}}} + \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}_1}}\right]}$.

$= \dfrac{-1}{\text{س}^2\left[\dfrac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right]} = \dfrac{-1}{2\left[\dfrac{\sqrt{\text{س}^4}}{\sqrt{\text{س}}}\right]} = \dfrac{-1}{2\sqrt{\text{س}^3}}$

هـ) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{[(\text{س}_1 + \text{هـ}) - 1]^2 - (\text{س}_1 - 1)^2}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(\text{س}_1 + \text{هـ})^2 - 2(\text{س}_1 + \text{هـ}) + 1 - \text{س}_1^2 + 2\text{س}_1 - 1}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{هـ}(2\text{س}_1 - 2 + \text{هـ})}{\text{هـ}} = 2(\text{س}_1 - 1)$.

و) $\because$ الدالة معرّفة عند س = ٢ ، حيث $\text{د}(2) = 8 - 4 = 4$

ولذلك نبحث وجود المشتقة للدالة عندما س = ٢

المشتقة من الجهة اليمنى $= \text{د}'(\text{س}^+) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{[4(2 + \text{هـ}) - 4] - (8 - 4)}{\text{هـ}}$

$\text{د}'(\text{س}^+) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{8 + 4\text{هـ} - 4 - 8 + 4}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^+} \dfrac{4\text{هـ}}{\text{هـ}} = 4 \quad \ldots (1)$

ومن الجهة اليسرى $= \text{د}'(\text{س}^-) = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{(2 + \text{هـ})^2 - (2)^2}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} \dfrac{\text{هـ}(4 + \text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to 0^-} (4 + \text{هـ}) = 4 \quad \ldots (2)$

من (١) ، (٢) نستنتج أن $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{د}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{هـ}} = 4$

$\therefore$ فهي قابلة للاشتقاق عند س = ٢

ز) تحل كما في المثال المشابه

ح) $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[٢(\text{س}_١+\text{هـ})^٢ - ٣(\text{س}_١+\text{هـ})+٥] - [٢\text{س}_١^٢ - ٣\text{س}_١ + ٥]}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\text{س}_١\text{هـ} + ٢\text{هـ}^٢ - ٣\text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(٤\text{س}_١ + ٢\text{هـ} - ٣)}{\text{هـ}} = ٤\text{س} - ٣$

[٤] $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}(\text{س}_١+\text{هـ})+\text{ب} - (\text{أس}_١+\text{ب})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أهـ}}{\text{هـ}} = \text{أ}$

[٥] نقوم بإعادة ترتيب المسألة كما يلي :

$\text{د(س)} = ٦\text{س} + \begin{cases} ٤\text{س} - ٢ \text{ ، } \text{س} > \frac{١}{٢} \\ ٢ - ٤\text{س} \text{ ، } \text{س} < \frac{١}{٢} \end{cases}$

والآن نجد أولاً : المشتقة عند ما $\text{س} > \frac{١}{٢}$

$\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[١٠(\text{س}_١+\text{هـ})-٢] - (١٠\text{س}_١ - ٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١٠\text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (١٠) = ١٠$

ثانياً : نجد المشتقة عند ما $\text{س} < \frac{١}{٢}$

$\text{د(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ + ٢(\text{س}_١+\text{هـ}) - (٢ + ٢\text{س}_١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٢$

ثالثاً : نجد المشتقة عند ما $\text{س} = \frac{١}{٢}$

$\text{دَ(س}^+) = \text{دَ}(\frac{١}{٢}^+) = ١٠$ ، $\text{دَ(س}^-) = \text{دَ}(\frac{١}{٢}^-) = ٢$

$\therefore \text{دَ(س}^+) \neq \text{دَ(س}^-)$ ، $\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $\text{س} = \frac{١}{٢}$

[٦] أ) المسافة التي يقطعها الجسم بعد دقيقتين $= ٢ \times (٢)^٢ - ٢ = ٨ - ٢ = ٦$ متر ، ب) ٣ م / ث

جـ) $\dfrac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[٢(\text{ن}_١+\text{هـ})^٢ - (\text{ن}_١+\text{هـ})] - [٢\text{ن}_١^٢ - \text{ن}_١]}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(٤\text{ن}_١ + ٢\text{هـ} - ١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٤\text{ن}_١ + ٢\text{هـ} - ١) = ٤\text{ن} - ١$

$\therefore$ سرعة الجسم عند ما $\text{ن} = ٢$ هو $\dfrac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = ٤ \times ٢ - ١ = ٧$ متر / الدقيقة

وهي ما تعرف بالسرعة اللحظية عند ما $\text{ن} = ٢$

[٧] $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{(\text{س}_١+\text{هـ})} - \frac{١}{\text{س}_١}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{(\text{س}_١+\text{هـ})(\text{س}_١)} = \dfrac{-١}{\text{س}^٢}$ وهو ميل المماس للدالة

د (س) – أو المنحنى ص – ، $\therefore$ ميل المماس عند النقطة $\text{س} = ١$ هو $\text{دَ}(١) = \dfrac{-١}{(١)^٢} = -١$

[٨] $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}_١\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - \text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٢\text{س}_١ + \text{هـ} - ١) = ٢\text{س} - ١$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $\text{س} = ٠$ هو $\text{دَ}(٠) = -١$

وبالتالي معادلة المماس عند النقطة (٠ ، –١) هي :

$\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \text{دَ(س)} \Leftarrow \dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٠} = -١ \Leftarrow -\text{س} = \text{ص} - ١ \Leftarrow \text{ص} = -\text{س} + ١$

وميل العمودي عند النقطة $\text{س} = ٠$ هو (١)

$\therefore$ معادلة العمودي عند النقطة (٠ ، ١) هي : $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \dfrac{-١}{\text{دَ(س)}} \Leftarrow \dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٠} = ١ \Leftarrow \text{س} = \text{ص} - ١$

$\therefore \text{ص} = \text{س} + ١$

[٩] أ) $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[(\text{س}_١+\text{هـ})^٤ - (\text{س}_١+\text{هـ})^٢ + ١] - [\text{س}_١^٤ - \text{س}_١^٢ + ١]}{\text{هـ}}$ وبعد التبسيط نحصل على :

$\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٤\text{س}_١^٣ + ٦\text{س}_١^٢\text{هـ} + ٤\text{س}_١\text{هـ}^٢ + \text{هـ}^٣ - ٢\text{س}_١ - \text{هـ})$

$= ٤\text{س}^٣ - ٢\text{س}$ ، $\therefore \text{دَ}(-١) = -٤ + ٢ = -٢$

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة (–١ ، ٤) هي : $\dfrac{\text{ص} - ٤}{\text{س} + ١} = -٢$ ، ومنها ، $\text{ص} = -٢(\text{س} - ١)$ ،

معادلة العمودي عند النقطة (–١ ، ٤) هي : $\dfrac{\text{ص} - ٤}{\text{س} + ١} = \dfrac{-١}{-٢}$ ، ومنها ، $\text{ص} = \frac{١}{٢}(\text{س} + ٩)$.

ب) نكتب الدالة بالشكل $٢\text{س} - ٢\sqrt{٢}$ ، وبالتالي فإن :

$\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[٢(\text{س}_١+\text{هـ}) - ٢\sqrt{٢}] - (٢\text{س}_١ - ٢\sqrt{٢})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٢$.

معادلة المماس عند النقطة (٤ ، ٦) هي : $\dfrac{\text{ص} - ٦}{\text{س} - ٤} = ٢$ ، ومنها ، $\text{ص} = ٢(\text{س} - ١)$ ،

معادلة العمودي عند النقطة (٤ ، ٦) هي : $\dfrac{\text{ص} - ٦}{\text{س} - ٤} = \dfrac{-١}{-٢}$ ، ومنها $\text{ص} = \frac{١}{٢}(\text{س} + ٨)$.

جـ) $\text{دَ(س)} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{[١ - ((\text{س}_١+\text{هـ}) + ١)^٢] - [١ - (\text{س}_١ + ١)]^٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(٢\text{س}_١ + \text{هـ} + ٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (-٢\text{س}_١ - \text{هـ} - ٢) = -٢\text{س} - ٢$ ،

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $\text{س} = -١$ هو $\text{دَ}(-١) = ٠$

بالتعويض في الدالة عند ما $\text{س} = -١$ ، نحصل على $\text{ص} = ١$.

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة (– ١ ، ١) هي : $\dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} + ١} = ٠$ ، ومنها ، $\text{ص} = ١$.

وأن ميل العمودي عند النقطة $\text{س} = -١$ هو $\frac{١}{٠}$ وبالتالي تكون معادلة العمودي هي :

$\dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} + ١} = \dfrac{١}{٠} \Leftarrow \text{س} + ١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١$.

[١٠] $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{[4-(\text{س}_1+\text{هـ})^2]-(4-\text{س}_1^2)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{-\text{هـ}\,(2\text{س}_1+\text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0}(-2\text{س}_1-\text{هـ})$

$\text{د}'(\text{س}) = -2\text{س}$ ، ∴ ميل المماس عند $\text{س} = 2$ هو: $\text{د}'(2) = -4$.

[١١] يمكن إعادة كتابة معادلة المستقيم على الصورة $\text{ص} = -\frac{1}{2}(\text{س}-1)$ ، وبالتالي فإن ميله $= \frac{1}{2}$

∴ ميل المماس المطلوب هو سالب مقلوب $(-\frac{1}{2})$ أي يساوي (٢) ،

وأن المشتقة $\text{ص}' = \text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{[(\text{س}_1+\text{هـ})^2+4(\text{س}_1+\text{هـ})-1]-[\text{س}_1^2+4\text{س}_1-1]}{\text{هـ}}$

أي أن $\text{ص}' = 2\text{س}+4$ ، ∴ $2\text{س}+4 = 2 \Leftarrow \text{س} = -1$ ،

وبالتعويض في معادلة المماس ، نحصل على $\text{ص} = -4$ ، ∴ معادلة المماس هي $\dfrac{\text{ص}+4}{\text{س}+1} = 2$

أي $\text{ص}+4 = 2\text{س}+2$ ، ومنها $\text{ص} = 2(\text{س}-1)$ وهي معادلة المماس للمنحنى .

[١٢] $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{[(\text{س}_1+\text{هـ})^3-6(\text{س}_1+\text{هـ})^2+5]-[\text{س}_1^3-6\text{س}_1^2+5]}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{ء}\to 0} \dfrac{3\text{هـ}\,[\text{س}_1^2+\text{س}_1\text{ء}+\text{ء}^2-4\text{س}_1+2\text{ء}]}{\text{ء}} = 3\text{س}^2-12\text{س}$.

يكون المماس موازياً للمحور السيني عندما يكون ميله صفراً ، أي عندما

$\text{د}'(\text{س}) = 3\text{س}(\text{س}-4) =$ صفراً $\Leftarrow$ س = صفراً أو س = ٤ ، ∴ د(٠) = ٥ ، د(٤) = −٢٧

∴ يكون المماس موازياً للمحور السيني عند كل من النقطتين (٠ ، ٥) ، (٤ ، −٢٧) .

[١٣] $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0} \dfrac{(\text{س}_1+\text{هـ})^3-\text{س}_1^3}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ}\to 0}(3\text{س}^2+3\text{س}\,\text{هـ}+\text{هـ}^2)$

$\text{د}'(\text{س}) = 3\text{س}^2$ ... (١)

∴ ميل المماس عند أي نقطة هو 3س^2 ، وحيث أن ميل المماس يساوي ميل المستقيم ص = س

∴ $\text{ص}' = 1$ ... (٢) ، ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

$3\text{س}^2 = 1 \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{1}{3} \Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

وبالتعويض في معادلة المنحنى عندما $\text{س} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ نحصل على :

$\text{ص} = \left((\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}} = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ وعندما $\text{س} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ تكون قيمة $\text{ص} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

∴ نقاط المنحنى هي $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ، } \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ ، $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \text{ ، } \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}\right)$

٥ - ٦ المشتقة عند نقطة ، المشتقة على فترة

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يذكر متى تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق عند نقطة .
- يذكر متى تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق في الفترة]أ ، ب[.
- يذكر متى تكون الدالة د(س) قابلة للاشتقاق في ح .
- يبحث قيمة المشتقة للدالة عند نقطة معلومة .
- يتعرّف على أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة تكون متصلة عند هذه النقطة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المشتقة عند نقطة حصة واحدة.

الحصة الثانية: المشتقة على فترة حصة واحدة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد مشتقة الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + 6$ عند $\text{س} = 3$.

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ - ٦)

[١] ١) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ء}\to 0} \dfrac{\dfrac{[(\text{س}_1+\text{ء})^2+2(\text{س}_1+\text{ء})-3]}{[(\text{س}_1+\text{ء})^2+2(\text{س}_1+\text{ء})+3]} - \dfrac{\text{س}_1^2+2\text{س}_1-3}{\text{س}_1^2+2\text{س}_1+3}}{\text{ء}}$

وبعد التبسيط نحصل على :

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{12(\text{س}+1)}{(\text{س}^2+2\text{س}+3)^2}$ ، ∵ د'(س) معرفة على ح ، فإن :

د(س) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في مجالها .

٢) $\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ء}\to 0} \dfrac{[(\text{س}_1+\text{هـ})+1][(\text{س}_1+\text{هـ})^2+1]-(\text{س}_1+1)(\text{س}_1^2+1)}{\text{هـ}}$

وبعد التبسيط نحصل على :

$\text{د}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ء}\to 0}(3\text{س}_1^2+2\text{س}_1+3\text{س}_1\text{هـ}+\text{هـ}+\text{هـ}^2+\text{هـ}+1) = 3\text{س}^2+2\text{س}+1$

∵ د'(س) معرفة على ح ، فإن : د(س) قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في مجالها .

٣) $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{(\text{س}_١+\text{هـ})+٥} - \sqrt{\text{س}_١+٥}}{\text{هـ}}$ ، وبالضرب في مرافق البسط

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}\left(\sqrt{(\text{س}_١+\text{هـ})+٥} + \sqrt{\text{س}_١+٥}\right)}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{(\text{س}_١+\text{هـ})+٥} + \sqrt{\text{س}_١+٥}} = \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}+٥} + \sqrt{\text{س}+٥}}$

$= \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}_١+٥}}$

أي أن $\text{د}'(\text{س})$ غير معرّفة عند س = −٥ ، وبالتالي فإن مجال $\text{د}'(\text{س})$ هو]−٥ ، ∞[.

[٢] $\text{د}'(١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٤-(١+\text{هـ})^٢)-(٤-١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}(-٢-\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} (-٢-\text{هـ}) = -٢$

[٣] $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\left(\dfrac{٢}{[(\text{س}_١+\text{هـ})+١]} - \dfrac{٢}{(\text{س}_١+١)}\right)}{\text{هـ}}$

بعد التبسيط نحصل على :

$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-٢\text{هـ}}{\text{هـ}[(\text{س}_١+\text{هـ})+١](\text{س}_١+١)} = \dfrac{-٢}{(\text{س}+١)(\text{س}+١)} = \dfrac{-٢}{(\text{س}+١)^٢}$

وعندما س = ١ ، تكون قيمة المشتقة

$\text{د}'(١) = \dfrac{-٢}{(٢)^٢} = \dfrac{-٢}{٤} = -\dfrac{١}{٢}$

[٤] الدالة معرّفة على ح

∴ $\text{د}'(١^+) = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{(١+\text{هـ})^٢-(١)^٢}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}(٢+\text{هـ})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠^+}{\text{نها}} (٢+\text{هـ}) = ٢$ ...(١)

$\text{د}'(١^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{[٢(١+\text{هـ})-١]-(٢-١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٢$ ...(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{د}'(١^+) = \text{د}'(١^-) = ٢$

∴ الدالة لها مشتقة عند النقطة س = ١ ، وهي $\text{د}'(١) = ٢$.

[٥] أولاً : نبحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ٢

$\text{د}'(٢^-) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{[(٢+\text{هـ})+٢]-(٢+٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٤+\text{هـ}-٤}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١$ ...(١)

أما $\text{د}'(٢^+) = ٣$ ، ∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = ٢ .

ثانياً : نبحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ٠ .

الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = ٠ . ...(٢)

ثالثاً : وبالمثل الدالة غير قابة للاشتقاق عند س = ٥ لأنها غير معرفة يمين العدد ٥ ...(٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن الدالة د(س) غير قابلة للاشتقاق عند النقاط ٢ ، ٠ ، ٥ .

[٦] ١) $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{[(\text{س}_١+\text{هـ})^٢+(\text{س}_١+\text{هـ})]-(\text{س}_١^٢+\text{س}_١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}[٢\text{س}_١+\text{هـ}+١]}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} (٢\text{س}_١ + \text{هـ} + ١) = ٢\text{س} + ١$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]−∞ ، ∞[

٢) $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{[٢(\text{س}_١+\text{هـ})^٣ - \sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}}]-[٢\text{س}_١^٣ - \sqrt{\text{س}_١}]}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{هـ}[(٣\text{س}_١^٢+٣\text{س}_١\text{هـ}+\text{هـ}^٢)]}{\text{هـ}} - \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}} - \sqrt{\text{س}_١}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} ٢(٣\text{س}_١^٢+٣\text{س}_١\text{هـ}+\text{هـ}^٢) - \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}} - \sqrt{\text{س}_١}}{\text{هـ}} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}_١}}{\sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}_١}}$

$= ٦\text{س}^٢ - \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}_١+\text{هـ}} + \sqrt{\text{س}_١}} = ٦\text{س}^٢ - \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]٠ ، ∞[.

٣) حيث س > ٤

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{[٤-(\text{س}_١+\text{هـ})]} - \dfrac{١}{٤-\text{س}_١}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}}{\text{هـ}[٤-(\text{س}_١+\text{هـ})](٤-\text{س}_١)}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{[٤-(\text{س}_١+\text{هـ})](٤-\text{س}_١)} = \dfrac{١}{(٤-\text{س}_١)^٢}$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]٤ ، ∞[.

٤) حيث س < −٢

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{[٤-(\text{س}_١+\text{هـ})^٢]} - \dfrac{١}{(٤-\text{س}_١^٢)}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}(٢\text{س}_١+\text{هـ})}{\text{هـ}[٤-(\text{س}_١+\text{هـ})^٢][٤-\text{س}_١^٢]} = \dfrac{٢\text{س}}{٤-\text{س}^٢}$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]−∞ ، −٢[.

٥) حيث أن س ≥ ١ ، د(س) = س − ١ ، س > ١

$$\therefore\ \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|(\text{س}+\text{هـ})-١| - |\text{س}-١|}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|\text{هـ}|+|\text{س}-١| - |\text{س}-١|}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|\text{هـ}|}{\text{هـ}} = ١$$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]١ ، ∞[، وكذلك .

$$\text{د}'(١^{+}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|١+\text{هـ}-١| - |١-١|}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|\text{هـ}|-٠}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{|\text{هـ}|}{\text{هـ}} = ١$$

∴ د'(١⁺) = ١ ، ∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة [١ ، ∞[.

٦) حيث أن س ≥ $\frac{-٢}{٣}$ ، د(س) = −(٢ + ٣س) ، س < $\frac{-٢}{٣}$ ،

$$\therefore\ \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-[٢+٣(\text{س}+\text{هـ})] - (-٢-٣\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-٣\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٣ ،$$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]−∞ ، $\frac{-٢}{٣}$[، كذلك

$$\text{د}'\left(\frac{-٢}{٣}\right) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-(٢+٣\times\frac{-٢}{٣}+٣\text{هـ})+(٢+٣\times\frac{-٢}{٣})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{-٢-٣\times\frac{-٢}{٣}-٣\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٣ ،$$

∴ الدالة د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة]−∞ ، $\frac{-٢}{٣}$] .

٥ − ٧ قواعد الدوال القابلة للاشتقاق

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

- يثبت أن مشتقة الدالة د(س) = جـ تساوي صفراً .
- يثبت أن مشتقة الدالة الخطية = ثابت .
- يبرهن صحة قاعدة دالة القوى في حالة ن ∈ ص
- يثبت صحة أن :

$$[\text{د}(\text{س}) \pm \text{ر}(\text{س})]' = \text{د}'(\text{س}) \pm \text{ر}'(\text{س})$$

- يبرهن أن :

$$[\text{د}(\text{س}) \cdot \text{ر}(\text{س})]' = \text{د}'(\text{س}) \cdot \text{ر}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) \cdot \text{ر}'(\text{س})$$

- يوجد مشتقة القوى عندما تكون الأسس أعداد نسبية .
- يوجد مشتقة حاصل ضرب دالتين.

- يبرهن أن :

$$\left[\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}\right]' = \frac{\text{ر}(\text{س}) \cdot \text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س})\,\text{ر}'(\text{س})}{[\text{ر}(\text{س})]^{٢}}$$

٩- يعيّن مشتقة قسمة دالتين.

١٠- يعيّن مشتقة الجذر التربيعي لدالتين.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذ البند في ست حصص على النحو الآتي:

الحصة الأولى : مشتقات الدوال الثابتة ودوال الدرجة الاولى .

الحصة الثانية : مستقة دالة القوى .

الحصة الثالثة : مشتقة مجموع دالتين ، ومشتقة حاصل ضرب دالتين .

الحصة الرابعة : مشتقة خارج قسمة دالتين .

الحصة الخامسة : مشتقة الجذر التربيعي .

الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد مشقة الدالة د(س) = $\frac{٦ + \text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}$.

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ − ٧)

١ − د'(س) = ٠

٢ − $\text{ص}' = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (٢\text{س})' + (٤)' = ٢ + ٠ = ٢$

٣ − $\text{د}'(\text{س}) = ((٢)^{\circ})' + (\text{س})' = ٠ + ١ = ١$

٤ − $\text{د}'(\text{ل}) = (٤\text{ل}^{٣})' + (٢\text{ل})' - (٢)' = ١٢\text{ل}^{٢} + ٢$

٥ − باستخدام خاصية حاصل ضرب دالتين

$\text{ر}'(\text{س}) = \text{س}^{٢}(١ + ٠) + ٢\text{س}(\text{س} + ١) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} = ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$

٦ − $\text{د}'(\text{م}) = \frac{\text{م}(٤\text{م}+٤) - (٢\text{م}^{٢}+٤\text{م})(١)}{\text{م}^{٢}} = \frac{٤\text{م}^{٢}+٤\text{م} - ٢\text{م}^{٢} - ٤\text{م}}{\text{م}^{٢}} = \frac{٢\text{م}^{٢}}{\text{م}^{٢}} = ٢$

٧ − $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$

٨ − $\text{ص} = ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = ٣\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣ \times \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٢}{٣}-١} = ٢\text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$.

٩ - $د'(س) = ٧ س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{١٥}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} + ٤ س^{\frac{١}{٢}} + ٣ س^{\frac{-١}{٢}}$

[٢] لإيجاد المشتقة لتلك الدوال عند كل نقطة من النقاط المعطاة، نستخدم قواعد الاشتقاق للدوال، كما يأتي:

١ - $د'(س) = ٢ س$

∴ $د'(٢) = ٢ \times ٢ = ٤$

٢ - $د'(س) = ٤ س^٣ + ٢$

∴ $د'(١) = ٤(١)^٣ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦$

٣ - $د'(س) = ٣ \times ٢ س^٢ = ٦ س^٢$

∴ $د'(-٢) = ٦(-٢)^٢ = ٢٤$

٤ - $د'(س) = ٢ \times ٧ س^{٧-١} = ١٤ س^٦$

∴ $د'(٢) = ١٤ \times (٢)^٦ = ١٤ \times ٦٤ = ٨٩٦$.

٥ - $د'(س) = (٣س^٥)' + (٧س^٤)' - (٢س^٣)' - (س^٢)' + (٩س)' - (٥)'$

$= ١٥ س^٤ + ٢٨ س^٣ - ٦ س^٢ - ٢ س + ٩$

$د'(-١) = ١٥(-١)^٤ + ٢٨(-١)^٣ - ٦(-١)^٢ - ٢(-١) + ٩$

$= ١٥ - ٢٨ - ٦ + ٢ + ٩ = -٨$

٦ - $د'(س) = \frac{٢س(٢س^٢+١) - ٤س(س^٢-٥)}{(٢س^٢+١)^٢} = \frac{٤س^٣+٢س-٤س^٣+٢٠س}{(٢س^٢+١)^٢} = \frac{٢٢س}{(٢س^٢+١)^٢}$

∴ $د'(٣) = \frac{٢٢(٣)}{(٢(٣)^٢+١)^٢} = \frac{٦٦}{(١٨+١)^٢} = \frac{٦٦}{٣٦١}$

[٣] باستخدام قواعد الاشتقاق:

$د'(س) = \frac{(٢س+١)(٠) - ٢(٢)}{(٢س+١)^٢} = \frac{-٤}{(٢س+١)^٢}$ ، ∴ $د'(٢) = \frac{-٤}{(٢\times٢+١)^٢} = \frac{-٤}{(٥)^٢} = \frac{-٤}{٢٥}$

[٤] ∵ $د(س) = \frac{١}{س^{ه-١}}$ ، $س \neq ٠$ ، $ه \in ن$ حيث ن مجموعة الأعداد النسبية .

∴ $د(س) = س^{-(ه-١)}$ ، وبالتالي يكون :

$د'(س) = -(ه-١) س^{-(ه-١)-١}$

$= (١-ه) س^{-ه}$

$= \frac{١-ه}{س^{ه}}$.

[٥] $د(س) = \left(\frac{١-س}{١+س}\right)^{\frac{١}{٢}}$

∴ $د'(س) = \frac{-١}{\sqrt{\frac{١-س}{١+س}}\,(١+س)^٢}$

$= \frac{-١}{\sqrt{\frac{١-س}{١+س}}\,(١+س)^٢}$

[٦] $د(س) = (س^٢+١)^{\frac{١}{٢}}$

$د'(س) = \frac{١}{٢}(س^٢+١)^{\frac{١}{٢}-١}(٢س) = (س^٢+١)^{-\frac{١}{٢}}(س) = \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}}$.

[٧] $ص' = ٤\times٦س^٥ - ٣\times٥س^٤ + ٤\times٢س + ١ = ٢٤س^٥ - ١٥س^٤ + ٨س + ١$ ،

∴ $ص'(١) = ٢٤(١)^٥ - ١٥(١)^٤ + ٨(١) + ١ = ٢٤ - ١٥ + ٨ + ١ = ١٨$.

[٨] $د(س) = ه\, ل\, س^{ه-١} + م\, ع\, س^{م-١}$ ،

[٩] أ) $ص = د(س) = \frac{س}{٢} + \frac{٤}{س^٢} + \frac{س^٣}{٢}$ ،

$د'(س) = \frac{١}{٢}(س)' + ٤\left(\frac{١}{س^٢}\right)' + \frac{١}{٢}(س^٣)'$

$= \frac{١}{٢}(١) + ٤\left(\frac{-٢}{س^٣}\right) + \frac{١}{٢}(٣س^٢)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{٨}{س^٣} + \frac{٣}{٢}س^٢$

ب) $د(س) = \frac{١}{س^٤} = س^{-٤}$ ،

$د'(س) = -٤ س^{-٤-١} = -٤ س^{-٥} = \frac{-٤}{س^٥}$.

جـ) ∵ $ع' = (د'.ر.ه)(س) + (ر'.د.ه)(س) + (ه'.د.ر)(س)$ ،

∴ $ع' = ٣(ه^٢+٣)(ه^٣-٢) + ٢ه(٣ه-١)(ه^٣-٢) + ٣ه^٢(٣ه-١)(ه^٢+٣)$.

[١٠] باستخدام مشتقة خارج قسمة دالتين ، حيث إن $ق(س) = \frac{١}{م(س)}$ ، $م(س) \neq ٠$ ، $م'(س)$ موجودة ،

∴ $ق'(س) = \frac{م(س)(٠) - (١)م'(س)}{(م(س))^٢} = \frac{-م'(س)}{(م(س))^٢}$

[١١] أ) $\text{دَ}(\text{س}) = \frac{(٢\text{س}+٤)(٢) - (٢\text{س}-٤)(٢)}{(٢\text{س}+٤)^٢} = \frac{٤\text{س}+٨-٤\text{س}+٨}{(٢\text{س}+٤)^٢} = \frac{١٦}{(٢\text{س}+٤)^٢}$ ،

ب) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣+٢}{(\text{س}^٢-١)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{(\text{س}^٢-١)^{\frac{١}{٢}}(٣\text{س}^٢) - \frac{١}{٢}(\text{س}^٣+٢)(\text{س}^٢-١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢-١)}$

$= \frac{٣\text{س}^٢\sqrt{\text{س}^٢-١} - \frac{\text{س}^٤+٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢-١}}}{(\text{س}^٢-١)} = \frac{\frac{٣\text{س}^٢(\text{س}^٢-١)-(\text{س}^٤+٢\text{س})}{\sqrt{\text{س}^٢-١}}}{(\text{س}^٢-١)}$

$= \frac{٣\text{س}^٤-٣\text{س}^٢-\text{س}^٤-٢\text{س}}{\sqrt{(\text{س}^٢-١)^٣}} = \frac{٢\text{س}^٤-٣\text{س}^٢-٢\text{س}}{\sqrt{(\text{س}^٢-١)^٣}}$

جـ) $\text{ص} = (\text{س}^٢-٣\text{س}+١)(\text{س}^٤-\text{س}^٣+٥\text{س}^٢-٢)$ ،

$\therefore \text{صَ} = (\text{دَ}.\text{ر})(\text{س}) + (\text{رَ}.\text{د})(\text{س})$ ،

$\therefore \text{صَ} = (٢\text{س}-٣)(\text{س}^٤-\text{س}^٣+٥\text{س}^٢-٢) + (٤\text{س}^٣-٣\text{س}^٢+١٠\text{س})(\text{س}^٢-٣\text{س}+١)$

٥ - ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة.

تنفيذ الاختبار

يكلف المدرس طلبته بحل الاختبار الموجود في كتاب التمارين كعمل منزلي وكتهيئة لاختبار الوحدة، وفي حصتي اختبار الوحدة يُعطى المدرس الاختبار الموجود في الدليل والمحدّد بأهداف الوحدة ، ويعطى اختباراً آخراً من إعداده مراعياً التنوع لتحقيق كافة أهداف الوحدة الموضحة في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١، ٢
٢ ، ٣	٣ ، ٤ ، ٥
٤	٦، ٧
٥ ، ٦	٨
٧	٩، ١٠
٨	١١

[١] أوجد كلا من النهايات الآتية ، $\forall\, \text{ن} \in \text{ط}^*$

أ) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١+٣+٥+\dots+(٢\text{ن}-١)}{١+٣+٥+\dots+(٣\text{ن}-١)}$

ب) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}}\ ١ + \frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^٢ + \dots + (\frac{١}{٢})^{\text{ن}}$

جـ) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} (\sqrt{\text{ن}+١} - \sqrt{\text{ن}-١})$

[٢] أوجد قيمة $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س})-\text{د}(١)}{\text{س}-١}$ في الحالتين التاليتين :

أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}+١$ ، ب) $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^٢}$

[٣] ابحث وجود نهاية الدالة $\text{د}(\text{س}) = \frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}-٢}$ عندما $\text{س} = ٢$

[٤] ابحث اتصال الدالة

$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} ,\ \text{س} = -١ & \text{، إذا كانت } ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٤ & \text{، س} = ١ \\ ٥-٣\text{س} & \text{، إذا كانت } ١ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$

[٥] أوجد دالة التغير للدوال التالية :

أ) $\text{د} : \text{س} \longrightarrow ٢\text{س}+١$ عند $\text{س} = ٢$ ثم أوجد $\text{د}(-١)$

ب) $\text{د} : \text{س} \longrightarrow \text{س}^٣$ عند $\text{س} = ١$ ثم أوجد $\text{د}(٠,٢)$

[٦] إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{، } ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س}+١ & \text{، س} \ge ٣ \end{cases}$

أوجد متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٢,٥

[٧] أوجد باستخدام تعريف المشتقة ما يلي :

أ) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^٢}$ ، $\forall\, \text{س} \in \text{ح}^+$

ب) $\text{ص} = \text{س}^٣ - \frac{٣}{٢}\text{س}^٢$ ، $\forall\, \text{س} \in \text{ح}$

جـ) $\text{ص} = |\text{س}-١|$ عند $\text{س} = ٣$

[٨] أوجد معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $\text{ص} = \text{س}+١$

المصطلحات

Absolute Value	القيمة المطلقة
Average Rate of change	متوسط التغير
Average Velocity	السرعة المتوسطة
Continuity	الاتصال
Continuity on an Interval	الاتصال على فترة
Derivative	المشتقة
D ifferentiation	التفاضل
The Derevative of a function	مشتقة دالة
Differentiable function	الدالة القابلة للاشتقاق
Differentiable Rules	قواعد الاشتقاق
Equation of the Tangent	معادلة المماس
Equation of the Normal	معادلة العمودي
First Derivative	المشتقة الاولى
Gradient function	دالة الميل
Instantaneous Velocity	السرعة اللحظية
Instantaneous Rate of change	معدل التغير
Left- Hand limit	النهاية من اليسار
Right- Hand limit	النهاية من اليمين
Limit	النهاية
Product Rule of Differentiation	مشتقة ضرب دالتين
Point	نقطة
Quotient Rule of Differentiation	مشتقة قسمة دالتين
Slope of Secant or Gradient of the Chord	ميل التقاطع
Slope of Tangent or Gradient of the Tangent	ميل المماس

المراجع

١ – أليوت مندلسون ، حساب التفاضل والتكامل ، سلسلة شوم ، ترجمة فايز فوق العادة ، أكاديميا إنترناشيونال . ٢٠٠٠م ، لبنان .

٢ – علي عزيز علي ، وآخرون ، محاضرات في الرياضيات المعاصرة وبعض تطبيقاتها في الإدارة والإقتصاد ، جامعة الموصل ١٩٧٨ م ، العراق .

٣ – فتحي خليل حمدان ، سلسلة التفاضل والتكامل ، دار وائل للطباعة والنشر ، ط ٢٠٠٠ عمان، الأردن .

1 - Ellis, R. and Gulick, D. (1990) , calculas with Analytic Geometry, 4ad.

2 -Stanly, G. (1984), Calculas, 3 ed. Academic Press, Inc. Florida, USA.

الوحدة السادسة

المصفوفات والمحددات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٦ – ١	المصفوفات	٣
٦ – ٢	بعض المصفوفات الخاصة .	٢
٦ – ٣	جمع وطرح المصفوفات	٣
٦ – ٤	ضرب المصفوفات والعمليات عليها	٤
٦ – ٥	المحددات	٢
٦ – ٦	المعكوس الضربي للمصفوفات	٢
٦ – ٧	بعض التطبيقات على المصفوفات والمحددات	٣
٦ – ٨	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢١

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من تدريس هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١- يعرّف المصفوفة ويحدّد شكلها ونوعها .

٢- يجمع المصفوفات، ويطرحها .

٣- يتعرّف خواص جمع المصفوفات .

٤- يضرب مصفوفة في عدد حقيقي ويضرب مصفوفتين.

٥- يتعرّف خواص ضرب المصفوفات، والمصفوفات المربعة .

٦- يعرّف المحددات ويتعرّف خواصها .

٧- يوجد المعكوس الضربي للمصفوفات .

٨- يستخدم المصفوفات والمحددات في حل نظام معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة متغيرات على الأكثر.

المقدمة

خصصت الوحدة السادسة للمصفوفات والمحددات . وقد قسمت إلى ثمانية بنود ، ومجموع حصصها إحدى وعشرون (٢١) حصة . انظر جدول توزيع الحصص .

لمحة تاريخية

المصفوفات جمع كلمة مصفوفة . ولقد استخدمت لأول مرة من قبل العالم الألماني كيلي(١٨٢١ـ ١٨٩٥م)، وتستخدم المصفوفات في الوقت الراهن في علم الإقتصاد وعلم الإجتماع وعلم النفس لتسهيل عملية التبويب للبيانات . وجاءت المصفوفات لتعبر عن ذلك بشكل مبسط ، وتقدم الحلول الدقيقة لمسائلها .

أما المحددات فتعبر عن القيمة العددية للمصفوفات المربعة . وهذه الوحدة تركز على هذين المفهومين وبعض العمليات عليها .

الخلفية العلمية

إن موضوع المصفوفات والمحددات مفهوم جديد على الطلاب، وفي هذه الخلفية نعالج بعض النقاط التي تسهم في تبسيط الموضوع .

١- كتابة المصفوفة بالصورة أ وكتابة العناصر داخل قوسين [ ] وقد نستخدم الرمز [أهـو] للدلالة على المصفوفة حيث هـ = ١ ، ٢ ، . . . ، م عدد الصفوف ، و = ١ ، ٢ ، . . . ن عدد الأعمدة، وبذلك يكوّن المصفوفة من الشكل م × ن .

٢- يوضّح رمز العنصر أهـو بأنه العنصر الواقع في تقاطع الصف الذي ترتيبه هـ والعمود الذي ترتيبه و .

٣- إعطاء شكل المصفوفة في الحالات التي يكون فيها م ≠ ن ، م = ن ، م = ١ ، ن = ١؛ وكذلك إعطاء بعض المصفوفات الخاصة .

٤- التركيز على تعريف عمليتي جمع وطرح المصفوفات ، وكذلك الضرب لمصفوفة بعدد حقيقي ، وضرب مصفوفتين ومن الصعوبات التي سيواجهها الطلبة هي ضرب المصفوفات ولذا سنقدم طريقة توضيحية لتسهيل إيجاد حاصل ضرب مصفوفتين (قاعدة ضرب مصفوفتين):

مثلاً إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٢ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

فلمعرفة حاصل ضرب أ . ب نتبع ما يلي:

يوضح أن المصفوفة الناتجة هي من الشكل ٢×٣ نلاحظ أن العمود الأول من ب يولد لنا العمود الأول من جـ والعمود الثاني من ب يولد لنا العمود الثاني من جـ والعمود الثالث من ب يولد لنا العمود الثالث من جـ :

- نكتب العمود الأول من ب في موازاة صفوف أ

$\boxed{٠ \quad -٢ \quad ٤} \longrightarrow$ العمود الأول من ب

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٤ \end{bmatrix}$

العمود الأول من جـ = $\begin{bmatrix} (٤\times٣) + (-٢\times٥) + (٠\times٢) \ldots \\ (٤\times-٤) + (-٢\times٠) + (٠\times١) \ldots \end{bmatrix}$

- نكتب العمود الثاني من ب في موازاة صفوف أ

$\boxed{٣ \quad ١ \quad -١} \longrightarrow$ العمودالثاني من ب

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٤ \end{bmatrix}$

العمود الثاني من جـ = $\begin{bmatrix} \ldots (-١\times٣) + (١\times٥) + (٣\times٢) \ldots \\ \ldots (-١\times-٤) + (١\times٠) + (٣\times١) \ldots \end{bmatrix}$

- بالمثل نكرر ما عملناه في الخطوتين السابقتين للحصول على العمود الثالث في جـ :

نجد أن العمود الثالث من جـ = $\begin{bmatrix} \ldots (٢\times٣) + (٥\times٥) + (٢\times٢) \\ (٢\times-٤) + (٥\times٠) + (٢\times١) \end{bmatrix}$

وبناءً على ما تقدم نحصل على المصفوفة جـ التي هي ناتج حاصل ضرب أ . ب

$\therefore$ جـ = $\begin{bmatrix} ٣٥ & ٨ & ٢ \\ -٦ & ٧ & -١٦ \end{bmatrix}$

- تقديم مدوّر مصفوفة على أن تبديل الصفوف والأعمدة بالترتيب نفسه مع التوضيح إذا كانت أ من الشكل ٣×٥ فإن [أَ] مدوّر المصفوفة من الشكل ٥×٣ .

- إذا كانت المصفوفة مربعة فيمكن حساب محددتها، والمحددة هي عدد حقيقي يحسب بطريقة خاصة ؛ ونرمز لمحددة المصفوفه أ بالرمز | أ | أو Δ .

- ولحساب المحدّدة لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فمثلاً س = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ = أء − ب جـ .

أي أن المحددة = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي − حصل ضرب عناصر القطر الثانوي .

- إذا كانت المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة فهناك طريقتان أساسيتان لحساب محددتها منها طريقة فك المحددة باستخدام أحد الصفوف أو أحد الأعمدة وهذه الطريقة عبارة عن حاصل مجموع ضرب عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة في مرافقاتها ويجب مراعاة وضع الإشارات الجبرية فوق كل عنصر من عناصر المحدد بالتناوب ابتداء من الإشارة الموجبة من العنصر الأول أ حسب الصفوف أو الأعمدة أي أن المحددة من الرتبة الثالثة تعرف بدلالة محددات من الرتبة الثانية . وبالأسلوب نفسه يمكن تعريف المحددات من الرتبة الرابعة بدلالة محددات من الرتبة الثالثة وهكذا (انظر كتاب الطالب).

أما الطريقة الأخرى لحساب محددة من الدرجة الثالثة وهي طريقة فروق الأقطار (طريقة سيروس) وهذه الطريقة سهلة وسريعة وتتلخص بإعادة كتابة العمودين الأول والثاني على يسار المحددة (انظر كتاب الطالب)، وقيمة المحددة = مجموع حاصل ضرب العناصر الثلاثة المكونة للأقطار الرئيسية المتوازية- مجموع حاصل ضرب العناصر الثلاثة المكونة للأقطار الثانوية.

- تسهل خواص المحددات عملية حساب قيم المحددات اختصاراً للوقت والجهد.
- إذا كانت قيمة محددة أي مصفوفة يساوي صفراً تسمى هذه المصفوفة منفردة، وليست كل المصفوفات المنفردة متساوية .
- ليس للمصفوفة المنفردة معكوس ضربي، أما إذا كانت المصفوفة غير منفردة فلها معكوس ضربي وإذا ضرب المعكوس الضربي للمصفوفة في المصفوفة نحصل على مصفوفة الوحدة.
- لإيجاد معكوس المصفوفة من الرتبة الثانية نتبع الخطوات التالية:

أ) نوجد محددة المصفوفة (Δ) بحيث $\neq$ صفر .

ب) نبدّل عناصر القطر الرئيسي، ونعكس إشارات عناصر القطر الثانوي.

جـ) نضرب الناتج في $\frac{1}{\Delta}$ فيكون هو المعكوس الضربي للمصفوفة (انظر كتاب الطالب) .

- ولحساب معكوس مصفوفة من الرتبة الثالثة نتبع الخطوات التالية:

أ) نوجد قيمة محددة المصفوفة (Δ) بحيث لا تساوي صفراً.

ب) نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة الأصلية.

جـ) نوجد مدوّر مصفوفة المرافقات (المصفوفة المساعدة).

د) نقسم المصفوفة المساعدة على قيمة المحددة (Δ) للمصفوفة الأصلية، والناتج هو المعكوس الضربي للمصفوفة الأصلية، للتأكّد من صحة الحل نضرب المعكوس الضربي للمصفوفة في المصفوفة الأصلية فنحصل على مصفوفة الوحدة (انظر كتاب الطالب).

- حل المعادلات الخطية التي من الدرجة الأولى في ثلاث متغيرات على الأكثر باستخدام المصفوفات، يعني إيجاد القيم الحقيقية للمتغيرات التي تحقق المعادلات، فمثلاً لحل نظام معادلات خطية في متغيرين أو أكثر باستخدام المصفوفات نتبع الخطوات التالية:

أ) نكتب المعادلات في صورة مصفوفات.

ب) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات (بحيث $\Delta \neq$ صفراً).

جـ) نضرب كلاً من الطرفين في (أ) في معكوس المصفوفة فنحصل على قيم المتغيرات (انظر كتاب الطالب).

- ولحل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى في ثلاث متغيرات على الأكثر باستخدام المحددات نتبع الآتي:

أ) نكتب المعادلات في صورة مصفوفات.

ب) نحسب Δ لمصفوفة المعاملات.

جـ) نوجد Δ س وهي المحددة التي نحصل عليها بوضع الثوابت في الطرف الايسر بدلاً من معاملات س في محددة مصفوفة المعاملات Δ س .

د) نوجد Δ ص وهي المحددة التي نحصل عليها بوضع الثوابت في الطرف الايسر بدلاً من معاملات ص في محددة مصفوفة المعاملات Δ .

هـ) نوجد Δ ع وهي المحددة التي نحصل عليها بوضع الثوابت في الطرف الايسر بدلاً من معاملات ع في محددة مصفوفة المعاملات Δ، ثم نوجد قيم المتغيرات من العلاقات الآتية :

$$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} \quad ، \quad ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$$

وإذا كانت $\Delta \neq ٠$ فإن لجملة المعادلات الخطية حلاً وحيداً.

وإذا كانت $\Delta = ٠$ فامامنا أمران هما:

أ) إذا كانت Δ س أو Δ ص أو Δ ع $\neq ٠$ فإن نظام المعادلات مستحيلة الحل.

ب) إذا كانت Δ س $=$ Δ ص $=$ Δ ع $= ٠$ فإن لنظام المعادلات عدد لانهائي من الحلول وفي هذه الحالة تكون المستقيمات متطابقة.

توجيهات طرائقية عامة

١ – يؤكد المدرس على مفهومي المصفوفات والمحددات.

٢ – تثبيت الرموز المستخدمة في المصفوفات ورمز المحددة والتفريق بين $|\underline{أ}|$ ورمز القيمة المطلقة $|\ |$

٣ – يؤكد على رمز العنصر $أ_{ر و}$ ، وماذا يعني ؟

٤ – الإهتمام بأنواع المصفوفات الشهيرة التي قدمت في الكتاب المدرسي وكذلك شكل المصفوفة.

٥ – يؤكد على جمع وطرح المصفوفات . والشرط اللازم في العملية .

٦ – يؤكد على ضرب مصفوفة في عدد حقيقي، وكذلك على الشرط اللازم لحاصل ضرب مصفوفتين.

٧ – يركز على المصفوفة المربعة وطرق حساب محددتها.

٨ – يؤكد على خواص المحددات وسهولة حساب المحددة .

٩ – يؤكد على الشرط اللازم لوجود معكوس للمصفوفة .

١٠– يؤكد على الخطوات لإيجاد معكوس مصفوفة من الرتبة الثانية وكذلك من الرتبة الثالثة .

١١– يؤكد على خطوات حل معادلات خطية في ثلاث متغيرات على الأكثر .

١٢– يمكن الاخذ بامثلة من خارج الكتاب المدرسي لتوضيح كل ما ورد .

١٣– يكثر من التمارين والمسائل الصفية واللا صفية لتعزيز ما درس للطالب .

٦ - ١ المصفوفات

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

- يعرّف المصفوفة.
- يذكر عناصر مصفوفة معطاة.
- يحدّد شكل المصفوفة.
- يذكر شرط تساوي مصفوفتين.
- يكتب مصفوفة إذا اعطيت عناصرها.
- يحوّل بيانات معطاة إلى مصفوفة.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المصفوفة.

الحصة الثانية : تساوي مصفوفتين .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

اكتب مصفوفة ا = [ا د] من الشكل ٣ × ٢ .

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ١)

[١] أ) :

$$\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} \text{١٠٠} & \text{٧٥} & \text{٥٠} & \text{٠} \\ \text{٥٤} & \text{١٢٠} & \text{٠} & \text{٥٠} \\ \text{٨٠} & \text{٠} & \text{١٢٠} & \text{٧٥} \\ \text{٠} & \text{٨٠} & \text{٥٤} & \text{١٠٠} \end{bmatrix}$$

ب) س ٣٤ هو ٨٠ يعني المسافة بين المدينتين جـ ، ء

س ٤٣ هو ٨٠ يعني المسافة بين المدينتين ء ، جـ

جـ) عناصر الصف الثاني هي : ٥٠ ، ٠ ، ١٢٠ ، ٥٤

د) عناصر العمود الثالث هي: ٧٥ ، ١٢٠ ، ٠ ، ٨٠

[٢] : أ) ٨ عناصر ب) ٦ عناصر جـ) ٣٥ عنصراً

[٣] : أ) س = ٦ ، ص = −٢ ، ع = ١١ ، ل = ٨

ب) س = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = ٣ ، ع = −٢ ، ل = −٢

جـ) س = ٥ ، ص = ١ ، ع = $\frac{٧}{٣}$ ، ل = $\frac{١٠}{٣}$

[٤] $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{٤} \end{bmatrix}$

[٥] $\underline{\text{ص}} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ}' & \text{ب}' & \text{ا}' \\ \frac{٣}{٤}\text{جـ} - ٢\text{جـ}' & \frac{٣}{٤}\text{ب} - ٢\text{ب}' & \frac{٣}{٤}\text{ا} - ٢\text{ا}' \end{bmatrix}$

[٦] $\underline{\text{ا}} = \begin{bmatrix} \text{ا}_{١٢} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{٢١} \\ \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٣١} \end{bmatrix}$

٦ - ٢ بعض المصفوفات الخاصة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف

- يعرّف المصفوفة المستطيلة ، والصفرية ، والمربعة ، والوحدة ، المثلثية.
- يكتب مصفوفة مربعة أو قطرية بمعلومية عناصر القطر.
- يميّز بعض المصفوفات الخاصة.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : بعض المصفوفات الخاصة.

الحصة الثانية : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

اكتب المصفوفات الآتية :

أ) مصفوفة مستطيلة.

ب) مصفوفة مثلثية، علوية أو مثلثية .

جـ) مصفوفة قطرية.

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ٢)

[١] تعتمد على الإجابات المقدّمة من الطلبة.

[٢] أ) س مصفوفة وحدة من الشكل ٣ × ٣ ب) ص مصفوفة مستطيلة من الشكل ٢ × ٣

جـ) أ مصفوفة صف من الشكل ١ × ٤ د) ع مصفوفة عمود من الشكل ٣ × ١

هـ) ل مصفوفة مثلثية ٤ × ٤ و) حـ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية أو من الشكل ٢×٢

ز) ب مصفوفة قطرية من الشكل ٣ × ٣ أو من الرتبة ٣

[٣]
$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٠ & ٥ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} ، \quad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٥ \\ ٠ & -٢ & ٠ \\ ٩ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

[٤]
$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٢ & ٥ \\ ٥ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

[٥]
$$\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

[٦] المصفوفة من الشكل ٣ × ٤

$$\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١٤} & \text{ب}_{١٣} & \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{١١} \\ \text{ب}_{٢٤} & \text{ب}_{٢٣} & \text{ب}_{٢٢} & \text{ب}_{٢١} \\ \text{ب}_{٣٤} & \text{ب}_{٣٣} & \text{ب}_{٣٢} & \text{ب}_{٣١} \end{bmatrix}$$

$\text{ب}_{\text{هـو}}$ = ٢ هـ + و

$\text{ب}_{١١}$ = ٢ × ١ + ١ = ٢ + ١ = ٣ ، $\text{ب}_{١٢}$ = ٢ + ٢ = ٤ ، $\text{ب}_{١٣}$ = ٢ + ٣ = ٥

$\text{ب}_{١٤}$ = ٢ + ٤ = ٦ ، $\text{ب}_{٢١}$ = ٢ × ٢ + ١ = ٥ ، $\text{ب}_{٢٣}$ = ٧ ، $\text{ب}_{٢٤}$ = ٨ وهكذا . . .

$$\therefore \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ٦ & ٥ \\ ١٠ & ٩ & ٨ & ٧ \end{bmatrix}$$

٦ - ٣ جمع وطرح المصفوفات

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

- يذكر شرط جمع مصفوفتين وطرحهما .
- يجمع مصفوفتين.
- يطرح مصفوفة من مصفوفة أخرى .
- يستنتج أن جمع المصفوفات عملية إبدالية ، تجميعية.
- يوجد النظير الجمعي لمصفوفة.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى: جمع المصفوفات.

الحصة الثانية: طرح المصفوفات.

الحصة الثالثة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد ناتج :

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١ \\ \frac{١}{٣} & -٢ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -١,٥ \\ -٠,٤ & -٣,١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢,٤ & ٠ & ٣,٥ \\ ٩,١ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$.

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ٣)

[١] أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -١ & -١ \\ -٥ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ -١ & -٧ & ٠ \\ ٠ & -١ & -٤ \end{bmatrix}$.

جـ) الجمع غير ممكن ، د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٥ & -١ \end{bmatrix}$.

هـ) $\begin{bmatrix} \text{٣جـ} & \text{-ب} & ١٢ \\ \text{٢و} & \text{٤هـ} & ٠ \end{bmatrix}$ ، و) $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ز) $\begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$

[٢] أ) ا − ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$.   ب) جـ − ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$

جـ) ا + جـ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$.   د) ا − (جـ − ب) = $\begin{bmatrix} ٤- & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

هـ) (ا − ب) + جـ = $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$.

[٣]

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٩ \\ ٣ & ١٠ & ٣ \\ ٣- & ١١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢- & ٥ & ١- \\ ٩- & ٠ & ٩ \\ ١١- & ٧- & ٠ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ & ١٣ \\ ٠ & ١٥ & ٩ \\ ١٠- & ١٣ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٩ & ٠ & ٩- \\ ١١ & ٧ & ٠ \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣- & ٥ & ٦ \\ ٧- & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

[٤] س = ٣ ، ع = ٠ ، ص = ١ .

[٥] $س_{١}$ = ٦ ، $س_{٢}$ = ٩ ، $س_{٣}$ = ٢ ، $س_{٤}$ = ٤ .

[٦] أ) $س_{١١}$ = − ١ ، $س_{١٢}$ = ٣ ، $س_{٢١}$ = −٢ ، $س_{٢٢}$ = ٠

∴ س = $\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$

ب) $ص_{١١}$ = − ٤ ، $ص_{١٢}$ = ١ ، $ص_{٢١}$ = − ٣ $ص_{٢٢}$ = − ٧

∴ ص = $\begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٣- & ٧- \end{bmatrix}$

٦ − ٤ ضرب المصفوفات والعمليات عليها

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

- يعرّف ضرب مصفوفة بعدد حقيقي .
- يضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
- يعرّف حاصل ضرب مصفوفتين ، ويذكر شرط ضربهما .
- يستنتج خواص المصفوفات المربعة .
- يوجد مصفوفة الوحدة .
- يوجد مدور مصفوفة .
- يوجد ضرب مصفوفة في نفسها .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى: ضرب مصفوفة وخواص الضرب في عدد حقيقي .

الحصتان الثانية والثالثة : ضرب المصفوفات .

الحصة الرابعة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

إذا كانت :

ا = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣- \\ ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

أوجد أولاً : ا . ب   ثانياً : [ا']

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ − ٤)

[١] أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$

[٢] أ) $\begin{bmatrix} ٢٢ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

[٣] أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٨ \\ ٠ & ١٠- & ١٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} & \frac{٤}{٣} \\ ٠ & -\frac{٥}{٣} & ٢ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ٣- & ٦- & ١٢- \\ ٠ & ١٥ & ١٨- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٥- \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$

[٤] أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ١- \\ ٠ & ٧- \end{bmatrix}$ ، ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٩- & ٧- \end{bmatrix}$ ، جـ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ١- \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

[٥] أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٣ & ٥- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٩- \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤- \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٩ & ٦ & ١٢- \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ & ٧ \\ ٢ & ٢٥ & ١٦ \\ ٥ & ١ & ١٠ \end{bmatrix}$ و) $\begin{bmatrix} ١٣- \end{bmatrix}$

ز) $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \\ ٤- \end{bmatrix}$ ح) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ١ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ط) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

[٦] $\underline{ع} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $-٢\underline{ع} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٠ & ٦- \end{bmatrix}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $-٣\underline{و} = \begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix}$

وبالتعويض في الطرف الأيمن :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٠ & ٦- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{٠}$$

[٧] أ) √ ب) × جـ) √

٦ - ٥ المحددات

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

- يوجد قيمة محددة من الرتبة الثانية ومن الرتبة الثالثة.
- يتعرف خواص المحددات.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المحددة من الرتبة الثانية والثالثة.

الحصة الثانية : خواص المحددات.

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

أوجد قيمة المحددة التالية :

$$\begin{vmatrix} ١- & ٢- & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ٣- & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

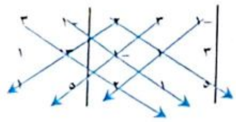
إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ٥)

[١] (أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = (٢ \times ٧) - (٥ \times ٣) = ١٤ - ١٥ = ١-$

(ب) $\begin{vmatrix} ٢- & ٣ \\ ٥- & ٤- \end{vmatrix} = (٢- \times ٤-) - (٣ \times ٥-) = ٨ + ١٥ = ٢٣$

(جـ) $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = (أ \times د - ب \times جـ) = أد - ب\,جـ$.

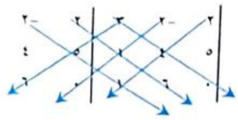
(د)



$= [(-1\times1\times2)+(3\times-1\times5)+(2\times3\times1)] - [(2\times1\times5)+(-1\times-1\times1)+(3\times3\times2)]$

$= (-2-15+6)-(10+1+18) = -11-29 = -40$

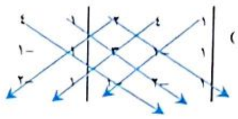
(هـ)



$= [(2\times4\times1)+(-2\times1\times0)+(3\times5\times6)] - [(3\times4\times0)+(2\times1\times6)+(-2\times5\times1)]$

$= (8+0+90)-(0+12-10) = 98-2 = 96$

(و)



$= [(1\times-1\times-1)+(4\times3\times1)+(2\times1\times-2)] - [(2\times-1\times1)+(1\times3\times-2)+(4\times1\times-1)]$

$= (1+12-4)-(-2-6-4) = 9+12 = 21$

[٢] معنى أن المصفوفة منفردة أي تكون محددتها = ٠

(أ) $\begin{vmatrix} \text{س} & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$(2\text{س}-6)=0 \Leftarrow 2\text{س}=6 \Leftarrow \text{س}=3$

(ب) $\begin{vmatrix} \text{س} & 4 \\ 4 & \text{س} \end{vmatrix} = 0$

$\text{س}^2-16=0 \Leftarrow \text{س}^2=16 \Leftarrow \text{س}=\pm4$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{س}^2 & 36 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\text{س}^2-36=0 \Leftarrow \text{س}=\pm6$

(د) $\begin{vmatrix} \text{س}-2 & 4 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} = 0$

$[(\text{س}-2)\times\text{س}-4\times2]=0 \Leftarrow \text{س}^2-2\text{س}-8=0$

$(\text{س}-4)(\text{س}+2)=0 \Leftarrow \text{س}=4 \text{ ، } \text{س}=-2$

(هـ) $\begin{vmatrix} \text{س}-1 & 2 \\ 2 & \text{س}-1 \end{vmatrix} = 0$

$[(\text{س}-1)(\text{س}-1)-2\times2]=0 \Leftarrow \text{س}^2-2\text{س}+1-4=0$

$\text{س}^2-2\text{س}-3=0 \Leftarrow (\text{س}-3)(\text{س}+1)=0 \Leftarrow \text{س}=3 \text{ أو } \text{س}=-1$

[٣]:

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -9 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 6\left[2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] = 6[2(-3-2)-(1-4)-(1+6)]$

$= 6(-10+3-7) = 6(-14) = -84$

(ب) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 2\times3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6\left[1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\right]$

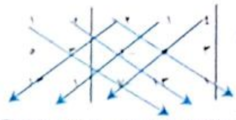
$= 6[(1)(14-15)+2(9-10)] = 6(-1-2) = -18$

(جـ) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3\times4\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 12\left[1\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] = 12[(-7-2)-8(2-2)-(-2-7)]$

$= 12(-9+9) = 0$

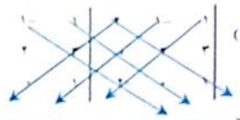
د)



[(٧-×٣×١) + (١٣×١-×٤) + (١×٥×٢)] - [(١٣×٣×٢) + (١×١-×١) + (٧-×٥×٤)] =

٠ = ٦٣ + ٦٣- = (٦٣-) - (٦٣-) = (٢١ - ٥٢ - ١٠) - (٧٨ + ١ - ١٤٠-) =

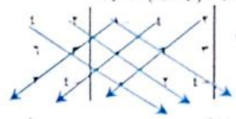
هـ)



[(٢-×٣×١-) + (٠×٠×١) + (١×٢×٢)] - [(٠×٣×٢) + (١×٠×١-) + (٢-×٢×١)] =

١٤- = (٦ + ٤) - ٤- =

و)



٣٠- = ٢٤ - ٦- =

[٤] : أولاً باستخدام طريقة سيروس وثانياً : باستخدام طريقة بيروت :

أ)

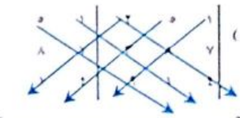
١- = ٧ + ٨- = (٩-٢) - (١+٩-) =

بفك المحددة مستخدمين الصف الأول .

$$\begin{vmatrix}٠&١-\\١-&٣\end{vmatrix}١+\begin{vmatrix}١-&١-\\٣&٣\end{vmatrix}٣-\begin{vmatrix}١-&٠\\٣&١-\end{vmatrix}٢-=\begin{vmatrix}١&٣&٢\\١-&٠&١-\\٣&١-&٣\end{vmatrix}$$

١- = ١ + ٢- = (١)١ + (٣+٣-)٣ - (١-)٢ =

ب)



[(٩×٧×٥) + (١×٣×١) + (٤×٨×٢)] - [(١×٧×٢) + (٤×٣×٥) + (٩×٨×١)] =

٢٣٦- = ٢٨٢ - ١٤٦ = (٣١٥ + ٣ + ٦٤) - (١٤ + ٦٠ + ٧٢) =

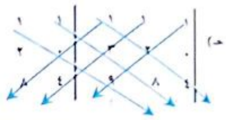
بفك المحددة مستخدمين العمود الأول .

$$\begin{vmatrix}٢&٥\\٣&٨\end{vmatrix}٤+\begin{vmatrix}٢&٥\\٩&١\end{vmatrix}٧-\begin{vmatrix}٣&٨\\٩&١\end{vmatrix}١=\begin{vmatrix}٢&٥&١\\٣&٨&٧\\٩&١&٤\end{vmatrix}$$

(١٦-١٥)٤ + (٢-٤٥)٧- (٣-٧٢) =

٢٣٦- = ٣٠٥ - ٦٩ = ٤ - ٣٠١ - ٦٩ =

جـ)



[(٩×٠×١) + (٨×٣×١) + (٤×٢×١)] - [(٨×٠×١) + (٤×٣×١) + (٩×٢×١)] =

٢- = ٣٢ - ٣٠ = (٢٤ + ٨) - (١٢ + ١٨) =

بفك المحددة مستخدمين العمود الأول .

$$\begin{vmatrix}١&١\\٣&٢\end{vmatrix}٤+\begin{vmatrix}١&١\\٩&٨\end{vmatrix}٠-\begin{vmatrix}٣&٢\\٩&٨\end{vmatrix}١=\begin{vmatrix}١&١&١\\٣&٢&٠\\٩&٨&٤\end{vmatrix}$$

٢- = ٤ + ٦- = (٢-٣)٤ + ٠ + (٢٤-١٨) =

٦ - ٦ المعكوس الضربي للمصفوفات

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف

- يوجد المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة غير منفردة .

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في حصتين على النحو التالي :

الحصة الاولى : معكوس المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية والثالثة.

الحصة الثانية : تمارين صفية .

التقويم

يكون التقويم بنائياً من خلال متابعة حل الأمثلة والتدريبات الصفية ومناقشة تمارين الواجب ويعطى هذا التمرين أو تمريناً مماثلاً له كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثانية :

أوجد معكوس المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

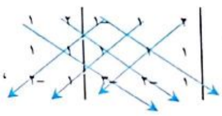
إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ٦)

[١] يكون للمصفوفة معكوس إذا كانت غير منفردة (أي محددتها $\neq$ ٠)

(أ) $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٢ - ١٢ = ٠ ، $\therefore$ لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{vmatrix}$ = ١٥ + ٨ = ٢٣ $\neq$ ٠ ، $\therefore$ يوجد معكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٢٨ $\neq$ ٠ ، $\therefore$ يوجد معكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

(د)  = (-٦+١+٢) - (-١-٤-٣) = -٣ + ٨ = ٥ $\neq$ ٠ ، $\therefore$ يوجد معكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣- & ٢- & ١ \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\therefore$ لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٨ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

(و) $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \\ ٠ & ١٢ & ٦ \\ ٢ & ١٨ & ٩ \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\therefore$ لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٣ \\ ٠ & ١٢ & ٦ \\ ٢ & ١٨ & ٩ \end{bmatrix}$

[٢] $\because$ المصفوفة $\times$ المعكوس الضربي = مصفوفة الوحدة .

$\therefore$ لإثبات أن كل مصفوفة هي نفسها معكوسها يتم ضرب المصفوفة $\times$ نفسها فإذا حصلنا على مصفوفة الوحدة كانت كل مصفوفة هي نفسها عكسها .

(أ) $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-\times١- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠\times٠+١\times١ & ١-\times٠+٠\times١ \\ ٠\times١-+١\times٠ & ١-\times١-+٠\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-\times١-+٠\times٠ & ٠\times١-+١-\times٠ \\ ١-\times٠+٠\times١- & ٠\times٠+١-\times١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} ١ & س \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & س \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times١+س\times٠ & ١\times س+س\times١- \\ ٠\times١+١-\times٠ & ٠\times س+١-\times١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

[٣] (أ) (١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = - ٣ - ٣ = -٦

(٢) نبدّل عناصر القطر الرئيسي ونعكس إشارات عناصر القطر الثانوي

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١- & ١- \end{bmatrix}$$

(٣) نضرب الناتج في $\frac{١}{\Delta}$ فتكون $\underline{س}^{-١} = \frac{١}{٦-}\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١- & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$

(ب) (١) $\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{vmatrix} = ٢$.

(٢) نبدّل عناصر القطر الرئيسي ونعكس إشارات عناصر القطر الثانوي

$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، ∴ $ص^{-1} = \frac{1}{٢} \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -\frac{1}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$

(حـ) $س^{-1} \cdot ص^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{٢} & \frac{٢}{٢} \\ \frac{1}{٦} & \frac{1}{٦} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \frac{1}{٢} & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٥}{٤} & -\frac{1}{٢} \\ \frac{1}{٤} & \frac{1}{٦} \end{bmatrix}$

(د) $(س\ ص) = \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

$(س\ ص)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}^{-1}$ ولإيجاد ذلك نتبع الآتي :

(١) $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١٤ \\ ٣ & ١٠ \end{vmatrix} = ٣٠ - ٤٢ = -١٢$.

(٢) $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٤- \\ ٣- & ٣ \end{bmatrix}$

(٣) ∴ $(س\ ص)^{-1} = \frac{-1}{١٢} \begin{bmatrix} ١٠ & ١٤- \\ ٣- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٥}{٦} & \frac{٧}{٦} \\ \frac{1}{٤} & -\frac{1}{٤} \end{bmatrix}$

من (حـ) ، (د) نستنتج أن : $(س \cdot ص)^{-1} \neq ص^{-1} \cdot س^{-1}$

[٤] $\Delta = \begin{vmatrix} أ & أب \\ ٠ & ب \end{vmatrix} = أ ب \neq ٠$.

∴ $ص^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ب & -أب \\ ٠ & أ \end{bmatrix} = \frac{1}{أب} \begin{bmatrix} ب & -أب \\ ٠ & أ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{أ} & ١- \\ ٠ & \frac{1}{ب} \end{bmatrix}$

[٥] لكي يكون للمصفوفة معكوس لابد أن تكون $\Delta \neq ٠$.

(أ) $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ - ١٥ = ٠$ ، ∴ لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{vmatrix} = ٢٨ - ٢٧ = ١$ ، ∴ يوجد معكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$

∴ $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣- \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$

(حـ) $\begin{vmatrix} جتاهـ & جاهـ \\ -جاهـ & جتاهـ \end{vmatrix} = جتا^2هـ + جا^2هـ = ١$ ، ∴ $\begin{bmatrix} جتاهـ & جاهـ \\ -جاهـ & جتاهـ \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} جتاهـ & -جاهـ \\ جاهـ & جتاهـ \end{bmatrix}$

(د) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٣ \neq ٠$ ، ∴ يوجد معكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

لإيجاد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ نتبع الآتي :

(١) نوجد $\Delta = ٣$

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$\Delta_{١١} = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ٦ = ٦$ ، $\Delta_{٢١} = -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = -(٤ - ٣) = -١$

$\Delta_{٣١} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ - ٣ = -١$ ، $\Delta_{١٢} = -\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = -(٨ - ٢) = -٦$

$\Delta_{٢٢} = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ١ = ٣$ ، $\Delta_{٣٢} = -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = -(٢ - ٢) = ٠$

$\Delta_{١٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ - ٣ = ٣$ ، $\Delta_{٢٣} = -\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = -(٣ - ١) = -٢$

$\Delta_{٣٣} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٢ = ١$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٦ & ١- & ١- \\ ٦- & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٢- & ١ \end{bmatrix}$

المصفوفة المساعدة = $\overline{\underline{م}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٦- & ٣ \\ ١- & ٣ & ٢- \\ ١- & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ $\underline{س}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ٦ & ٦- & ٣ \\ ١- & ٣ & ٢- \\ ١- & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \frac{1}{٣} \begin{bmatrix} ٦ & ٦- & ٣ \\ ١- & ٣ & ٢- \\ ١- & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢- & ١ \\ -\frac{1}{٣} & ١ & -\frac{٢}{٣} \\ -\frac{1}{٣} & ٠ & \frac{1}{٣} \end{bmatrix}$

(١)

هـ) $\Delta =$ 

$[(٨×٢×٠) + (١×٣×١) + (٤×١-×١)] - [(١×٢×١) + (٤×٣×٠) + (٨×١-×١)] =$

$٠ \neq ٥- = ١ + ٦- = (٣ + ٤-) - (٢ + ٨-) =$ ، ∴ يوجد لها معكوس .

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$١١- = ٣ - ٨- = \begin{vmatrix} ٣ & ١- \\ ٨ & ١ \end{vmatrix} = \Delta_{١١}$ ، $٤- = (١٢ - ١٦) - = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} - = \Delta_{٢١}$

$٦ = ٤ + ٢ = \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta_{٣١}$ ، $١ = \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix} - = \Delta_{١٢}$

$٤ = ٤ - ٨ = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta_{٢٢}$ ، $١- = \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} - = \Delta_{٣٢}$

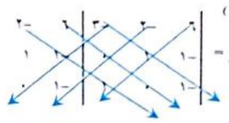
$١ = \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{١٣}$ ، $١- = (٢ - ٣) - = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} - = \Delta_{٢٣}$

$١- = \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = \Delta_{٣٣}$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤- & ١١- \\ ١- & ٤ & ١ \\ ١- & ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، المصفوفة المساعدة = $\tilde{م} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١١- \\ ١- & ٤ & ٤- \\ ١- & ١- & ٦ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{٥}- & \frac{١-}{٥} & \frac{١١}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{٤-}{٥} & \frac{٤}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{٦-}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١١- \\ ١- & ٤ & ٤- \\ ١- & ١- & ٦ \end{bmatrix} \frac{١}{٥-} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٣ & ١- & ٢ \\ ٨ & ١ & ٤ \end{bmatrix}^{١-} \therefore$$

(١)

و) $\Delta =$ 

$[(١×١-×٢-) + (٠×٠×٦) + (١-×١×٣-)] - [(٠×١-×٣-) + (١-×٠×٢-) + (١×١×٦)] = \Delta$

$٠ \neq ١ = ٥ - ٦ = (٢ + ٣) - (٦) =$ ، ∴ يوجد لها معكوس .

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$١ = \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = \Delta_{١١}$ ، $١ = \begin{vmatrix} ٠ & ١- \\ ١ & ١- \end{vmatrix} - = \Delta_{٢١}$

$١ = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{٣١}$ ، $٢ = \begin{vmatrix} ٣- & ٢- \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - = \Delta_{١٢}$

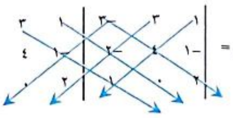
$٣ = ٣ - ٦ = \begin{vmatrix} ٣- & ٦ \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{٢٢}$ ، $٢ = \begin{vmatrix} ٢- & ٦ \\ ٠ & ١- \end{vmatrix} - = \Delta_{٣٢}$

$٣ = \begin{vmatrix} ٣- & ٢- \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = \Delta_{١٣}$ ، $٣ = \begin{vmatrix} ٣- & ٦ \\ ٠ & ١- \end{vmatrix} - = \Delta_{٢٣}$

$٤ = ٢ - ٦ = \begin{vmatrix} ٢- & ٦ \\ ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{٣٣}$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ∴ المصفوفة المساعدة = $\tilde{م} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \frac{١}{١} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢- & ٦ \\ ٠ & ١ & ١- \\ ١ & ٠ & ١- \end{bmatrix}^{١-} \therefore$$

م) $\Delta =$ 

$[(١×١-×٣) + (٠×٢-×١) + (٢×٤×٣-)] - [(٠×١-×٣-) + (٢×٢-×٣) + (١×٤×١)] = \Delta$

$٠ \neq ١٩ = ٢٧ + ٨- = (٣ - ٢٤-) - (١٢ - ٤) =$ ، ∴ يوجد معكوس للمصفوفة .

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$٤ = \begin{vmatrix} ٢- & ٤ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = \Delta_{١١}$ ، $٣- = (٤ + ١-) - = \begin{vmatrix} ٢- & ١- \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} - = \Delta_{٢١}$

$٨- = \begin{vmatrix} ٤ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \Delta_{٣١}$ ، $٣- = \begin{vmatrix} ٣- & ٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - = \Delta_{١٢}$

$٧ = ٦ + ١ = \begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = \Delta_{٢٢}$ ، $٦ = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} - = \Delta_{٣٢}$

$٦ = ١٢ + ٦- = \begin{vmatrix} ٣- & ٣ \\ ٢- & ٤ \end{vmatrix} = \Delta_{١٣}$ ، $٥ = (٣ - ٢-) - = \begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ٢- & ١- \end{vmatrix} - = \Delta_{٢٣}$

$٧ = ٣ + ٤ = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} = \Delta_{٣٣}$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & -٨ \\ -٣ & ٧ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، المصفوفة المساعدة = $\overline{\underline{م}} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ٦ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ -٨ & ٦ & ٧ \end{bmatrix}$

∴ معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & -٣ \\ -١ & ٤ & -٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \frac{١}{١٩} \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ٦ \\ -٣ & ٧ & ٥ \\ -٨ & ٦ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{١٩} & \frac{-٣}{١٩} & \frac{٦}{١٩} \\ \frac{-٣}{١٩} & \frac{٧}{١٩} & \frac{٥}{١٩} \\ \frac{-٨}{١٩} & \frac{٦}{١٩} & \frac{٧}{١٩} \end{bmatrix}$

ن) (١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{matrix}$

$\Delta = [(١ \times ٠ \times ٢) + (٢ \times ٤ \times ٠) + (٣ \times -١ \times ٢)] - [(٣ \times ٠ \times ٠) + (١ \times ٤ \times ٢) + (٢ \times -١ \times ٢)]$

$= (-٦) - (٨ - ٤) = -١٠$

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$\Delta_{١١} = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٨$ ، $\Delta_{٢١} = -\begin{vmatrix} -١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$

$\Delta_{٣١} = \begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = -٢$ ، $\Delta_{١٢} = -\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -(٤ - ٦) = ٢$

$\Delta_{٢٢} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ ، $\Delta_{٣٢} = -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = -٢$

$\Delta_{١٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٨$ ، $\Delta_{٢٣} = -\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = -(٤ + ٣) = -٧$

$\Delta_{٣٣} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} = ٢$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٨ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ٢ & -٢ \\ ٨ & -٧ & ٢ \end{bmatrix}$ ، المصفوفة المساعدة = $\overline{\underline{م}} = \begin{bmatrix} -٨ & ٢ & ٨ \\ ٢ & ٢ & -٧ \\ -٢ & -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}^{-١} = -\frac{١}{١٠} \begin{bmatrix} -٨ & ٢ & ٨ \\ ٢ & ٢ & -٧ \\ -٢ & -٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{٥} & \frac{-١}{٥} & -\frac{٤}{٥} \\ \frac{-١}{٥} & \frac{-١}{٥} & \frac{٧}{١٠} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{-١}{٥} \end{bmatrix}$

ع) (١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{matrix}$

$\Delta = [(١ \times ٥ \times ٩) + (٢ \times ٦ \times ٧) + (٣ \times ٤ \times ٨)] - [(٣ \times ٥ \times ٧) + (١ \times ٦ \times ٨) + (٢ \times ٤ \times ٩)]$

$= (٤٥ + ٨٤ + ٩٦) - (١٠٥ + ٤٨ + ٧٢) = ٢٢٥ - ٢٢٥ = ٠$

∵ $\Delta = ٠$ ، ∴ لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$

ي) (١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix} \begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{matrix}$

$\Delta = [(١ \times ٥ \times ٩) + (٢ \times ٣ \times ٧) + (٢ \times ٤ \times ٨)] - [(٢ \times ٥ \times ٧) + (١ \times ٣ \times ٨) + (٢ \times ٤ \times ٩)]$

$= (٤٥ + ٤٢ + ٦٤) - (٧٠ + ٢٤ + ٧٢) = (١٥١ - ١٦٦) = -١٥ \neq ٠$ ، ∴ يوجد لها معكوس .

(٢) نوجد مصفوفة المرافقات :

$\Delta_{١١} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٨ & ٩ \end{vmatrix} = ٤٥ - ٢٤ = ٢١$ ، $\Delta_{٢١} = -\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} = -(٣٦ - ٢١) = -١٥$

$\Delta_{٣١} = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} = ٣٢ - ٣٥ = -٣$ ، $\Delta_{١٢} = -\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ٩ \end{vmatrix} = -(١٨ - ١٦) = -٢$

$\Delta_{٢٢} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} = ٩ - ١٤ = -٥$ ، $\Delta_{٣٢} = -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} = -(٨ - ١٤) = ٦$

$\Delta_{١٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ - ١٠ = -٤$ ، $\Delta_{٢٣} = -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -(٣ - ٨) = ٥$

$\Delta_{٣٣} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٥ - ٨ = -٣$

∴ مصفوفة المرافقات = $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢١ & -١٥ & -٣ \\ -٢ & -٥ & ٦ \\ -٤ & ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ ، المصفوفة المساعدة = $\overline{\underline{م}} = \begin{bmatrix} ٢١ & -٢ & -٤ \\ -١٥ & -٥ & ٥ \\ -٣ & ٦ & -٣ \end{bmatrix}$

∴ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}^{-١} = -\frac{١}{١٥} \begin{bmatrix} ٢١ & -٢ & -٤ \\ -١٥ & -٥ & ٥ \\ -٣ & ٦ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٧}{٥} & \frac{٢}{١٥} & \frac{٤}{١٥} \\ ١ & \frac{١}{٣} & \frac{-١}{٣} \\ \frac{١}{٥} & \frac{-٢}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$

٦ - ٧ حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يحل نظام معادلتين خطيتين في متغيرين باستخدام المصفوفات والمحددات.
- يحل نظام معادلات خطية في ثلاث متغيرات باستخدام المصفوفات والمحددات.

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: حل نظام معادلتين خطيتين في متغيرين .

الحصة الثانية: حل نظام ثلاث معادلات خطية في ثلاث متغيرات .

الحصة الثالثة: تمارين ومسائل صفية .

التقويم

يكون التقويم بنائياً من خلال مناقشة الأمثلة ومتابعة حل التدريبات الصفية وحل تمارين الواجب، ويعطى التمرين التالي أو مشابهاً كخطوة تقويم في نهاية الحصة الثالثة:

حل نظام المعادلات التالية باستخدام المحددات:

$\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = 3$ ، $\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = 1$ ، $\text{س} + \text{ص} - 2\text{ع} = 0$

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ - ٧)

[١] **أولاً** : لحل نظام معادلتين باستخدام المصفوفات نكتب المعادلتين على صورة مصفوفات .

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

نوجد $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 10 = 7$

نوجد $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة في (١) في المصفوفة العكسية

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \text{، } \therefore \Leftarrow \text{س} = \frac{4}{7} \text{ ، ص} = \frac{1}{7} .$$

للتحقق من صحة الحل نعوّض عن قيمتي س ، ص في المعادلتين كما سبق دراسته في التعليم الأساسي .

$3\text{س} - 5\text{ص} = 1$

$3 \times \frac{4}{7} - 5 \times \frac{1}{7} = 1$

$\frac{12}{7} - \frac{5}{7} = 1$

$\frac{7}{7} = 1$

$1 = 1$

، بالمثل :

$2\text{س} - \text{ص} = 1$

$2 \times \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = 1$

$\frac{8}{7} - \frac{1}{7} = 1$

$\frac{7}{7} = 1$.

$1 = 1$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -14$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{س} = 1 \text{ ، ص} = 1$

(جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\therefore \text{س} = 4$ ، $\text{ص} = -1$.

(د) $\begin{bmatrix}2&-3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$ ، $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}=11$

$$\begin{bmatrix}2&-3\\3&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}1&3\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&\frac{3}{11}\\\frac{-3}{11}&\frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&\frac{3}{11}\\\frac{-3}{11}&\frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&\frac{3}{11}\\\frac{-3}{11}&\frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{11}+\frac{9}{11}&\frac{-3}{11}+\frac{3}{11}\\\frac{-6}{11}+\frac{6}{11}&\frac{9}{11}+\frac{2}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{11}+\frac{3}{11}\\\frac{-24}{11}+\frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\Leftarrow \text{س}=1 \text{ ، } \text{ص}=-2$$

(هـ) $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$ ، $\Delta=\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-5$

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-1&-1\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-3}{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-3}{5}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5}&\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\\\frac{6}{5}-\frac{6}{5}&\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}+\frac{7}{5}\\\frac{6}{5}-\frac{21}{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\Leftarrow \text{س}=2 \text{ ، } \text{ص}=-3$$

(و) $\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\-3\end{bmatrix}$ ، $\Delta=\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}=-1$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\15\end{bmatrix}\Leftarrow \text{س}=12 \text{ ، } \text{ص}=15 .$$

ثانياً : لحل المعادلات باستخدام المحددات :

أ) (١) نكتب المعادلتين بصورة مصفوفات كالتالي : $\begin{bmatrix}3&-5\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(٢) نحسب Δ للمصفوفة $\begin{bmatrix}3&-5\\2&-1\end{bmatrix}$ فتكون :

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-5\\2&-1\end{vmatrix}=-3+10=7$$

(٣) نوجد Δ س والتي نحصل عليها بوضع الثابتين بدلاً من معاملي س في محدّدة مصفوفة المعاملات Δ .

$$\Delta_{\text{س}}=\begin{vmatrix}1&-5\\1&-1\end{vmatrix}=-1+5=4$$

(٤) نوجد Δ ص والتي نحصل عليها بوضع الثابتين بدلاً من معاملي ص في محدّدة مصفوفة المعاملات Δ .

$$\Delta_{\text{ص}}=\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}=3-2=1$$

$$\therefore \text{س}=\frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}=\frac{4}{7} \quad \text{،} \quad \text{ص}=\frac{1}{7}$$

وللتحقق من صحة الحل نعوض عن قيمتي س ، ص في المعادلتين :

$3\text{س}-5\text{ص}=1$

$3\times\frac{4}{7}-5\times\frac{1}{7}=1$

$\frac{12}{7}-\frac{5}{7}=1$

$\frac{7}{7}=1$

$1=1$

الطرف الأيمن = الأيسر

المعادلة الثانية :

$2\text{س}-\text{ص}=1$

$2\times\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=1$

$\frac{8}{7}-\frac{1}{7}=1$

الطرفان متساويان

ب) $\begin{bmatrix}1&4\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\\text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&4\\3&-2\end{vmatrix}=-2-12=-14$$

$$\Delta_{\text{س}}=\begin{vmatrix}5&4\\1&-2\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

$$\Delta_{\text{ص}}=\begin{vmatrix}1&5\\3&1\end{vmatrix}=1-15=-14$$

$$\therefore \text{س}=\frac{-14}{-14}=1 \quad \text{،} \quad \text{ص}=\frac{-14}{-14}=1$$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 5 = -8$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2$

$\therefore \text{س} = \frac{-8}{-2} = 4$ ، $\text{ص} = \frac{2}{-2} = -1$

د) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 = 11$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$

$\therefore \text{س} = \frac{11}{11} = 1$ ، $\text{ص} = \frac{-22}{11} = -2$

هـ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 15$

$\therefore \text{س} = \frac{-10}{-5} = 2$ ، $\text{ص} = \frac{15}{-5} = -3$

و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -12$ ، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15$

$\therefore \text{س} = \frac{-12}{-1} = 12$ ، $\text{ص} = \frac{-15}{-1} = 15$

[٢] أ) لحل نظام المعادلات الخطية ذات المتغيرات الثلاثة نتبع الخطوات التالية :

أولاً : باستخدام المصفوفات :

نكتب المعادلات على صورة مصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

نحسب $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$

نوجد مصفوفة المرافقات $= \underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 \\ -1 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

المصفوفة المساعدة $= \overline{\underline{\text{م}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \\ -9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \\ -9 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -1 \\ 9 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -1 \\ 9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -1 \\ 9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = −٢ ، ع = ٣ .

ثانياً : باستخدام المحددات نتبع الخطوات التالية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad ، \quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad ، \quad \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1 \ ، \ \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2 \ ، \ \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3$$

تحقق من صحة الحل بالتعويض في المعادلات .

ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 23 \quad ، \quad \text{مصفوفة المرافقات} = \underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} 2 & 17 & 13 \\ 9 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{المصفوفة المساعدة} = \overline{\text{م}} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 17 & -4 & -3 \\ 13 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{23} & \frac{9}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{17}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} \\ \frac{13}{23} & \frac{1}{23} & \frac{-5}{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{23} & \frac{9}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{17}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} \\ \frac{13}{23} & \frac{1}{23} & \frac{-5}{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{23} & \frac{9}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{17}{23} & \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} \\ \frac{13}{23} & \frac{1}{23} & \frac{-5}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ٣ ، ص = ٢ ، ع = ١

ثانياً: باستخدام المحددات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix} \quad ، \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 23$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 12 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 69 \quad ، \quad \Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 12 & -7 \end{vmatrix} = 46$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 23$$

$$\therefore \text{س} = \frac{69}{23} = 3 \ ، \ \text{ص} = \frac{46}{23} = 2 \ ، \ \text{ع} = \frac{23}{23} = 1$$

جـ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \ ، \ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ نظام المعادلات مستحيل الحل بإستخدام المصفوفات حيث لا يوجدمعكوس للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

ثانياً : باستخدام المحددات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad ، \quad \Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 33 \quad ، \quad \Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 21$$

$\therefore$ نظام المعادلات مستحيل الحل باستخدام المحددات أيضاً .

د)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ، \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{bmatrix} \ ، \ \text{المصفوفة المساعدة} = \overline{\text{م}} = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{-16}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{-16}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{11}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{-16}{7} & \frac{10}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = -٣

باستخدام المحددات :

(ج) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$ ، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -14$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 21$

$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$ ، $\text{ص} = \frac{-14}{-7} = 2$ ، $\text{ع} = \frac{21}{-7} = -3$

٦ : ٨ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة.

تنفيذ الاختبار

يكلف المدرس طلبته بحل الاختبار الموجود في كتاب التمارين كعمل منزلي وكتهيئة لاختبار الوحدة ، وفي حصتي اختبار الوحدة يعطى المدرس الاختبار الموجود في الدليل والمحدّد بأهداف الوحدة ، ويعطى اختباراً آخراً من إعداده مراعياً التنوع لتحقيق كافة أهداف الوحدة كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٤ ، ٧
٢	٢ ، ٣ ، ٥
٣	٧ ، ٦
٤	٨

اختبار الوحدة

[١] ضع علامة (✓) أمام العبارة الصائبة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي :

أ) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين فإن حاصل ضربهما ممكناً دائماً . ( )

ب) إذا كانت س مصفوفة من الشكل ٣×٢ فإن عدد عناصرها يساوي خمسة . ( )

جـ) الشرط اللازم لكي يكون للمصفوفة معكوس ان تكون منفردة . ( )

د) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$. ( )

[٢] أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} 3\text{س}-1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 7 & \text{ص} \end{bmatrix}$ ، فاوجد قيمة س ، ص .

ب) إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

فاوجد : أ ب ، أ - ب ، ٣ب + ٤أ .

[٣] أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة التالية :

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

[٤] أوجد حل نظام المعادلات التالية :

٢س + ع = ص - ١ ، س - ع = ٢ ، س + ص = ٣

المصطلحات المستخدمة في الوحدة

١- مصفوفة	matrix	١٦- تساوي مصفوفتين	equal of matrices
٢- صفوف	rows	١٧- جمع المصفوفات	addition of matrices
٣- أعمدة	columns	١٨- طرح مصفوفتين	difference between matrices
٤- محورة المصفوفة	transpose of a matrix	١٩- ضرب المصفوفات	multiplication of matrices
٥- مصفوفة صف	row matrix	٢٠- ضرب مصفوفة بعدد حقيقي (الضرب القياسي)	Scalar multiplication
٦- مصفوفة عمود	column matrix	٢١- المحددات	Determinants
٧- مصفوفة مستطيلة	rectangular matrix	٢٢- مصفوفة منعزلة	Singular matrix
٨- مصفوفة مربعة	Square matrix	٢٣- مصفوفة غير منعزلة	non-singular matrix
٩- مصفوفة من نوع (م×ن)	matrix of type (mxn)	٢٤- المصفوفة المرتبطة	adjoint matrix
١٠- رتبة المصفوفة (المربعة)	order of (squar) matrix	٢٥- المعكوس الضربي للمصفوفات.	Inverse of a matrices
١١- مصفوفة قطرية	diagonal matrix		
١٢- القطر الرئيسي للمصفوفة	Principal diagonal of matrix		
١٣- عناصر المصفوفة	elements of matrix		
١٤- مصفوفة الوحدة	Identity matrix		
١٥- المصفوفة الصفرية	Zero matrix		

المراجع

- قاسم محمد النعيمي، مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها .
- م. عاطف منصور ، مكتبة الأسرة في الرياضيات ، (الجزء الثالث) .
- د . عدنان عوض ، الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية ، الجامعة الأردنية ، دار الفرقان .

الوحدة السابعة

الهندسة الإحداثية

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٧ - ١	معادلة الدائرة	٧
٧ - ٢	الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة	٤
٧ - ٣	معادلة المماس لدائرة	٨
٧ - ٤	طول المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها	٣
٧ - ٥	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢٤

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

١ - يستنتج معادلة الدائرة التي مركزها (ا ،ب) وطول نصف قطرها نق.
٢ - يستنتج معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق.
٣ - يميّز معادلة الدائرة.
٤ - يوجد معادلة دائرة عُلم مركزها وطول نصف قطرها.
٥ - يوجد مركز دائرة وطول نصف قطرها إذا عُلمت معادلتها.
٦ - يوجد معادلة الدائرة إذا علم مركزها ونقطة عليها.
٧ - يوجد معادلة دائرة بمعلومية إحداثيات طرفي قطرها.
٨ - يتحقّق من انتماء نقطة إلى دائرة معلومة معادلتها.
٩ - يوجد معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط.
١٠- يوجد نقطتي تقاطع مستقيم معلوم مع دائرة معلومة.
١١- يوجد معادلة المماس لدائرة بمعلومية معادلة الدائرة ونقطة التماس.
١٢- يتحقّق من أن مستقيماً معلوماً يمس دائرة معلومة.
١٣- يوجد معادلة مماس معلوم الميل لدائرة معلومة معادلتها.
١٤- يوجد معادلة المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها معلومة معادلتها.
١٥- يوجد طول مماس لدائرة معيّنة من نقطة خارجة عنها.

المقدمة

تعالج هذه الوحدة مستوى متقدم من الهندسة ، وتربط بين المفاهيم الأساسية للدائرة من المستوى الإقليدي إلى المستوى الديكارتي ، فتعطي بذلك معادلات جبرية للدائرة ومماسها وما يتعلق بذلك من مفاهيم هندسية في قالبها الجبري . .

لمحة تاريخية

أدرك البابليون منذ ٢٢٠٠ قبل الميلاد أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة ، واستطاعوا أن يقيسوا حجم الاسطوانة ٣ $ق^{٢}$ع (حيث ق قطر الدائرة) ، إذا اعتبر البابليون العدد ٣ هو π (النسبة بين محيط الدائرة وقطرها) .

وقد كان الخوارزمي (٧٨٠–٨٥٠م) من أوائل من كتب في الهندسة في كتابه الشهير «الجبر والمقابلة» حيث عرض قضايا هندسية كثيرة في حساب المثلثات والأشكال الرباعية وأعطى قيماً تقريبية للعدد π وهي:

$$\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠} ، \sqrt{١٠} ، \frac{٢٢}{٧}$$

وحدّد مساحة الدائرة بأنها تساوي حاصل ضرب نصف قطرها في نصف محيطها وأعطى العلاقة التالية أيضاً لحساب مساحة الدائرة.

$ح = ق^{٢} - \frac{١}{٨} ق^{٢} - \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{٧} ق^{٢}$ (ق = طول القطر) ومنها استنتج قيمة $\pi = ٣\frac{١}{٧}$ وأعطى صيغة لقياس مساحة قطاع دائري وعلاقة لحساب حجوم المنشور القائم والأسطوانة والهرم .

بالرغم من صغر فصل الهندسة عند الخوارزمي في كتابه «الجبر المقابلة» ، فقد قدّم أشياء مهمة جداً لأصحاب المهن التطبيقية وهذا هو منهج العلماء المسلمين في مؤلفاتهم حيث يركزون على الجوانب التطبيقية والعملية الضرورية في حياة الناس.

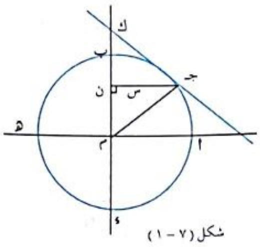
وجاء البيروني (٩٦٣–١٠٤٨م) بمبرهنات ودعاوي هندسية وطرق البرهنة عليها في مؤلفاته وهي طرق جديدة فيها ابتكار وفهم عميق وهي تغاير الطرق التي سار عليها فلاسفة اليونان ورياضوهم من مؤلفاته «رسالة استخراج الأوتار في الدائرة بخواص الخط المنحني» وفيها برهان جديد لمساحة المثلث بدلالة أضلاعه وهو غير البرهان الذي أتى به هيرون من رياضي جامعة الاسكندرية عام ١٥٠ ميلادية.

وقد حسب الكاشي (توفي عام ١٤٣٦م) طول محيط الدائرة باستنتاج قيمة تقريبية ل π بالكسور الستينية ثم حولها إلى الكسور العشرية.

$\pi = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٥$

ومثل هذه الدقة لم يحصل عليها أحد إلا بعد ١٥٠ عام حيث استخدم الكاشي مضلعاً مرسوماً داخل وخارج الدائرة من $٢^{٣٠}$ ضلعاً.

كما قام عمر الخيام (١٠٤٨–١١٢١م) بحل معادلة الدرجة الثالثة ذات الحدين بواسطة دائرة معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ك س$ والقطع المكافئ $س^{٢} = ب ص$ ، حيث وجد أن إحداثيات التقاطع بين القطع والدائرة جذور المعادلة التكعيبية.



شكل (٧ – ١)

وقد اكتشف حديثاً كتاب لعمر الخيام في طهران تحت عنوان «رسالة في تقسيم الدائرة» يتناول حل المسألة التالية:

اقسم ربع الدائرة أب من الدائرة ب هـ ء في النقطة جـ حيث يكون $\frac{\overleftrightarrow{م ء}}{\overleftrightarrow{ء ب}} = \frac{\overleftrightarrow{أ م}}{\overleftrightarrow{جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ المستقيم العمودي النازل من النقطة جـ على القطر $\overline{ب ء}$ حسب الشكل (٧–١).

إذا رسمنا المماس $\overleftrightarrow{جـ ك}$ الذي يقطع $\overleftrightarrow{ب ء}$ في ك.

وهكذا قام عمر الخيام بتحويل المسألة إلى مسألة كيفية تركيب المثلث الذي يكون فيه مجموع طول الضلع $\overline{م جـ}$ المعطى والارتفاع $\overline{ء جـ}$ يساوي الضلع المقابل للزاوية القائمة $\overline{م ك}$ يعيد المسألة هذه حيث يعطي قيمة لإسقاط $\overline{م جـ}$ على الضلع المقابل للزاوية القائمة إلى حل المعادلة التالية:

$س^{٣} + ٢٠٠ س = ٢٠ س^{٢} + ٢٠٠٠$ حيث $س = |ء جـ|$ هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع الدائرة

$ص^{٢} = (س - ١٠)(٢٠ - س)$ والقطع الزائد $س ص = \sqrt{٢٠٠ (س - ١٠)^{٢}}$.

وقد قال كاجوري «إن حل المعادلات التكعيبية بواسطة قطوع المخروط من أعظم الاعمال التي قام بها العرب».

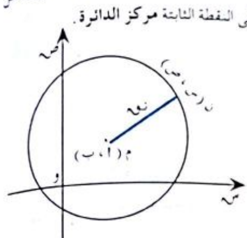
وقد أورد نصر الدين الطوسي (١٢٠١–١٢٧٤م) في «كتاب التذكرة مسائل هندسية مهمة مثل المسألة التالية:

دائرة تمس أخرى من الداخل ، قطرها ضعف قطر الدائرة ، تحركتا في اتجاهين متضادين وبانتظام ، بحيث تكونان دائماً متماستين وسرعة الدائرة الصغيرة ضعف سرعة الدائرة الكبرى ، برهن على أن نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى» .

خلفية علمية

نبدأ هذه الخلفية ببعض التعاريف الأساسية :

الدائرة : هي عبارة عن مسار نقطة تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة في المستوى يظل ثابتًا ، ويسمّى البعد الثابت **نصف قطر الدائرة** ، وتسمّى النقطة الثابتة **مركز الدائرة**.



شكل (٧ – ٢)

معادلة الدائرة :

في الشكل (٧–٢) : م (أ ، ب) مركز الدائرة ، نق طول نصف قطر الدائرة.

فإذا كانت ن (س ،ص) نقطة على الدائرة فإن المسافة بين النقطتين م ،ن هي نق أي أن :

$$\text{نق} = \sqrt{(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على أن

$$\boxed{(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{نق}^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

هذه المعادلة – التي تحدّد بوضوح إحداثي مركز الدائرة وطول نصف قطرها– تسمّى أحياناً **معادلة الدائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها** . كما تسمّى **المعادلة القياسية للدائرة**.

إن منحنى المعادلة (١) عبارة عن دائرة مركزها (أ ، ب) ، وطول نصف قطرها نق. وهذه الحقيقة مقنعة لان المعادلة تتحقّق بالنقاط وفقط بالنقاط التي تبعد عن م (أ ، ب) نق وحدة طولية وعليه فإنه من السهل أن نجد معادلة دائرة معلوم مركزها وطول نصف قطرها أو ان نرسم الدائرة التي معادلتها وضعت بصيغة معادلة (١).

وإذا كان مركز الدائرة نقطة الاصل (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها نق ، فإن معادلتها هي :

$$\boxed{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}} \quad \ldots\ldots (٢)$$

نفك الأقواس في المعادلة (١) وجمع الحدود المتشابهة مع بعضها نحصل على :

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ب ص} + \text{ب}^{٢} = \text{نق}^{٢} \quad ،$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{أس} - ٢\text{ب ص} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{نق}^{٢} = ٠$$

ومن ذلك نحصل على المعادلة العامة للدائرة وهي :

$$\boxed{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{أس} - ٢\text{ب ص} + \text{جـ} = ٠} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

حيث $\text{جـ} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{نق}^{٢}$

ويمكن إعادة المعادلة (٣) إلى المعادلة (١) وذلك عن طريق إكمال المربع بدلالة س وإكمال المربع بدلالة ص كالتالي :

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ب ص} = -\text{جـ}$$

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{أس} + \text{أ}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ب ص} + \text{ب}^{٢} = -\text{جـ} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$$

$$(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = -\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} + \text{نق}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$$

$$(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

نلاحظ أن المحل الهندسي (المنحنى) للمعادلات (١) ، (٢) ، (٣) عبارة عن دائرة.

إذا كان نق = ٠ فإن المعادلة (١) تصبح $(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = ٠$.

وهي معادلة تتحقق فقط بإحداثي النقطة (أ ، ب) = (س ، ص) وفي هذه الحالة فإن محلها الهندسي (منحناها) عبارة عن نقطة ويسمى **دائرة النقطة**.

أما المحل الهندسي (المنحنى) للمعادلة (٣) فإنه يعتمد على الثوابت ٢أ ، ٢ ب، جـ.

باكمال المربع نحصل على :

$$(\text{س} - \text{أ})^{٢} + (\text{ص} - \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}$$

(١) إذا كان $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ} > ٠$ فإن المحل الهندسي عبارة عن دائرة.

(٢) إذا كان $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ} = ٠$ فإن المحل الهندسي عبارة عن دائرة النقطة.

(٣) إذا كان $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ} < ٠$ فلا توجد أيّة نقطة لان ذلك يعني أن نق سالبًا ، تسمى هذه الدائرة أحيانًا دائرة تخيلية

الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة.

من المعلوم أن هناك أربع حالات تبيّن العلاقة بين دائرتين وهي :

(١) منفصلتان (تقاطعهما المجموعة الخالية).

(٢) مشتركتان في نقطة واحدة (أي متماستان من الداخل أو الخارج)

(٣) مشتركتان في نقطتين (أي متقاطعتان).

(٤) مشتركتان في ثلاث نقاط أو أكثر (أي متطابقتان).

بينما هناك ثلاثة أوضاع لمستقيم بالنسبة لدائرة وهي :

(١) إذا كان بعد المستقيم من مركز الدائرة أطول من نصف القطر ، فإن المستقيم لا يقطع الدائرة.

(٢) إذا كان بعد المستقيم عن مركز الدائرة مساوياً لنصف القطر فإن المستقيم يمس الدائرة في نقطة واحدة تسمّى **نقطة تماس** المستقيم مع الدائرة ، أي أنه مماس لها.

(٣) إذا كان بعد المستقيم عن مركز الدائرة أقصر من نصف القطر فإن المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين، تسمّى القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين **وتر الدائرة**.

معادلة المماس لدائرة.

في الشكل (٧-٣) إذا كان مماس الدائرة

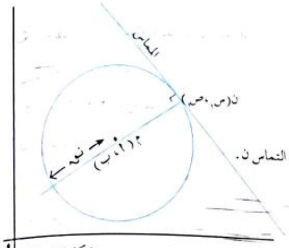
$(س - ا)^2 + (ص - ب)^2 = نق^2$ يمس الدائرة في النقطة

ن $(س_1 ، ص_1)$ فإن

(١) $م_1 = \frac{ص_1 - ب}{س_1 - ا}$ ميل المستقيم م ن المار بالمركز ونقطة التماس ن.

(٢) $م_2 = -\frac{1}{م_1} = -\frac{س_1 - ا}{ص_1 - ب}$

$= \frac{ا - س_1}{ص_1 - ب}$ = ميل المماس



شكل (٧ - ٣)

وباستخدام معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه نحصل على معادلة مماس الدائرة.

$$ص - ص_1 = -\frac{س_1 - ا}{ص_1 - ب} (س - س_1)$$

وبتبسيط الكسور وجمع الحدود المتشابهة نحصل على:

$ص ص_1 - ص_1^2 - ب ص + ب ص_1 = -س س_1 + س_1^2 + ا س - ا س_1$ ، أو

$س س_1 + ص ص_1 - ا س - ب ص = س_1^2 + ص_1^2 - ا س_1 - ب ص_1$

وحيث إن $(س_1 ،ص_1)$ تقع على الدائرة فهي تحقق معادلتها، أي أن :

$(س_1 - ا)^2 + (ص_1 - ب)^2 = نق^2$ ، أو

$س_1^2 - 2ا س_1 + ا^2 + ص_1^2 - 2ب ص_1 + ب^2 = نق^2$ ، أو

$س_1^2 + ص_1^2 - ا س_1 - ب ص_1 = -ا^2 - ب^2 + نق^2 + ا س_1 + ب ص_1$ ، أي أن:

$س س_1 + ص ص_1 - ا س - ب ص = -ا^2 - ب^2 + نق^2 + ا س_1 + ب ص_1$ ،

أي أن $\boxed{س س_1 + ص ص_1 - ا (س + س_1) - ب (ص - ص_1) + جـ = 0}$

وهي معادلة مماس الدائرة التي مركزها (ا ، ب) ونقطة التماس $(س_1 ،ص_1)$.

ويمكن كتابتها بصيغة أخرى كالتالي: $(س - ا)(س_1 - ا) + (ص - ب)(ص_1 - ب) = نق^2$.

إذا كان مركز الدائرة هي نقطة الأصل فإن معادلة مماس الدائرة عند النقطة $(س_1 ،ص_1)$ هي :

$$\boxed{س س_1 + ص ص_1 = نق^2}$$

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام الاشتقاق على أساس أنه يعني ميل المماس.

بما أن $(س - ا)^2 + (ص - ب)^2 = نق^2$ ،

إذن $2(س - ا) + 2(ص - ب)صَ = 0$ أو $صَ = -\frac{س - ا}{ص - ب}$

وبالتالي فإن ميل المماس عند ن $(س_1 ، ص_1)$ هو

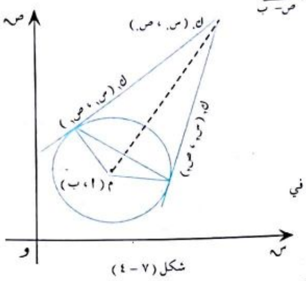
$صَ_1 = -\frac{س_1 - ا}{ص_1 - ب} = م_2$

في الشكل (٧-٤) : م (ا ، ب) مركز الدائرة،

نق نصف قطرها ، $ك_0 (س_0 ،ص_0)$ نقطة خارج الدائرة.

إذن يوجد مماسان للدائرة من النقطة $ك_0$ يمسّان الدائرة في

نقطتي التماس $ك_1 (س_1 ،ص_1)$ ، $ك_2 (س_2 ،ص_2)$.



شكل (٧ - ٤)

المعادلتان

$(س - ا)(س_1 - ا) + (ص - ب)(ص_1 - ب) = نق^2$ ،

$(س - ا)(س_2 - ا) + (ص - ب)(ص_2 - ب) = نق^2$ ؛

تتحققان بإحداثي النقطة $ك_0$ لأنها واقعة عليهما، أي أن:

$(س_0 - ا)(س_1 - ا) + (ص_0 - ب)(ص_1 - ب) = نق^2$

$(س_0 - ا)(س_2 - ا) + (ص_0 - ب)(ص_2 - ب) = نق^2$ ؛

وبالتالي فإن المعادلة:

$(س_0 - ا)(س_2 - ا) + (ص_0 - ب)(ص_2 - ب) = نق^2$ ،

تتحقق بالنسبة لنقطتي التماس $ك_1 (س_1 ،ص_1)$ ، $ك_2 (س_2 ،ص_2)$، أي أنها أيضاً تمثّل معادلة المستقيم المار بنقطتي التماس [انظر شكل (٧-٤)] ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي:

أوجد معادلة مماس الدائرة : $(س + 2)^2 + ص^2 = 5$ ، من نقطة خارجها $ك_0$ (٣ ، ٥) .

معادلة المستقيم المار بنقطتي التماس هي:

$(3 + 2)(س + 2) + (5 - 0)(ص - 0) = 5$ أو $ص = -س - 1$

ونقطتا التماس $ك_1 (س_1 ،ص_1)$ ، $ك_2 (س_2 ، ص_2)$ مع الدائرة نحصل عليها كالتالي :

$\because$ ص$_1$ = − س$_1$ − ١ ، (س$_1$ + ٢)^2 + ص$_1^2$ = ٥ ، $\therefore$ (س$_1$+٢)^2 + (− س$_1$ − ١)^2 = ٥

$\therefore$ س$_1^2$ + ٤س$_1$ + ٤ + س$_1^2$ + ٢س$_1$ + ١ = ٥ ، س$_1^2$ + ٣س$_1$ = ٠ ، س$_1$ = ٠ أو س$_2$ = −٣

ومنه ينتج أن ص$_1$ = −١ ، ص$_2$ = ٢ ، إذن نقطتا التماس هما (٠، −١) ، (−٣، ٢)

فمعادلة المماس الذي يمس الدائرة في ك$_1$ (س$_1$ ، ص$_1$) هي: $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{-١ - ٥}{٠ - ٣} = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

$\Leftarrow$ ص − ٥ = ٢س − ٦ $\Leftarrow$ ص = ٢س − ١

ومعادلة المماس الذي يمس الدائرة في ك$_2$ (س$_2$ ، ص$_2$) هي: ٢ص = س + ٧

توجيهات طرائقية عامة

على المعلم عند تدريس هذه الوحدة مراعاة الآتي:

١ – مراجعة ما سبق دراسته عن الدائرة.
٢ – التأكد من أن الطلاب على علم ودراية بالصور المختلفة لمعادلة المستقيم ومتى تستخدم كل منهما.
٣ – التأكد من أن الطلاب ملمون بالمفاهيم والمعلومات السابقة الضرورية لكل بند قبل تدريسه.
٤ – ربط النظرية بالتطبيق (أي بالواقع المعاش قدر الإمكان).
٥ – محاولة تبسيط وتقريب المفاهيم الرياضية لمستوى الطلاب بواسطة الرسم ووسائل الإيضاح الأخرى.
٦ – تحديد الحالات الثلاث للمستقيم بالنسبة للدائرة، وعرضها بالرسم (المستقيم لا يقطع الدائرة ، المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين ، المستقيم يمس الدائرة) ويمكن مقارنة ذلك بالعلاقة بين دائرتين (منفصلتين ، متماستين ، متقاطعتين ، متطابقتين).
٧ – استخدام الوسائل التعليمية (كالمسطرة ، المنقلة ، المثلث ، المرئيات ، ...، الخ) أثناء تنفيذ الدرس.
٨ – إشراك الطلاب في الدرس ، لتدريبهم على استنتاج المطلوب من خلال المعطيات ومعلوماتهم السابقة.
٩ – تدريب الطلاب على إعادة صياغة القوانين وكيفية استنتاجها.
١٠ – تقديم أمثلة وتدريبات كافية حتى يتقن الطلاب المفاهيم والمهارات الخاصة بهذه الوحدة.
١١ – حل الأمثلة في كل بند بمعية الطلاب قدر الإمكان ليتمكن الطلاب من تنظيم خطوات حل المسائل والتمارين مع ذكر السبب لكل خطوة.
١٢ – إعطاء بعض التمارين والمسائل كواجب منزلي.
١٣ – مناقشة حل التمارين الصعبة الواردة في الواجب المنزلي بمعية الطلاب.
١٤ – تخصيص حصة لمراجعة المفاهيم الهندسية التي سبق أن درسها الطلاب وهي: الدائرة ، البعد العمودي من نقطة معلومة إلى مستقيم معلوم ، مبرهنة فيثاغورس، البعد بين نقطتين ، الصور المختلفة لمعادلة المستقيم.
١٥ – عند تدريس معادلة الدائرة، على المعلم أن يمهد لهذا البند بالمفاهيم الجبرية اللازمة وهي: المربع الكامل ، إكمال المربع، تحليل المقادير الجبرية وفك الأقواس، وجمع الحدود المتشابهة.
١٦ – على المعلم استذكار المفاهيم الهندسية التي درسها الطلاب عن المماسات وخواصها قبل دراسة معادلة المماس لدائرة.

معادلة الدائرة

عدد الحصص: (٧) حصص.

الأهداف

- يستنتج معادلة الدائرة التي مركزها (أ ،ب) وطول نصف قطرها نق.
- يستنتج معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق.
- يوجد معادلة دائرة عُلم مركزها وطول نصف قطرها.
- يوجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها إذا عُلمت معادلتها.
- يوجد معادلة الدائرة إذا عُلم مركزها ونقطة على محيطها.
- يوجد معادلة دائرة بمعلومية إحداثيات طرفي قطرها.
- يتحقق من انتماء نقطة إلى دائرة علمت معادلتها.
- يميّز معادلة الدائرة.
- يتعرّف المعادلة العامة للدائرة ، ويطبق خواصها .
- يتعرّف ويطبّق العلاقة بين ثابت المعادلة العامة للدائرة « جـ » وكلٌ من إحداثي مركز الدائرة وطول نصف القطر.
- يوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل.
- يوجد معادلة الدائرة إذا وقع مركزها على محور السينات (أو على محور الصادات).
- يوجد معادلة الدائرة إذا مسّت محور السينات (أو مست محور الصادات).
- يحدّد المحل الهندسي (بيان) معادلة الدائرة.
- يوجد معادلة الدائرة المارة بثلاث نقاط.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في سبع حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: مراجعة المفاهيم الهندسية التي سبق للطالب أن درسها عن الدائرة ، البعد العمودي من نقطة معلومة إلى مستقيم معلوم ، مبرهنة فيثاغورس ، البعد بين نقطتين والصور المختلفة لمعادلة المستقيم.

الحصة الثانية: المعادلة القياسية للدائرة (ومنها استنتاج المعادلة العامة للدائرة) .

الحصة الثالثة: – خواص المعادلة العامة للدائرة .

– إثبات أن المعادلة التي لها الخواص المذكورة في المعادلة العامة هي معادلة دائرة .

الحصة الرابعة: دراسة الحالات الخاصة لمعادلة الدائرة.

الحصتان الخامسة والسادسة : أمثلة

الحصة السابعة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا ومتابعة حل الطلاب للواجبات الصفية والمنزلية، كما يعطى التمرين التالي في نهاية الحصة السابعة:

أوجد وارسم معادلة الدائرة :

التي تمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ٦) ومركزها يقع على المستقيم ٢ س + ٥ ص + ١ = ٠ .

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ – ١)

[١] أ) س^٢ + ص^٢ = ٤ ب) س^٢ + ص^٢ = ٧

جـ) نق = $\sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٢ - ٠)^٢}$ = $\sqrt{٥}$ ، ∴ معادلة الدائرة هي : س^٢ + ص^٢ = ٥

د) (س − ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦ هـ) (س + ٥)^٢ + ص^٢ = ١٠

و) (س + ١)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٥

[٢] أ) مركز الدائرة م = ($\frac{٥ - ٢}{٢}$ ، $\frac{-٣ - ١}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، −٢)

∴ معادلة الدائرة : (س − $\frac{٣}{٢}$)^٢ + (ص + ٢)^٢ = $\frac{٥٣}{٤}$.

بالطريقة نفسها نجد أن :

ب) (س − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٢٠ ، جـ) (س − $\frac{١}{٤}$)^٢ + (ص − $\frac{٣}{٤}$)^٢ = $\frac{٢٥}{٨}$

[٣] أ) بُعد المركز (٢ ، −٤) عن المستقيم ١٢س + ٥ص = ١٧ يساوي نصف قطر الدائرة.

∴ نق = $\frac{|١٢ \times ٢ - ٥ \times ٤ - ١٧|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$ = $\frac{١٣}{١٣}$ = ١

∴ معادلة الدائرة: (س − ٢)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١

[٤] نوجد معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ٤) وهي: س + ٣ ص − ١١ = ٠

نصف القطر نق = $\frac{|١ \times ٠ + ٣ \times ٠ - ١١|}{\sqrt{١ + ٩}}$ = $\frac{١١}{\sqrt{١٠}}$

∴ معادلة الدائرة: ١٠ س^٢ + ١٠ ص^٢ = ١١ .

[٥] بما أن الدائرة مماسة لمحور السينات ، إذن الإحداثي الصادي لمركز الدائرة يساوي ٦ أو يساوي −٦ ، ويعني هذا وجود دائرتين شكل (٧−٧).

أما الإحداثي السيني فنحصل عليه من معادلة المستقيم ص + ٤س = ١٠ لوقوع المركز عليه

عندما ص = ٦ ، س = ١

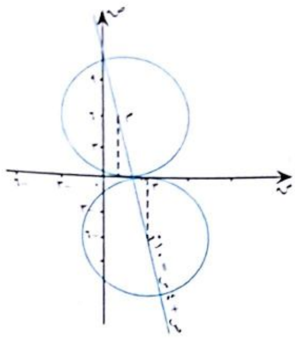
عندما ص = −٦ ، س = ٤

∴ الدائرة الأولى مركزها (١ ، ٦) ونصف قطرها ٦

فمعادلتها: (س−١)^٢ + (ص − ٦)^٢ = ٣٦

والدائرة الثانية مركزها (٤ ، −٦) ونصف قطرها ٦

فمعادلتها: (س−٤)^٢ + (ص + ٦)^٢ = ٣٦



شكل (٧ – ٧)

[٦] بالطريقة نفسها كما في حل المسألة (٥) نجد أن:

معادلة الدائرة الأولى: (س−٧)^٢ + (ص+٤)^٢ = ٤٩ .

معادلة الدائرة الثانية: (س+ ٧)^٢ + (ص − $\frac{٨}{٥}$)^٢ = ٤٩

[٧] للإثبات نوجد بُعد كل نقطة عن المركز (٠ ، ٠) فنجده يساوي بُعداً ثابتاً مقداره $\sqrt{٢٢١}$ ، وتكون معادلة الدائرة: س^٢ + ص^٢ = ٢٢١

[٨] أ) من معادلة الدائرة المفروضة نجد أن: أ = ٢ ، ب = −١ ، ∴ المركز (٢ ، −١).

نق^٢ = أ^٢ + ب^٢ − جـ = ٤ + ١ − ١١ = −٦

∴ المعادلة يمكن كتابتها بالصورة: (س−٢)^٢ + (ص + ١)^٢ = −٦

∴ مجموعة النقاط (س ، ص) التي تحقق هذه المعادلة هي مجموعة خالية.

بالطريقة نفسها سنجد أن:

ب) معادلة الدائرة المفروضة يمكن كتابتها بالصورة: (س−١)^٢ + (ص+٢)^٢ = −٢

∴ مجموعة النقاط هي المجموعة الخالية .

جـ) المعادلة المفروضة يمكن كتابتها بالصورة: (س−١)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٠

∴ مجموعة النقاط تتكوّن من نقطة وحيدة هي (١ ، −٢).

د) المعادلة المفروضة يمكن كتابتها بالصورة: (س−٢)^٢ + (ص + $\frac{٣}{٢}$)^٢ = $\frac{٤٩}{٤}$

وهي تمثّل دائرة مركزها (٢ ، $\frac{-٣}{٢}$) ، نصف قطرها $\frac{٧}{٢}$.

[٩] من معادلة الدائرة المفروضة نجد أن: مركز الدائرة هي النقطة ($\frac{٧}{٤}$ ، −٢)

∴ معادلة قطر الدائرة هي معادلة المستقيم المار بالنقطتين ($\frac{٧}{٤}$ ، −٢) (−١ ، ٢) هي :

$\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{٢ + ٢}{-١ - \frac{٧}{٤}} = \frac{-١٦}{١١}$ ، أو ١١ ص − ٢٢ = −١٦س −١٦ ،

وعليه فإن المعادلة تصبح ١٦ س + ١١ ص − ٦ = ٠

[١٠] ا = −٩ ، ب = ٨

[١١] مركز الدائرة $س^٢$ + $ص^٢$ − ٤ س + ٢ ص − ٥ = ٠ هي النقطة (٢ ، −١).

∴ مربع نصف قطر الدائرة المطلوب إيجاد معادلتها هو: $نق^٢$ = $(٢-٢)^٢$ + $(-٣+١)^٢$ = ٤

∴ المعادلة المطلوبة هي : $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢$ = ٤ ، أو $س^٢$ + $ص^٢$ − ٤ س + ٢ ص + ١ = ٠

[١٢] أ) المعادلة العامة للدائرة هي : $س^٢$ + $ص^٢$ − ٢ ا س −٢ب ص + جـ = ٠

النقطة (٠ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة العامة.

∴ ٠ + ٠ −٢ا × ٠ −٢ ب × ٠ + جـ = ٠ أو جـ = ٠ ...(١)

النقطة (٠ ، ٢) تحقق المعادلة:

∴ ٠ + ٤ −٢ا×٠ −٢ ب × ٢ + جـ = ٠ ، أو −٤ ب + جـ = −٤ ...(٢)

النقطة (٢ ، ٠) تحقق المعادلة:

∴ ٤+ ٠ −٢ا × ٢ −٢ ب × ٠ + جـ = ٠ ، أو −٤ا + جـ = −٤ ...(٣)

من (١) و (٢) نجد أن: ب = ١ ، ومن (١) و (٣) نجد أن : ا = ١

∴ معادلة الدائرة هي: $س^٢$ + $ص^٢$ −٢س −٢ ص = ٠، المركز (١،١) ، نق = $\sqrt{٢}$

ب) بتعويض إحداثي كل نقطة في المعادلة العامة للدائرة نحصل على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل كالتالي :

−٢ ا −٢ ب + جـ = −٥ ...(١) ، −٦ ا + ٤ ب + جـ = −١٣ ......(٢)

−٨ ا −٢ ب + جـ = −١٧ ...(٣) ،

بحل المعادلات الثلاث نحصل على ا = ٢ ، ب = ٠ ، جـ = −١

∴ معادلة الدائرة هي: $س^٢$ + $ص^٢$ −٤ س −١ = ٠ ، المركز (٢ ، ٠) ، نق = $\sqrt{٥}$

د) نعوض بإحداثي النقاط الثلاث فنحصل على:

−٢ ا −٦ ب + جـ = −١٠ ،

−٨ ا −١٤ ب + جـ = −٦٥

−١٤ ا −١٠ ب + جـ = −٢٩

بحل المعادلات الثلاث نجد أن: ا = $\frac{-١٧}{٢}$ ، ب = $\frac{٣٥}{٢}$ ، جـ = ١١٢

∴ المعادلة المطلوبة: $س^٢$ + $ص^٢$ + ١٧ س − ٣٥ ص + ١١٢ = ٠

أو ٢$س^٢$ + ٢ $ص^٢$ −٣٤ س −٣٥ ص + ٢٢٤ = ٠

المركز ($\frac{-١٧}{٢}$ ، $\frac{٣٥}{٢}$) ، نق = $\sqrt{\frac{٥٣٣}{٢}}$

[١٣] المعادلة العامة للدائرة التي يقع مركزها على محور السينات هي: $س^٢$ + $ص^٢$ −٢ا س + جـ = ٠

النقطتان (−١ ، −٢) ، (٣ ، ٥) تحققان هذه المعادلة:

∴ ١ + ٤ −٢ ا × −١ + جـ = ٠ أو ٢ ا + جـ = −٥ ...(١)

٩ + ٢٥ −٢ا × ٣ + جـ = ٠ أو −٦ ا + جـ = −٣٤ ...(٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على: ا = $\frac{٢٩}{٨}$ ، جـ = $\frac{-٤٩}{٤}$ ،

∴ معادلة الدائرة: $س^٢$ + $ص^٢$ − $\frac{٢٩}{٤}$ س − $\frac{٤٩}{٤}$ = ٠ ، أو ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ −٢٩ س −٤٩ = ٠

[١٤] بطريقة حل السؤال (١٣) نفسها تكون معادلة الدائرة هي: $س^٢$ + $ص^٢$ −٦ ص + ٤ = ٠

[١٥] معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل هي:

$س^٢$ + $ص^٢$ − ٢ ا س −٢ ب ص = ٠

النقطتان (٦ ، ٠) ، (٠ ، −٨) تقعان على الدائرة ، إذن تحققان معادلتها .

والآن بالطريقة نفسها حل السؤال (١٣) ، تكون معادلة الدائرة هي: $س^٢$ + $ص^٢$ −٦ س + ٨ ص = ٠

[١٦] نوجد معادلة الدائرة المارة بالنقاط (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) ، (١ ، −١) وهي: $س^٢$ + $ص^٢$ − ٢ ص −٤ = ٠

نعوض بإحداثي النقطة الرابعة (−١ ، ٣) في معادلة الدائرة فنجد أنها تحقق المعادلة (١+٩−٦−٤= ٠).

النقاط المعطاة تقع على محيط دائرة واحدة مركزها (٠ ، ١) ونصف قطرها نق= $\sqrt{٥}$

٧ - ٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة

عدد الحصص : (٤) حصص

الأهداف

- يتعرّف الأوضاع النسبية بين دائرتين (منفصلتين ، متماستين ، متقاطعتين ، متطابقتين) .
- يتعرف الأوضاع النسبية بين مستقيم ودائرة (يقطعها ، يمسها ، لا يقطعها) .
- يوجد نقطتي تقاطع مستقيم معلوم مع دائرة معلومة.
- يوجد نقطة تماس مستقيم معلوم مع دائرة معلومة.
- يحدّد متى تمس الدائرة محور السينات أو محور الصادات.
- يتحقّق من أن الدائرة تمس محور السينات أو محور الصادات.
- يتحقّق من أن مستقيماً معلوماً يمس دائرة معلومة.

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: الأوضاع النسبية بين دائرتين (باستخدام الرسم).

الحصة الثانية: وضع مستقيم معلوم بالنسبة لدائرة معلومة .

يتم باستخدام الرسم أولاً، ومن ثم إيجاد العلاقة بين بُعد المستقيم عن مركز الدائرة « ل » وطول نصف القطر « نق » التي تحدد الحالات الثلاث بوضع المستقيم المعلوم بالنسبة للدائرة المعلومة وهي:

- لا يقطع المستقيم الدائرة إذا كان ل > نق
- يمس المستقيم الدائرة إذا كان ل= نق
- يقطع المستقيم الدائرة إذا كان ل < نق.

الحصة الثالثة: أمثلة

الحصة الرابعة: تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال المناقشات الصفّية وتتبع المدرس لنشاط الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفية والمنزلية ويُعطى التمرين التالي في نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم:

لتكن لدينا الدائرة التي معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س −٨ ص = ٠

أوجد قيمة هـ التي تجعل عائلة المستقيمات ص = هـ س − $\frac{١}{٣}$

١) تقطع الدائرة في نقطتين مختلفتين . ، ٢) تمس الدائرة. ، ٣) لا تقطع الدائرة.

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ - ٢)

[١] نعيّن مركز الدائرة ونصف قطرها فنجد أن : مركزها م (٠ ، ٠) ، ونصف قطرها (نق) = $\sqrt{١٠}$

أ) بُعد م (٠ ، ٠) عن المستقيم س− ٢ ص + ١= ٠ .

ف = $\frac{|١ \times ٠ - ٢ \times ٠ + ١|}{\sqrt{١ + ٤}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ،

∵ $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ < $\sqrt{١٠}$ ، ∴ ف < نق

∴ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين لإيجاد نقاط التقاطع

نحل المعادلتين: س −٢ ص = −١ ...(١) ، س^{٢}+ ص^{٢} = ١٠ ...(٢)

من (١) نجد أن س= ٢ ص −١ ، وبالتعويض في (٢) نحصل على:

(٢ ص + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٠ ، أو ٥ ص^{٢} −٤ ص −٩ = ٠ ، أو (ص+ ١) (٥ ص −٩) = ٠

∴ ص = −١ ، ص = $\frac{٩}{٥}$

وبالتعويض في (١) نجد: س = −٣ ، س = $\frac{١٣}{٥}$

∴ نقطتا التقاطع هما: (−٣ ، −١) ، ($\frac{١٣}{٥}$ ، $\frac{٩}{٥}$)

ب) بنفس الطريقة نجد أن : ف = $\frac{١٠}{\sqrt{١ + ٩}}$ = $\sqrt{١٠}$ ، بما أن ف = نق

∴ المستقيم مماس للدائرة . ولإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين:

س − ٣ ص = −١٠ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٠

فنحصل على المعادلة (ص − ٣)^{٢} = ٠ ، أي ص = ٣ ، وتكون س= −١

∴ نقطة التماس هي (−١ ، ٣) .

جـ) بما أن ف = $\frac{٩}{\sqrt{٥}}$ > نق ،

∴ المستقيم لا يقطع الدائرة.

[٢] نحل المعادلتين : س + ص = ٢ ...(١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٤ ...(٢)

فنحصل على المعادلة ٢س (س −٢) = ٠ ، أي س = ٠ ، أو س = ٢

وبالتعويض في (١) يكون ص= ٢ ، ص = ٠ ،

∴ نقطتا التقاطع هما (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠).

[٣] مركز الدائرة (٢ ، −٣) ، نصف قطرها نق = ٣ .

بنفس طريقة حل السؤال (١) نجد:

أ) ف = $\frac{١٨}{٥}$ > نق ، ∴ المستقيم خارج الدائرة

ب) ف = ٣ = نق ، ∴ المستقيم يمس الدائرة ، ونقطة التماس هي ($\frac{١٩}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$)

جـ) ف = $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ < نق ، ∴ المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين هما : (٢ ، ٠) ، (−١ ، −٣).

[٤] نحل المعادلتين: س + ص = ٤ ، س^٢ + ص^٢ + ٤ س − ٢ ص = ٢٠

فنجد أن نقطتي التقاطع هما: (٢ ، ٢) ، (−١ ، ٥).

[٥] نوجد نقطتي تقاطع المستقيم ٣س − ص + ٥ = ٠ مع الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٥ بأن نقوم بحل هاتين المعادلتين فنجد أن نقطتي التقاطع هما: (−١ ، ٢) ، (−٢ ، −١).

∴ طول الوتر = $\sqrt{(-٢+١)^٢ + (-١-٢)^٢}$ = $\sqrt{١٠}$

[٦] مركز الدائرة (٠ ، −١) ، نصف قطرها نق = $\sqrt{٥}$

بُعد مركز الدائرة عن المستقيم ص − ٢ س − ٤ = ٠ ، ف = $\frac{|-٢ \times ٠ + ١ \times -١ - ٤|}{\sqrt{٤ + ١}}$ = $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ = $\sqrt{٥}$

بما أن ف = نق ، ∴ المستقيم يمس الدائرة . لإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين

ص − ٢ س = ٤ ، س^٢ + ص^٢ + ٢ ص = ٤

فنحصل على المعادلة (س + ٢)^٢ = ٠ التي لها جذر مضاعف هو س = −٢

وبالتعويض في معادلة المستقيم نجد ص = ٠ ، ∴ نقطة التماس هي (−٢ ، ٠) .

[٧] نوجد معادلة الدائرة المارة بالنقاط (١ ، ١) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، −١) وهي س^٢ + ص^٢ − س − ١ = ٠

ومنها نجد أن: مركزها ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) نق = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$.

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) هي ص = ٠ أي محور السينات .

وبعد المركز الدائرة عن محور السينات يساوي صفراً ،

هذا يفسر أن مركز الدائرة يقع على المستقيم ص = ٠

٧-٣ معادلة المماس لدائرة

عدد الحصص : (٨) حصص .

الأهداف

- يستنتج معادلة المماس لدائرة بمعلومية مركزها ونقطة التماس .
- يستنتج معادلة مماس الدائرة التي مركزها نقطة الأصل .
- يوجد معادلة المماس لدائرة بمعلومية معادلة الدائرة ونقطة التماس .
- يستنتج معادلة مماس لدائرة بمعلومية ميله ومعادلة الدائرة .
- يستنتج معادلة مماس لدائرة مركزها نقطة الأصل بمعلومية ميله .
- يوجد معادلة مماس لدائرة بمعلومية ميله ومعادلة الدائرة .
- يحدّد حالات التماس لدائرة تمس محور السينات أو محور الصادات .
- يتحقّق من أن الدائرة تمس محور السينات أو محور الصادات .
- يوجد معادلة المماس ، لدائرة بمعلومية معادلتها ، الموازي لمستقيم معلوم .
- يوجد معادلة المماس ، لدائرة بمعلومية معادلتها، العمودي على مستقيم معلوم .
- يوجد معادلة المماس لدائرة معادلتها معلومة من نقطة خارجة عنها .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثمان حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة المفاهيم الهندسية التي درسها الطالب عن المماسات وخواصها ومن ثم إيجاد معادلة المماس لدائرة بمعلومية معادلتها ونقطة التماس .

الحصة الثانية : معادلة المماس لدائرة بمعلومية مركزها ونقطة التماس ، ويستنتج معادلة المماس لدائرة مركزها (نقطة الأصل) ويحدد متى تمس الدائرة محور السينات أو محور الصادات وكيف يتحقق من ذلك .

الحصة الثالثة : أمثلة .

الحصتان الرابعة والخامسة : معادلة المماس بمعلومية دائرة معادلتها معلومة ومن ذلك يستنتج معادلة المماس لدائرة مركزها نقطة الأصل ويناقش المثال (٧−١٣) وأيضاً إعطاء مثالين لتحقيق الهدفين التاسع والعاشر من أهداف هذا البند .

الحصة السادسة : معادلة المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها ، على أن يمهد لهذه الحصة بمراجعة حل المعادلات الآتية وحل المعادلات من الدرجة الثانية وصدر معادلة المستقيم .

الحصة السابعة : أمثلة .

الحصة الثامنة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال المناقشات الصفية، وتتبع المدرس لنشاط الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفّية والمنزلية ويعطى أحد الأسئلة التالية كخطوة تقويمية في نهاية الحصة السابعة.

١) أثبت أن النقطة ن (٧ ، −٢) تقع على الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٢ ص - ١٥ = ٠$ ومن ثم أوجد مماس الدائرة عن النقطة ن

٢) ناقش كيفية إيجاد معادلة المماسات للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٨ ص - ٢٣ = ٠$ والمارة خلال النقطة (٨ ، −٣) الخارجة عنها.

٣) أوجد معادلة المماس للدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٨ ص - ٢٣ = ٠$ الذى :

أ) ميله ٣

ب) يوازي المستقيم $٢ص - ٤ س + ٥ = ٠$

جـ) يتعامدُ مع المستقيم $ص - س + ٣ = ٠$

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ - ٣)

[١] الدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $نق = ٥$

بالتعويض عن $س_١ = ٣$ ، $ص_١ = -٤$ في المعادلة $س_١ س + ص_١ ص = نق^٢$

نحصل على معادلة المماس للدائرة عند النقطة (٣، ٤) وهي: $٣س - ٤ ص - ٢٥ = ٠$

[٢] بطريقة حل السؤال [١] نفسها، نوجد معادلة المماس وهي:

$\frac{١}{٣} س - \frac{١}{٣} ص = \frac{٢}{٩}$ أو $٣س - ٣ص - ٢ = ٠$

[٣] مركز الدائرة ($\frac{٣}{٢}$ ، −١) ، $نق = \frac{١}{٢}$

بالتعويض عن $س_١ = ١$ ، $ص_١ = -١$ ، $أ = \frac{٣}{٢}$ ، $ب = -١$ ، $جـ = ٣$ في المعادلة:

$س_١ س + ص_١ ص - أ (س + س_١) - ب (ص + ص_١) + جـ = ٠$ ، نحصل على معادلة المماس وهي:

$س - ص - \frac{٣}{٢} (س + ١) + (ص - ١) + ٣ = ٠$ ، أو $س - ١ = ٠$

[٤] بالتعويض بنقطة الأصل ($س = ص = ٠$) في معادلة الدائرة نجد أنها تحققها ،

وهذا يثبت أن النقطة (٠ ، ٠) تقع على الدائرة. نعوّض عن $س_١ = ص_١ = ٠$ ،

$أ = ٢$ ، $ب = ٥$ ، $جـ = ٠$

في معادلة المماس نحصل على :

$٠ + ٠ - ٢ (س + ٠) - ٥ (ص + ٠) + ٠ = ٠$

أو $٢ س - ٥ ص = ٠$ ، وهي معادلة المماس .

[٥] بالطريقة نفسها، معادلة مماس الدائرة عند النقطة (٥، −٤) هي:

$٥ س - ٤ ص = ٤١$ ، أو $ص = \frac{٥}{٤} س - \frac{٤١}{٤}$

معادلة مماس الدائرة عند النقطة (٤ ، ٥) هي $٤س + ٥ ص = ٤١$ أو $ص = - \frac{٤}{٥} س + \frac{٤١}{٥}$.

ميل المماس الأول $م_١ = \frac{٤}{٥}$ ، ميل المماس الثاني $م_٢ = - \frac{٤}{٥}$

∴ $م_١ \times م_٢ = \frac{٥}{٤} \times - \frac{٤}{٥} = -١$ ، ∴ المماسان متعامدان ونقطة تقاطعهما (٩ ، ١) .

[٦] مركز الدائرة (٠،٠) ، نصف قطرها $نق = ع$.

بعد المركز عن المستقيم $ص = س + ع \sqrt{٢}$ هو: $ف = \frac{ع\sqrt{٢}}{\sqrt{١+١}} = ع = نق$ ،

∴ المستقيم يمس الدائرة . لإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين:

$ص = س + ع \sqrt{٢}$ ....(١) ، $س^٢ + ص^٢ = ع^٢$ ...(٢)

نحصل على المعادلة: $٢ س^٢ + ٢ \sqrt{٢} ع س + ع^٢ = ٠$ ، أو $(\sqrt{٢} س + ع)^٢ = ٠$.

التي لها جذر مضاعف هو $س = \frac{-ع}{\sqrt{٢}}$. بالتعويض في (١) بقيمة س نجد $ص = \frac{ع}{\sqrt{٢}}$

∴ نقطة التماس هي: ($\frac{-ع\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{ع\sqrt{٢}}{٢}$) .

[٧] بالتعويض عن: $م = \frac{١}{٢}$ ، $نق = \sqrt{٢٠}$ في معادلة المماسين: $ص = م س \pm نق \sqrt{م^٢ + ١}$

نحصل على $ص = \frac{١}{٢} س \pm ٤ \sqrt{٥} \sqrt{\frac{١}{٤} + ١}$ ، أو $٢ ص = س \pm ٢٠$

[٨] ميل المستقيم $س + ٢ ص + ٣ = ٠$ يساوي $- \frac{١}{٢}$. ، ∴ ميل المماسات للدائرة

$س^٢ + ص^٢ = ٤$ هو $م = - \frac{١}{٢}$ ، ∴ معادلة المماسات هي :

$ص = - \frac{١}{٢} س \pm ٢ \sqrt{\frac{١}{٤} + ١}$ ، أو $٢ ص + س = \pm ٢ \sqrt{٥}$

[٩] ميل المستقيم $س + ٢ ص - ٦ = ٠$ يساوي $- \frac{١}{٢}$.

∴ ميل المماسات للدائرة:

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٢ص - ٢ = ٠$ ، التي مركزها (١،١) ، ونصف قطرها $نق = ٢$ ،

يساوي $- \frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة: $ص = م س \pm نق \sqrt{م^٢ + ١} + (ب - أ م)$

عن $م = - \frac{١}{٢}$ ، $نق = ٢$ ، $أ = ١$ ، $ب = ١$ نحصل على معادلتي المماسين وهما:

$ص = - \frac{١}{٢} س \pm ٢ \sqrt{\frac{١}{٤} + ١} + (١ + \frac{١}{٢})$ ، أو $س + ٢ ص = (٣ \pm ٢ \sqrt{٥})$.

[١٠] معادلة المماسين هي: ص − ٦ س = ± ٣٧ .

[١١] نحل المعادلتين: س_١^٢ + ص_١^٢ = ٤ ...(١)

(س_١ − ٤) س_١ + ص_١^٢ = ٠ ...(٢)

حيث (س_١ ، ص_١) هي نقطة التماس ، فنحصل على: س_١ = +١ ، ص_١ = ± √٣

∴ نقطتا التماس هما (+١ ، √٣) ، (+١ ، −√٣) ∴ معادلتا المماسين هما:

ص = − (√٣ / ٣) (س − ٤) ، ص = (√٣ / ٣) (س − ٤) .

[١٢] من معادلة الدائرة نجد أن: أ = ٣ ، ب = ٢ .

نحل المعادلتين: س^٢ + ص^٢ −٦ س −٤ ص + ٩ = ٠ ...(١)

(س − ٥) (س − ٣) + (ص−٤)(ص −٢) = ٠

أو س^٢ + ص^٢ −٨ س −٦ ص + ٢٣ = ٠ ...(٢)

بطرح (٢) من (١) نجد أن: س + ص = ٧ أو ص = ٧ − س ...(٣)

بالتعويض عن قيمة ص في (١) نحصل على:

س^٢ + (٧ − س)^٢ −٦ س −٤ (٧ − س) + ٩ = ٠ أو

س^٢ − ٨ س + ١٥ = ٠ أو س = ٣ ، س = ٥

من معادلة (٣) نجد: ص = ٤ ، ص = ٢ ،

∴ نقطتي التماس هما (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، أي أن هناك مماسين:

ميل الأول يساوي صفراً أي موازٍ لمحور السينات ،

وميل الثاني غير معرّف أي موازٍ لمحور الصادات.

المماس الأول ص = ٤ ،

المماس الثاني س = ٥ .

[١٣] بطريقة حل السؤال [١٢] نفسها نجد نقطتي التماس ، وهما:

(٠ ، −٣) ، (٤ ، −٣)

ومعادلتي المماسين هما:

٣س + ص + ٣ = ٠ ، س + ص − ١ = ٠

٧-٤ طول المماس لدائرة من نقطة خارجة عنها

عدد الحصص: (٣) حصص

الهدف

يوجد طول مماس لدائرة من نقطة خارجة عنها.

تنفيذ حصص البند

يُنفّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي:

الحصة الأولى: طول المماس لدائرة معادلتها معلومة من نقطة خارجة عنها، ويعمل المدرس في هذه الحصة تذكير الطلاب بالعلاقة بين مماس الدائرة ونصف قطرها وكذلك مبرهنة فيثاغورس وقانون البعد بين نقطتين.

الحصتان الثانية والثالثة: تمارين صفية

التقويم

يتم التقويم من خلال المناقشات الصفية وتتبع المدرس لنشاط الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفّية والمنزلية كما يعطي السؤال الثاني في نهاية الحصة الثانية.

أوجد طول المماس المرسوم:

(١) من النقطة (٨ ، −٣) للدائرة س^٢ + ص^٢ − ٢س + ٨ ص −٢٣ = ٠ .

(٢) من النقطة (−٤ ، ٤) للدائرة ٤س^٢ + ٤ ص^٢ −٢س + ٥ ص − ٨ = ٠ .

إرشادات وإجابات: تمارين (٧ − ٤)

[١] نعوض في المعادلة س^٢ + ص^٢ −٤ = ٠ عن س = ٢ ، ص = −٢ فنجد ان مربع طول المماس يساوي:

ف^٢ = ٤ + ٤ −٤ = ٤ ، ∴ طول المماس ف = √٤ = ٢

[٢] نعوّض باحداث النقطة (−٥ ، ٠) في معادلة الدائرة فنجدأن: ف^٢ = ٢٥ + ٠ −٨ × ٠ −١٦ = ٩

∴ طول المماس (ف) = √٩ = ٣ .

[٣] ف^٢ = ١ + ١٦ −٤ × −١ + ٢ −٤ = ٢٥ ، ∴ طول المماس (ف) = √٢٥ = ٥ .

[٤] ليكن طول المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ٤) للدائرة س^٢ + ص^٢ = ١٠ هو ف_١ :

∴ ف_١^٢ = ٠ + ١٦ −١٠ = ٦ ، ∴ ف_١ = √٦ وإذا كان طول المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ٤) للدائرة س^٢ + ص^٢ − ٥ س + ٩ ص − ٤٦ = ٠ هو ف_٢ فإن

ف_٢^٢ = ٠ + ١٦ − ٥ × ٠ + ٩ × ٤ − ٤٦ = ٦

∴ ف_٢ = √٦ ، بما أن ف_١ = ف_٢ = √٦ ،

∴ المماسات المرسومة للدائرتين المعطاتين من (٠ ، ٤) متساوية الطول.

٧ - ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف يهدف هذا الدرس إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

ينفَّذ هذا البند في حصتين بعد أن يكون المعلم قد أعطى الطالب فكرة عن الاختبار وطلب منهم حل الاختبار الذي في كتاب التمارين كتدريب . بعد ذلك يقدّم المعلم الاختبار الذي في دليل المعلم كاختبار للوحدة خلال حصتين أو اختبارا مماثلاً له شرط تغطية جميع أهداف الوحدة .

ترصد أخطاء الطلاب بعد تصحيح أوراق الإجابة ومن خلالها يتم معرفة الأهداف التي لم تتحقَّق لدى الطلاب حتى يتم معالجتها .

الجدول التالى يبين الأهداف التي تحققها أسئلة اختبار الوحدة .

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢ ، ٣
٢	٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١١
٣	١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥

الاختبار

أجب عن جميع الأسئلة

السؤال الأول :بيّن أيًا من المعادلات التالية تمثل دائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها :

أ) ٢ س^{٢} − ٢ ص^{٢} − ٨ س + ٤ ص + ٤ = ٠ ب) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٨ س − ٤ ص − ٤ = ٠

جـ) ٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٨ س − ٤ ص − ٤ = ٠

السؤال الثاني : أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٢ ، − ٢) ، (٦ ، ٤) ، (١١ ، ٥) ، ثم أوجد معادلة مماسها عند النقطة (٢ ، −٢) .

السؤال الثالث :احسب طول المماس المرسوم من النقطة (٥ ، ٢) للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٨ ص + ٩ = ٠

المصطلحات العلمية			
معادلة	Equation	نقطة التقاطع	Point of intersection
دائرة	Circle	نقطة التماس	Point of contact
مركز	Center	وتر	Chord
نصف قطر	Radius	مماس	Tangent
قطر	Diamateter		

الوحدة الثامنة

الهندسة الفضائية

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٨ − ١	المستوى والفضاء	٧
٨ − ٢	مبرهنات متعلقة بالمستقيمات المتوازية	٦
٨ − ٣	مبرهنات متعلقة بالمستويات المتوازية	٦
٨ − ٤	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢١

أهداف الوحدة

يتوقَّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١- يوضح المستوى والفضاء ويذكر حالات تعيين المستوى .

٢- يحدِّد الاوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء ويمثّلها بيانياً .

٣- يحدِّد الاوضاع النسبية لمستقيم مع مستوى ويمثّلها بيانياً .

٤- يحدِّد الاوضاع النسبية لمستويين في الفضاء ويمثلها بيانياً .

٥- يثبت مبرهنة تقاطع مستويين .

٦- يثبت المبرهنات المتعلقة بالمستقيمات والمستويات في أوضاعها المختلفة .

المقدمة

سبق أن تعرفت في مراحل سابقة على بعض المفاهيم الاساسية في الهندسة كالنقطة والمستقيم والدائرة وبعض الاشكال الهندسية وخواصها كل ذلك كان يسمى بالهندسة الإقليدية (هندسة إقليدس).

اما في هذه الوحدة سنقدم موضوع جديد يتعلق بالمستوى والفضاء ، مثل التعرف على الفضاء والمستوى وكيفية تعيين المستوى وعلاقة مستوى بمستوى آخر وعلاقة مستقيم بمستقيم وبعض المبرهنات المتعلقة بالتوازي، وقد دعمنا ذلك بالشرح المبسط عن طريق الامثلة البسيطة والرسومات التوضيحية لكي تساعد على الاستيعاب والقدرة على الخيال ، وقد أوردنا ذلك في ثلاثة بنود حسب جدول توزيع الحصص .

لمحة تاريخية

نشأة الهندسة الفضائية (الفراغية) هندسة المجسمات بداعي الحاجة لها في المباني وهندسة الجسور والطرقات . فقد بدأت دراستها مع نشأة المدنيات القديمة في مصر واليمن والصين وآشور وبابل منذ آلاف السنين، حيث نجد الاهرام والمعابد والتماثيل وغيرها الموجودة في مصر، والآثار القديمة من المعابد والتماثيل الموجودة في اليمن وخصوصاً في مدينة مارب، وكذلك المباني القديمة الموجودة بمدينة صنعاء، وهي أقدم مدينة عرفها التاريخ أسسها سام بن نوح ، كل ذلك يكشف عن تقدّم دراسة المجسمات، فبدون هذه الهندسة لن تقام مثل هذه الآثار الضخمة بتلك الدقة والإبداع منذ أكثر من خمسة آلاف سنة. والتاريخ يحدثنا عن رحلات طاليس الفلكي وفيثاغورس إلى مصر وبابل. وقد تتلمذا على يد كهنة طيبة وعلماء آشور وبابل، وقد أرسيا قواعد الهندسة النظرية على تعاليم ونظريات استقياها من علوم أهل النيل والفرات ، ومن العلماء الذين أسهموا في تطور هذا العلم أيضاً ريمان وإقليدس حيث خصّص الاخير الاجزاء الثلاثة الأخيرة من كتابه الشهير (الاصول) للهندسة الفراغية ذات ثلاثة أبعاد، حيث عالجها بدقة ووضوح وذلك بالأسلوب نفسه معالجته للهندسة المستوية وبعده يأتي آرخميدس وله دور كبير في هندسة المجسمات فقد الف كتابه الشهير (الكرة والاسطوانة) وظل مشعلاً للعلم تتلقفه أيدي علماء الإسكندرية على مدى قرون، وقد أوصى ارخميدس بأن يحفر على قبره شكل الكرة داخل الاسطوانة، ثم يأتي بعده دور العرب في بغداد والأندلس، فترجم العرب كتب العلم اليونانية وتدارسوها وظهرت لهم مؤلفات تحمل طابع الاجتهاد والابتكار فتناولوا وسائل صعبة في المجسمات المستوية والكروية، ومؤلفاتهم في الهندسة تملأ سجلاً طويلاً يحمل أسماء رياضيين عرب على مدى خمسة قرون أو تزيد .

خلفية علمية

الهندسة الفراغية . هي العلم الحديث الذي يبحث في خواص الاجسام من حيث وضعها وشكلها وحجمها دون التعرض إلى خواص المواد المكّونة لها وقد استعنّا ببعض الأمثلة البسيطة ، واستعنّا بالتظليل حتى يتمكّن الطالب من إدراك العلاقة بين المستقيمات والمستويات .

وللهندسة الفراغية فوائد كثيرة في مجالات عدّة ، على سبيل المثال : في هندسة المباني والطرقات والجسور ودراسة الأجرام السماوية والظواهر الكونية، وللهندسة دورها في العلوم التطبيقية وفي التكنولوجيا وفي الإنتاج ، فالهندسة هي خير أداة لتطوير قدرة العقل على التفكير المنطقي وهي في جوهرها مزيج من خيال الواقع ، وتتمثل المهمة المرجوة من تدريس الهندسة في تنمية ثلاث صفات لدى الطلاب هي :

(١) الخيال الفراغي (٢) الفهم العلمي (٣) التفكير المنطقي

والصفتان الأولى والثانية تعتبران بمثابة أساس ترتكز عليه الصفة الثالثة ، وقد اكتسبت هذه الأخيرة أهمية متزايدة في عالمنا المعاصر نتيجة للثورة العلمية والتكنولوجية ، ومن هذه الناحية تعتبر الهندسة فريدة من نوعها بوصفها نظاماً في تاريخ العالم المتمدن، وهي تقودنا إلى مجموعة تدريجية عن طريق استخدام أسلوب الاستدلال العقلي إلى مجموعة غير عادية من النتائج لها تطبيقات في شتى المجالات، وهكذا فإن تدريس الهندسة يساعد على انبعاث تطور علم شامل لدى كل طلبة المدارس وتتكفل بتقديمهم إلى المنهج العلمي وتعطيهم فكرة عن بنية علم في صورته المثلى، وبهذه الطريقة تصبح الهندسة المدرسية نقطة التركيز اللازمة لتنمية تفكيرهم العلمي والنظري، أي تعد النشئ للحياة والعمل في ظل ظروف الإنتاج الحديث، وإذا سلّمنا بهذه الحقيقة فإن المحصّلة المنطقية لهذا التسليم هو وجوب دراسة الهندسة لا بوصفها مجموعة من الحقائق فحسب وإنما بوصفها نظاماً علمياً، وهذه النتيجة تتحكّم في تحديد أهم جوانب الطريقة التي تُدرّس بها الهندسة . ونعتقد أن من المفيد تدريس الهندسة كنظام في إطار مقرّر مستقل بدلاً من دراستها في مقرر واحد مع غيرها من موضوعات الرياضيات، وصولاً إلى التخصّص بدلاً من الفكرة الواحدة الرياضية وقد سلّمنا معارف الهندسة بشكل منطقي بحيث يستطيعون أن يتعلموها بأنفسهم - بعد دراستهم معارفها في المدرسة - بسهولة ويسر . لقد أصبحت الهندسة اليوم أكثر لغات التعليم عن طريق الاكتشاف، فإذا اردنا مثلاً أن نحلّل وصفاً معقّداً فإننا نلجأ إلى رسم أشكال ورسومات بيانية لمساعدة التفكير والحواس، فالهندسة أصبحت اليوم « علم التحويلات » لأنها تدرس تعديلات الاشكال الهندسية أو ما يماثلها. فمثلا يمكن الحصول على كثير من الخواص الهندسية عن طريقة تعديل شكل عام إلى شكل معياري، مثلاً أو تحويل الضلع الرباعي إلى مربع والقطاع المخروطي إلى دائرة . . . وهكذا .

توجيهات طرائقية عامة

١ – على المدرس أن يبدأ بمراجعة ما تم تدريسه في الهندسة المستوية في الصفوف السابقة ثم بعد ذلك يتم التركيز على :

- توضيح المستوى
- علاقة مستقيم مع مستوى
- علاقة مستوى مع مستوى آخر .
- شروط توازي مستويين .

٢ – يجب استخدام وسائل تعليمية يصنعها المدرس نفسه مثل : بعض الأسلاك للتعبير عن المستقيمات وبعض الورق المقوى للتعبير عن المستويات وغيرها، وذلك لكي يسهُل على الطالب الإدراك والفهم السريع .

٣ – الاهتمام بالرسم واستخدام الالوان لتوضيح الرسومات المختلفة .

٤ – عند عرض الموضوع يجب الإشارة إلى بعض الاخطاء الشائعة التي قد يقع فيها الطلاب، مثال ذلك : عندما يرسم المدرس مجسماً على السبورة فنجد بعض الطلاب يعتبرون كل المستقيمات واقعة في مستوى واحد وهذا خطأ .

٥ – الإشارة إلى انه يمكن رسم التمرين الواحد باكثر من طريقة .

٦ – يجب إشراك الطلاب وتشجيعهم على الحل وعند إثبات مبرهنة، على المدرس أن يرسمها على السبورة ثم يبرهن شفوياً على الرسم مرتين ، ثم يطلب إلى بعض الطلاب إعادة البرهان .

٧ – متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية .

٨ – استرجاع جميع المبرهنات والنتائج والحقائق الهامة في نهاية الوحدة .

٨ – ١ المستوى والفضاء

عدد الحصص : (٧) حصص .

الأهداف

- يذكر حالات تعيين مستوى .
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستقيمين في الفضاء .
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوى .
- يذكر الأوضاع المختلفة لمستويين .
- يرسم بعض الأشكال الهندسية ذات ثلاثة أبعاد .
- يبرهن الطالب مبرهنة تقاطع مستويين .

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في سبع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة في الهندسة المستوية .

الحصة الثانية : توضيح المستوى – حالات تعيينه .

الحصة الثالثة : الأوضاع النسبية لمستقيم في الفضاء .

الحصة الرابعة : الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى .

الحصة الخامسة : الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء .

الحصة السادسة : أمثلة .

الحصة السابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا ، وفي نهاية الحصة السابعة يُعطى التمرين التالي :

ارسم مكعباً ا ب جـ ء ا$_1$ ب$_1$ جـ$_1$ ء$_1$ ثم حدد :

أ) مستويين متوازيين

ب) مستويين متقاطعين

جـ) مستقيم يقطع مستوى

د) مستقيمين متوازيين

هـ) مستقيمين متقاطعين

و) مستقيمين متخالفين

إرشادات وإجابات : تمارين (٨ – ١)

[١] ل، // ل٢

[٢] متوازيان أو متخالفان .

[٣] (أ) ح // ك   ب) متوازيان أو متخالفان

جـ) $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ⊂ ح

[٤] أ) ✔

ب) X ، التصويب : متخالفان أو متوازيان

جـ) ✔

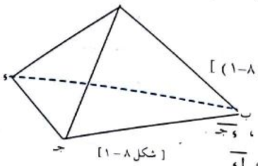
د) X ، التصويب : اذا جمعهم مستوى واحد

هـ) ✔

و) X ، بثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

ز) ✔

ح) X ،متوازيان أو متقاطعان



[شكل ٨ – ١]

[٥] أ) (ا ب جـ) ، (ا ب ء) ، (ا جـ ء) [شكل (٨–١)]

ب) $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{اء}}$

جـ) المستوى ا ب جـ والقاطع $\overline{\text{ءا}}$ ، $\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{ءجـ}}$

المستوى ب جـ ء والقاطع $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{اء}}$

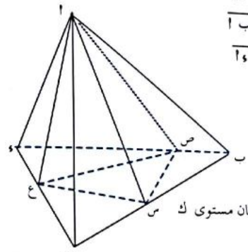
المستوى ا جـ ء والقاطع $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{با}}$

المستوى ا ب ء والقاطع $\overline{\text{جـب}}$ ، $\overline{\text{جـا}}$ ، $\overline{\text{ءا}}$

[٦] (١) $\overline{\text{بء}}$ (٢) $\overline{\text{اع}}$ (٣) $\overline{\text{سع}}$

(٤) $\overline{\text{اص}}$ (٥) $\overline{\text{اس}}$ (٦) $\overline{\text{اع}}$

[شكل (٨ – ٢)]



[شكل ٨ – ٢]

[٧] تامل شكل (٨ – ٣)

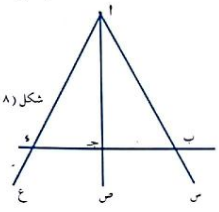
∵ $\overline{\text{اب}}$ ، $\overline{\text{اجـ}}$ مستقيمان متقاطعان ∴ فهما يعينان مستوى ك

∵ ب ∈ ك ، جـ ∈ ك

∵ ء تقع على امتداد $\overline{\text{بجـ}}$ ∴ ء ∈ ك

∴ $\overline{\text{بء}}$ ⊂ ك ، $\overline{\text{اء}}$ ⊂ ك

∴ المستقيمات الأربعة يجمعها مستوى واحد .



شكل (٨ – ٣)

[٨] [شكل (٨ – ٤)]

(أ) $\overline{\text{اب}}$

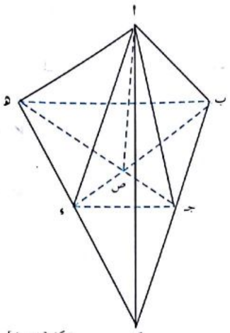
(ب) $\overline{\text{ءهـ}}$

(جـ) ∵ المستويين يشتركان في النقطة ا .

∴ نبحث عن نقطة أخرى يشترك بها المستويان وهي النقطة س الناتجة عن امتداد كلاً من $\overline{\text{بجـ}}$ ، $\overline{\text{هـء}}$ فيكون الفصل المشترك هو $\overline{\text{اس}}$

(ء) ∵ المستويان يشتركان في النقطة ا.

والنقطة الاخرى هي نقطة تقاطع القطرين $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{جـهـ}}$ ولتكن ص فيكون الفصل المشترك هو $\overline{\text{اص}}$



شكل [٨ – ٤]

[٩] المطلوب رسم مستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ يقطع مستقيمين متخالفين $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ [شكل (٨ – ٥)]

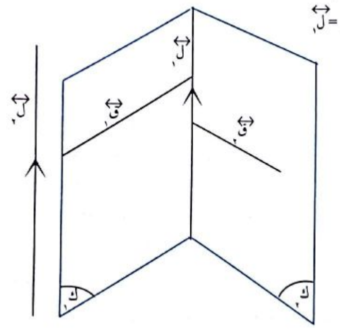
ليكن $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ // ك، ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ // ك٢ ، ك، ∩ ك٢ = $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$

ثم نرسم في ك، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$

ونرسم في ك٢ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ لايوازي $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$

فيكون $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ قاطعاً $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ متخالفان .



شكل [٨ – ٥]

٨ – ٢ المستقيمات المتوازية

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يبرهن أنه إذا قطع مستوى أحد مستقيمين متوازيين فهو قاطع للآخر [مبرهنة (٨ – ٢)]

– يبرهن أنه إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً في ذلك المستوى فإن المستقيم يوازي المستوى [مبرهنة (٨ – ٣)]

– يبرهن أنه إذا كان ل مستقيماً يوازي مستوى ے وإذا كان ك مستوىً ماراً بـ $\overleftrightarrow{ل}$ وقاطعاً ے وفق المستقيم $\overleftrightarrow{ل'}$ فإن $\overleftrightarrow{ل'} \parallel \overleftrightarrow{ل}$ [مبرهنة (٨ – ٤)]

– يبرهن أنه إذا مرّ في مستقيمين متوازيين $ل_1$ ، $ل_2$ مستويان متقاطعان $ك_1$ ، $ك_2$ فإن فصلهما المشترك $\overleftrightarrow{ل}$ يوازي كلاً من $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ [نتيجة (٨ – ١)]

– يبرهن أنه إذا كان $\overleftrightarrow{ل} \parallel$ ے وكانت ب ∈ ے ورسمنا من ب المستقيم $\overleftrightarrow{ل'} \parallel \overleftrightarrow{ل}$ فإن $\overleftrightarrow{ل'} \subset$ ے [مبرهنة (٨ – ٥)]

– يبرهن أن المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين يوازي فصلهما المشترك [نتيجة (٨ – ٢)]

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المبرهنة (٨ – ٢)

الحصة الثانية : المبرهنة (٨ – ٣)

الحصة الثالثة : المبرهنة (٨ – ٤)

الحصة الرابعة : النتيجة (٨ – ١)

الحصة الخامسة : المبرهنة (٨ – ٥) ، النتيجة (٨ – ٢)

الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى التمرين التالي :

ا ب جـ ، ا ب ء مثلثان في مستويين مختلفين وكانت هـ ، و منتصفي $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ا جـ}$ فاثبت أن $\overline{و هـ} \parallel$ المستوى ا ب ء .

إرشادات وإجابات : تمارين (٨ – ٢)

[١] أ) $\overleftrightarrow{ل} \parallel$ ك

ب) $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{ق}$

جـ) $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ق} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$

ء) يوازي الآخر

هـ) يوازي فصلهما المشترك

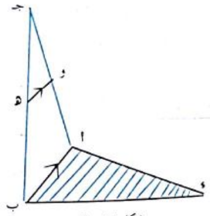
و) يوازى أحد مستقيماته

[٢] ∵ و ، هـ منتصفا $\overline{ا جـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ [شكل (٨ – ٦)]

∴ $\overline{و هـ} \parallel \overline{ا ب}$

∵ $\overline{ا ب} \subset$ المستوى (ا ب ء)

∴ $\overline{و هـ} \parallel$ المستوى (ا ب ء)



شكل (٨ – ٦)

[٣] ∵ شبة المنحرف فيه ضلعان متوازيان

∴ جميع أضلاعه تقع في مستوى واحد .

[٤] ∵ $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ متقاطعان

∴ فهما يعينان مستوى ليكن ك

∵ ا ∈ ك ، ب ∈ ك

∵ جـ هي امتداد $\overline{ا ب}$

∴ جـ ∈ ك

∴ $\overline{ا جـ} \subset$ ك ، $\overline{ا جـ} \subset \overleftrightarrow{ل_1}$

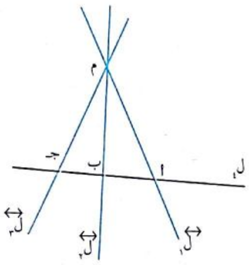
∴ $\overleftrightarrow{ل_1} \subset$ ك

∵ م ∉ ك ، جـ ∈ ك ،

∴ $\overline{م جـ} \subset$ ك

∴ $\overleftrightarrow{ل_2} \subset$ ك

∴ المستقيمات الأربعة يجمعها مستوى واحد .

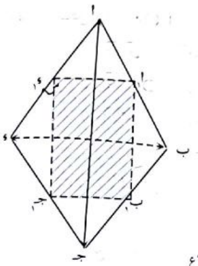


شكل (٨ – ٧)

[٥] نرسم من النقطة م مستقيمين أحدهما يوازي $\overleftrightarrow{ا ب}$ والآخر يوازي $\overleftrightarrow{جـ ء}$ فيعينان مستوياً يوازي المستقيمين المتخالفين .

[٦] نأخذ نقطة ب ∈ $\overleftrightarrow{ا ب}$ ونرسم منها مستقيماً يوازي $\overleftrightarrow{جـ ء}$ فيتكوّن مستوى يوازي المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$.

[٧] [شكل (٨ – ٨)] (أولاً)



شكل (٨ – ٨)

∵ $\overline{\text{ا ج}}$ ⊂ المستوى ا ب جـ

∵ $\overline{\text{ا ج}}$ // س ، ∵ س يقطع المستوى ا ب جـ

وفق $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$

∴ $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$ // $\overline{\text{ا ج}}$

بالمثل $\overline{\text{ء}_1\text{ جـ}_1}$ // $\overline{\text{ا ج}}$

∴ $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$ // $\overline{\text{ء}_1\text{ جـ}_1}$ ... (١)

بالمثل نجد أن $\overline{\text{ا}_1\text{ ء}_1}$ // $\overline{\text{ب}_1\text{ جـ}_1}$ ... (٢)

من (١) ، (٢) نحصل على أن الشكل $\text{ا}_1\text{ ب}_1\text{ جـ}_1\text{ ء}_1$ متوازي اضلاع

(ثانياً)

∵ △ △ ا ب جـ ، ا_1 ب ب_1 متشابهان ، لماذا؟

$$\therefore \frac{|\text{ا}_1\text{ب}_1|}{|\text{ا ج}|} = \frac{|\text{ا}_1\text{ب}|}{|\text{ا ب}|} \quad \dots (1)$$

∴ △ △ ا ب ء ، ا ا_1 ء_1 متشابهان ، لماذا ؟

$$\therefore \frac{|\text{ا}_1\text{ء}_1|}{|\text{ب ء}|} = \frac{|\text{ا}\,\text{ا}_1|}{|\text{ا ب}|} \quad \dots (2)$$

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\frac{|\text{ا}_1\text{ب}_1|}{|\text{ا ج}|} + \frac{|\text{ا}_1\text{ء}_1|}{|\text{ب ء}|} = \frac{|\text{ا}\,\text{ا}_1|}{|\text{ا ب}|} + \frac{|\text{ا}_1\text{ب}|}{|\text{ا ب}|}$$

$$= \frac{|\text{ا}\,\text{ا}_1| + |\text{ا}_1\text{ب}|}{|\text{ا ب}|} = \frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ا ب}|} = 1$$

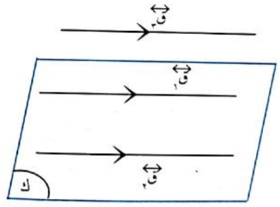
[٨] إذا حددنا المستوى ك المعين بالمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ شكل (٨ – ٩)

فالمطلوب أن نبرهن أن $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ // ك

البرهان :

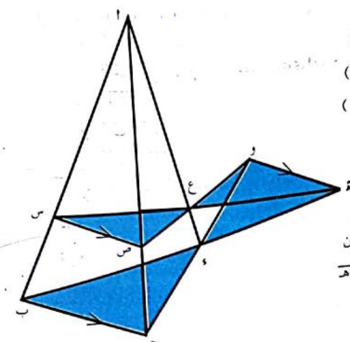
∵ $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ // $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}_1}$ ⊂ ك

∴ $\overleftrightarrow{\text{ق}_2}$ // ك



[شكل (٨ – ٩)

[٩] [شكل (٨ – ١٠)]



[شكل (٨ – ١٠)]

(١) ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊂ المستوى (ب جـ ء)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // المستوى (ب جـ ء)

(٢) ∵ $\overline{\text{و ص}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$ مستقيمان متقاطعان فهما يعينان مستوى ليكن ك_1

يشترك مع المستوى ك_2 المعين بالمستقيمين المتقاطعين $\overline{\text{و جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ في المستقيم $\overline{\text{و هـ}}$

∵ $\overline{\text{س ص}}$ ⊂ ك_1 ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊂ ك_2

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

[١٠] نمد $\overline{\text{ا}_1\text{ ب}_1}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ فيتلاقيا في نقطة ولتكن س

∴ $\overline{\text{ا}_1\text{ب}_1}$ ∩ $\overline{\text{ا ب}}$ = {س} ، ∴ ك ∩ $\overline{\text{ا ب}}$ = {س}

حيث ك هو المستوى (ا_1 ب_1 جـ_1 ء_1)

ثم نمد $\overline{\text{جـ}_1\text{ ب}_1}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ على استقامتيهما فيتلاقيا في ص

∴ $\overline{\text{جـ}_1\text{ب}_1}$ ∩ $\overline{\text{جـ ب}}$ = {ص}

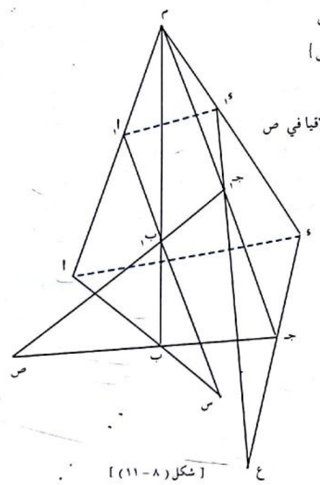
∴ $\overline{\text{جـ ب}}$ ∩ ك = {ص}

ثم نمد $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{ء}_1\text{ جـ}_1}$ على استقامتيهما فيتلاقيا في ع

∴ $\overline{\text{ء جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ء}_1\text{ جـ}_1}$ = { ع }

∴ $\overline{\text{ء جـ}}$ ∩ ك = {ع}

[شكل (٨ – ١١)]



[شكل (٨ – ١١)]

٨ - ٣ المستويات المتوازية

عدد الحصص : (٦) حصص .

الأهداف

- يبرهن أنه إذا قطع مستوى ك مستويين متوازيين $ح_1$ ، $ح_2$ وفق الفصول المشتركة $ل_1$ ، $ل_2$ فإن $ل_1 \parallel ل_2$. [مبرهنة ٨ - ٦]
- يبرهن أن المستويين المتوازيين يحددان على مستقيمين متوازيين قطعتين متساويتين [نتيجة ٨ - ٣]
- يذكر شروط توازي مستويين .
- يبرهن أنه من نقطة ب خارج مستوى ح لا يمكن رسم سوى مستوى واحد يوازيه . [مبرهنة ٨ - ٧]
- يبرهن أنه إذا قطع مستوى ك أحد مستويين متوازيين فهو قاطع للآخر [مبرهنة ٨ - ٨]
- يبرهن أن المستوى الموازي لأحد مستويين متوازيين يوازي الآخر [نتيجة ٨ - ٤]
- يبرهن أن المستقيم الموازي لأحد مستويين متوازيين يوازي الآخر [مبرهنة ٨ - ٩]
- يبرهن أن المستقيم القاطع لأحد مستويين متوازيين قاطع للآخر [نتيجة ٨ - ٥]
- يبرهن أن الزاويتين اللتين ضلعاهما متوازيان متساويتان بالقياس أو متكاملتان .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في ست حصص كالتالي :

الحصة الأولى : إثبات مبرهنة (٨ - ٦) ونتيجة (٨ - ٣) .

الحصة الثانية : شروط التوازي وإثبات مبرهنة (٨ - ٧)

الحصة الثالثة : إثبات مبرهنة (٨ - ٨) ونتيجة (٨ - ٤) .

الحصة الرابعة : إثبات مبرهنة (٨ - ٩) ونتيجة (٨ - ٥) .

الحصة الخامسة : إثبات مبرهنة (٨ - ١٠) ونتيجة (٨ - ٦) .

الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا ، وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم :

ا ب جـ ء رباعي غير مستوى م ، ن منتصفا $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$ على الترتيب،
رسم المستوى ك يحوي $\overline{\text{من}}$ ويلاقي $\overline{\text{اء}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ في و ، هـ على الترتيب .

المطلوب :

أ) اثبت أن $\overline{\text{اب}} \parallel \overline{\text{من}} \parallel \overline{\text{هـو}}$

ب) وإذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{بء}}$ فاثبت أن الشكل م ن هـ و متوازي أضلاع .

إرشادات وإجابات : تمارين (٨ - ٣)

[١] أ) × التصويب : متوازيان أو متقاطعان أو متخالفان ب) ✔

جـ) ✔ د) × ، التصويب: أحد مستويين

هـ) × ، التصويب: متوازيان أو متخالفان أو متقاطعان و) × ، التصويب : متوازيان أو متخالفان أو متقاطعان

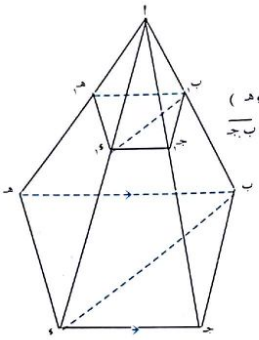
ز) × ، التصويب: متوازيان أو متقاطعان ح) × ، التصويب: يوازي البعض ويخالف الآخر

ط) ✔ ي) × ، التصويب: متقاطعان أو متوازيان

ك) × ، التصويب: مواز له ل) ✔

م) × ، التصويب: متساويتان أو متكاملتان

[٢] [شكل (٨ - ١١)]



[شكل (٨ - ١١)]

أ) ∵ المستوى ($ب_1$ $جـ_1$ $ء_1$ $هـ_1$) ∥ المستوى (ب جـ ء هـ)

والمستوى (ا ب جـ) قاطع لهما وفق $\overline{\text{ب}_1\text{جـ}_1}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{ب}_1\text{جـ}_1}$

ب) ∵ ك ∥ المستوى (ب جـ ء هـ) ،

والمستوى (ا جـ ء) قاطع لهما

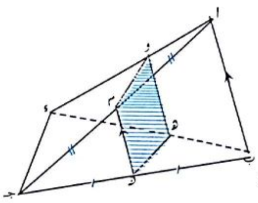
وفق $\overline{\text{جـ}_1\text{ء}_1}$ ، $\overline{\text{جـء}}$ ، ∴ $\overline{\text{جـء}} \parallel \overline{\text{جـ}_1\text{ء}_1}$

بالمثل $\overline{\text{ب}_1\text{ء}_1} \parallel \overline{\text{بء}}$

∴ $\hat{\text{جـ}} = \hat{\text{جـ}}_1$ ، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}_1$ ، $\hat{\text{ء}} = \hat{\text{ء}}_1$

∴ △△ ب جـ ء ، $ب_1$ $جـ_1$ $ء_1$ متشابهان

[٣] [شكل (٨ - ١٢)]



[شكل (٨ - ١٢)]

أ) ∵ م ، ن منتصفا $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{بجـ}}$

∴ $\overline{\text{من}} \parallel \overline{\text{اب}}$

∵ $\overline{\text{اب}} \subset$ (ا ب ء)

∵ المستوى (ا ب ء) ∩ المستوى ك = $\overline{\text{وهـ}}$

∴ $\overline{\text{اب}} \parallel \overline{\text{وهـ}}$

∴ $\overline{\text{اب}} \parallel \overline{\text{من}} \parallel \overline{\text{وهـ}}$

ب) ∵ هـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ ، ∵ $\overline{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ $|\text{و هـ}| = \frac{1}{2}\,|\text{أ ب}|$

$|\text{م د}| = \frac{1}{2}\,|\text{أ ب}|$

∴ $\overline{\text{م د}} \parallel \overline{\text{و د}}$ ، $|\text{م د}| = |\text{و هـ}|$

∴ الشكل م ن هـ و متوازي الأضلاع

[٤] نرسم من النقطة ب_1 مستقيماً $\overleftrightarrow{\text{ل}_2} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}}$

ويقطع ك_1 ، ك_2 في س ، ص على الترتيب .

[شكل (٨ - ١٣)]

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، ∴ فهما يعينان مستوى ليكن ك

قاطعاً ك_1 ، ك_2 ، ك_3 وفق

$\overline{\text{ب ب}_1}$ ، $\overline{\text{س جـ}_1}$ ، $\overline{\text{ص ء}_1}$ على الترتيب

∴ $\overline{\text{ب ب}_1} \parallel \overline{\text{س جـ}_1} \parallel \overline{\text{ص ء}_1}$

∴ $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{جـ ء}|} = \frac{|\text{ب}_1\text{ س}|}{|\text{س ص}|}$ ... (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ مستقيمان متقاطعان فهما يعينان

مستوى ليكن ك يقطع ك_2 ، ك_3

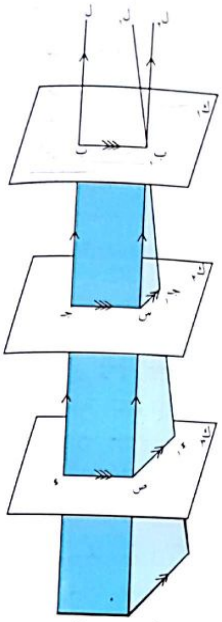
وفق $\overline{\text{جـ}_1\text{ س}}$ ، $\overline{\text{ء}_1\text{ ص}}$

∴ $\overline{\text{جـ}_1\text{ س}} \parallel \overline{\text{ء}_1\text{ ص}}$

∴ $\frac{|\text{ب}_1\text{ س}|}{|\text{س ص}|} = \frac{|\text{ب}_1\text{ جـ}_1|}{|\text{جـ}_1\text{ ء}_1|}$ ... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{جـ ء}|} = \frac{|\text{ب}_1\text{ جـ}_1|}{|\text{جـ}_1\text{ ء}_1|}$



[شكل (٨ - ١٣)]

اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة :

تنفيذ الاختبار ينفذ هذا الاختبار في حصتين على النحو التالي :

في الحصة الأولى يعطى الاختبار الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي وفي الحصة الثانية يعطى الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له بحيث يغطي أهداف الوحدة كما في الجدول المجاور :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢ ، ٣
٢	٥ ، ٦
٣	٤ ، ٥ ، ٦

الاختبار

[١] اكمل ما يأتي :

أ) إذا كا $\overleftrightarrow{\text{ل}_1} \parallel \overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_3}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ فإن المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_3}$ ... أو ...

ب) إذا اشترك مستويان بنقطة فإنهما . . .

جـ) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ق}} \subset$ ك فإن . . .

د) المستقيم الموازي لمستويين متقاطعين . . .

هـ) المستويان الموازيان لمستوى ثالث . . .

[٢] أثبت أن المستقيم الموازي أحد مستويين متوازيين يوازي الآخر

[٣] ب جـ ء هـ معين ، أ نقطة غير واقعة في مستويه والمطلوب :

أولاً : حدّد الفصول المشتركة لأزواج المستويات التالية

أ) (أ ب جـ) ، (ب جـ ء هـ)

ب) (أ ء هـ) ، (أ ب ء)

جـ) (أ ب ء) ، (أ جـ هـ)

ثانياً : إذا كانت س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب ومرّرنا المستوى ك يحوي $\overline{\text{س ص}}$ ، ويقطع $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وفق هـ_1 ، ء_1 على الترتيب .

فاثبت أ) $\overline{\text{س ص}} \parallel$ المستوى (ب جـ د هـ)

ب) الشكل س ص ء_1 هـ_1 شبه منحرف .

ثالثاً : إذا كانت و منتصف أ ء فاثبت أن :

المستويين (س ص و) ، (ب جـ ء هـ) متوازيان .

المفاهيم والمصطلحات

المستوى	plane
الفضاء	Space
زاوية	Angle
مثلث	Triangle
مستطيل	Rectangle
مربع	Square
يوازي	Parallel
خط مستقيم	Straight line

المراجع

١ – ج . ب توماس ، الهندسة التحليلية ، جامعة الفاتح ليبيا ، الطبعة الثانية ١٩٧٩م .

٢ – معوض محمد ، الهندسة الإقليدية ، دار النهضة العربية ، القاهرة ، ١٩٩٣م .

٣ – إقليدس ، هندسة إقليدس ، دار النشر ، عمان ١٩٩١م .

٤ – ن . يفيموف ، الهندسة التحليلية ، دار مير ، موسكو .

٥ – عادل سودان ، الهندسة التحليلية ، مؤسسة الرسالة ، بيروت ١٩٩٦م .

6 - P.k. yoin and Khalil Ahmmad , Analytical Geometry of two Dimentions, Delhi,1986.

الوحدة التاسعة

حساب المثلثات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٩ – ١	مراجعة	١
٩ – ٢	النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما	٢
٩ – ٣	النسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها	٤
٩ – ٤	تحويل مجموع وفرق جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب ، والعكس	٤
٩ – ٥	المعادلات المثلثية	٥
٩ – ٦	حل المثلث وتطبيقاته	٧
٩ – ٧	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢٥

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١- يستنتج النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما .

٢- يستنتج النسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها .

٣- يستنتج قوانين تحويل مجموع جيبين أو جيبي تمام أو الفرق بينهما إلى حاصل ضرب والعكس .

٤- يحل بعض معادلات مثلثية .

٥- يذكر العلاقة الأساسية في المثلث .

٦- يحل المثلث باستخدام العلاقات الأساسية في المثلث وحالات حل المثلث .

٧- يحل مسائل تطبيقية على المثلث .

المقدمة

تعتبر هذه الوحدة امتداد لما تعلمه الطالب في وحدة حساب المثلثات من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي .فعند تدريس مواضيع هذه الوحدة لا بد للمدرس من الاطلاع الكامل على ماجاء في وحدة حساب المثلثات في الصف الأول الثانوي ، كما ينبغي على المعلم ان يسعى جاهداً إلى تثبيت الأفكار والمفاهيم الأساسية وإتقانها من قبل الطالب . وقد اشتملت هذه الوحدة على : النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما والنسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها وكذلك تحويل مجموع وفرق جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب والعكس وتم إعطاء العلاقات المثلثية اللازمة لذلك وتم توضيحها عن طريق أمثلة متنوعة كما تم إعطاء تمارين لكل بند متدرجة ومتنوعة .كما تم أيضا عرض المعادلات المثلثية بصورة مبسطة وتم إعطاء أمثلة وتمارين بما يتناسب مع ما يراد تدريسه في هذا البند ويناسب مستوى الطالب . وقد ختمت الوحدة بموضوع حل المثلث وتطبيقاته وتم توضيح العلاقات الأساسية في المثلث وبعض المبرهنات المتعلقة بذلك وتم عرض أمثلة توضيحية وتمارين متنوعة علمية وعملية . كما ختمت هذه الوحدة باختبار يقيس مدى تحقيق اهداف الوحدة الواردة بعد جدول توزيع الحصص لتدريس الوحدة .

توجيهات طرائقية عامة

عرف العرب علم المثلثات وسموه « علم الإنساب) وذلك لانه يقوم على الأوجه المختلفة من النسبة بين أطوال أضلاع المثلث ، ويُعتبر العرب المؤسسين الحقيقيين لعلم المثلثات على الرغم من أنهم أخذو أفكاره الأولية عن الهنود واليونان .

وكان القدماء يستخدمون علم المثلثات في قياس المساحات الكبيرة والمسافات الطويلة ودراسة الفلك والاهتداء في الملاحة ، فاليونان لم يهتموا بعلم المثلثات لذاته بل لانه كان يساعدهم في علم الفلك .

وكان محمد بن جابر سنان أبو عبد الله البتاني الذي عاش ما بين (٢٣٥-٣١٧هـ) (الموافق ٨٥٠ - ٩٢٩م) اهتمام كبيرٌ بعلم المثلثات وفصله كعلم مستقل عن علم الفلك، والبتاني هو أول من أدخل علم الجبر على حساب المثلثات ، كما ألف جداولاً لجيب الزاوية (جا) وجيب تمام الزاوية (جتا) وظل الزاوية (ظا) وظل تمام الزاوية (ظتا) من صفر إلى تسعين درجة ، وهذه الجداول لا تزال تستعمل حتى الآن مع تعديلات قليلة ، كما طوّر كثيراً من المتطابقات المثلثية .

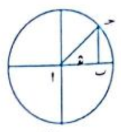
وكان محمد بن يحيى بن اسماعيل بن العباس أبو الوفاء من المهتمين الأوائل بفصل حساب المثلثات عن علم الفلك . وتمكّن من إدخال علم الجبر عليه بالطريقة النظرية ويظهر هذا من متطابقاته المثلثية ، كما أنه ابتكر مقلوب جيب التمام (قا) ويسمى القاطع ومقلوب الجيب (قتا) ويسمى قاطع التمام وألف جداول لكل من جا ، ظا لكل عشر دقائق وله متطابقات مثلثية معروفة باسمه مثل : جا ا = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ جتا $\frac{١}{٢}$ ، ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$

وتوصل أيضاً إلى أن : جا (ا + ب) = $\sqrt{\text{جا}^٢ \text{ ا} - \text{جا}^٢ \text{ ا جا}^٢ \text{ ب}}$ + $\sqrt{\text{جا}^٢ \text{ ب} - \text{جا}^٢ \text{ ا جا}^٢ \text{ ب}}$

وعاش أبو الوفاء ما بين عام (٣٢٨ - ٣٨٨ هـ) (الموافق ٩٤٠ - ٩٩٨م) في بغداد وتوفي هناك ودرس مؤلفات البتاني في علم المثلثات دراسة جيدة، وأوضح النقاط الغامضة منها ، ويظهر هذا من قول الدكتور موريس كلاين في كتابه (تاريخ الرياضيات من الغابر حتى الحاضر) كما بسّط أبو الوفاء بعض النقاط التي كانت غامضة في مؤلفات البتاني .

خلفية علمية

نعلم أنه إذا كان لدينا المثلث ا ب جـ القائم الزاوية في ب والمرسوم داخل دائرة الوحدة [شكل (٩ - ١)]



شكل (٩ - ١)

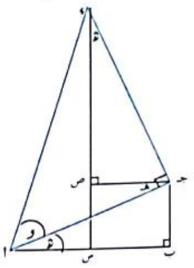
فإن : جتا هـ = $\frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ا جـ}|}$ ، جا هـ = $\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{ا جـ}|}$

وحيث أن |ا جـ| = ١ ، فإن

جتاهـ = |ا ب| ، جاهـ = |ب جـ|

جيب تمام زاويتين :تأمل الشكل (٩ -٢) :

المثلثان ا ب جـ ، ا جـ ء قائما الزاوية في ب ، جـ على التوالي أي أن ق(∠ ب ا جـ) = ق∠ هـ ، ق(∠ جـ ا ء) = ق∠ و ،



شكل (٩ - ٢)

وليكن |ا ء| = ١ وعليه سيكون لدينا

جتا (هـ + و) = |ا س| = |ا ب| - |ب س|

جتا هـ = $\frac{|\text{ا ب}|}{|\text{ا جـ}|}$ ← |ا ب| = |ا جـ| جتا هـ

جتا و = |ا ب| وعليه فان |ا ب| = جتا هـ جتا و

الزاوية جـ ء ص تساوي الزاوية ا جـ ص وتساوي الزاوية هـ

وبذلك فإن جا هـ = $\frac{|\text{جـ ص}|}{|\text{جـ ء}|}$ ، |ب س| = |جـ ص| = |جـ ء| جا هـ

وحيث إن |جـ ء| = جا و ⇐ |ب س| = جا هـ جا و

وحيث إن جتا (هـ + و) = |ا ب| - |ب س|

$$\boxed{\text{جتا (هـ + و) = جتا هـ جتا و - جا هـ جا و}}$$

جيب مجموع زاويتين :

يمكن أن نتبين من الشكل (٩ -٢) أن جا (هـ + و) = |س ء| = |س ص| + |ص ء|

= |ب جـ| + |ص ء|

|ب جـ| = |ا جـ| جا هـ = جتا و جا هـ ، |ص ء| = |جـ ء| جتاهـ = جاو جتا هـ

$$\boxed{\text{جا (هـ + و) = جا و جتا هـ + جتا و جا هـ}}$$

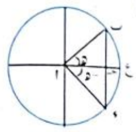
حيب تمام وحيب الفرق بين زاويتين :

قارن في الشكل (٩ – ٣) بين حيب تمام وحيب الزاوية (هـ) مع حيب تمام وحيب الزاوية (– هـ)

الزاويتان متساويتان ولكنهما في اتجاهين مختلفين بالنسبة $\overline{\text{أع}}$

لذلك فإن جتا (– هـ) = جتا هـ ، حا (– هـ) = |حـ ء| = |– ب حـ|

حا (– هـ) = – حا هـ لان الجيب في الربع الرابع سالبة .



شكل (٩ – ٣)

وحيث إن جتا (هـ – و) = جتا (هـ + (– و))

= جتا هـ جتا (– و) – حا هـ حا (– و)

ولكن جتا (– و) = جتا و ، حا (– و) = – حا و

جتا (هـ – و) = جتا هـ جتا و + جا هـ جا و

حا (هـ – و) = حا (هـ + (– و)) = حا هـ جتا (– و) + جتا هـ حا (– و)

حا (هـ – و) = حا هـ جتا و – جتا هـ جا و

ظل فرق ومجموع زاويتين :

∵ ظا هـ = $\dfrac{\text{حا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، فإن

ظا (هـ – و) = $\dfrac{\text{حا (هـ – و)}}{\text{جتا (هـ – و)}}$ = $\dfrac{\text{حاهـ جتاو – جتاهـ حا و}}{\text{جتا هـ جتا و + حا هـ حا و}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا هـ جتا و ، حيث جتا هـ ≠ صفراً ، جتا و ≠ صفراً

ظا (هـ – و) = $\dfrac{\text{ظا هـ – ظا و}}{\text{١ + ظا هـ ظا و}}$

، ظا هـ ظا و ≠ ١

ظا (هـ + و) = ظا (هـ – (– و)) = $\dfrac{\text{ظا هـ – ظا (– و)}}{\text{١ + ظا هـ ظا (– و)}}$ ، وحيث إن ظا (– و) = – ظا و

ظا (هـ + و) = $\dfrac{\text{ظا هـ + ظا و}}{\text{١ – ظا هـ ظا و}}$

، ظا هـ ظا و ≠ ١

النسب المثلثية لمضاعفات الزوايا وأنصافها :

تسمى النسب المثلثية (جا٢أ ، جتا٢ أ ، ظا ٢أ) النسب المثلثية لضعف الزاوية أ ، أما النسب المثلثية (جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ ، جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$ ، ظا $\frac{\text{أ}}{٢}$) تسمى النسب المثلثية لنصف الزاوية أ ولإيجاد جيب ضعف الزاوية (جا ٢أ)

نضع أ = ب في المتطابقة التالية :

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب ، فنحصل على حا (أ + أ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

= ٢ جا أ جتا أ

جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ

ولإيجاد جيب تمام ضعف الزاوية (جتا ٢أ) نضع أ = ب في المتطابقة التالية

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

نحصل على جتا (أ + أ) = جتا أ جتا أ – جا أ جا أ

جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ ...(١)

ولكن جتا^{٢} أ + جا^{٢} أ = ١ ← جا^{٢} أ = (١ – جتا^{٢} أ)

بالتعويض في (١) نحصل على جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – (١ – جتا^{٢} أ) = ٢جتا^{٢} أ – ١ ...(٢)

كما أن جتا^{٢} أ = ١ – جا^{٢} أ وبالتعويض في (١) عن جتا^{٢} أ نحصل على

جتا ٢أ = (١ – جا^{٢} أ) – جا^{٢} أ = ١ – ٢ جا^{٢} أ ...(٣)

وعليه فإن :

جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ = ٢ جتا^{٢} أ – ١ = ١ – ٢ جا^{٢} أ

ولإيجاد ظل الزاوية (ظا ٢أ) نضع أ = ب في المتطابقة التالية :

ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ – ظا أ ظا ب}}$

ظا (أ + أ) = $\dfrac{\text{ظا أ + ظا أ}}{\text{١ – ظا أ ظا أ}}$ = $\dfrac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{ أ}}$

ظا ٢ أ = $\dfrac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ – ظا}^{٢}\text{ أ}}$

ولإيجاد جيب نصف الزاوية (جا $\frac{\text{أ}}{٢}$) نضع $\frac{\text{أ}}{٢}$ بدلاً عن أ في المتطابقة:

جتا ٢أ = ١ – ٢ جا^{٢} أ فنحصل على

جتا ٢ × $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ١ – ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$

٢جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ١ – جتا أ

جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = $\dfrac{\text{١ – جتا أ}}{٢}$

جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ± $\sqrt{\dfrac{\text{١ – جتا أ}}{٢}}$

ولإيجاد جيب تمام نصف الزاوية (جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$) نضع $\frac{\text{أ}}{٢}$ بدلاً عن أ في المتطابقة:

جتا ٢ أ = ٢جتا^{٢} أ – ١ فنحصل على

جتا ٢ $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ – ١

$\text{جتا } أ + ١ = ٢\text{جتا}^{٢} \frac{أ}{٢}$

$\text{جتا}^{٢} \frac{أ}{٢} = \frac{\text{جتا } أ + ١}{٢}$

$$\boxed{\text{جتا } \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}}$$

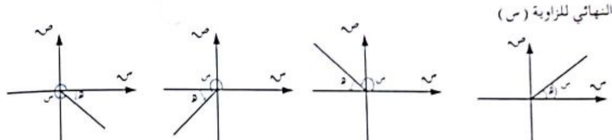
وكذلك $\text{ظا } \frac{أ}{٢} = \frac{\text{حا } \frac{أ}{٢}}{\text{جتا } \frac{أ}{٢}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{٢}}}{\pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا } أ}{٢}}}$

$$\boxed{\text{ظا } \frac{أ}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتا } أ}{١ + \text{جتا } أ}}}$$

حل المعادلات المثلثية :

لحل المعادلات المثلثية نستخدم ما يسمّى بزاوية الإسناد ، حيث زاوية الإسناد هي الزاوية الحادة المحصورة بين الضلع النهائي لزاوية موجّهة في وضع قياسي ومحور السينات.

والأشكال الآتية توضّح العلاقة بين الزاوية (س) وزاوية إسنادها (هـ) حسب الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية (س)



في الربع الرابع	في الربع الثالث	في الربع الثاني	في الربع الأول
$س = ٢\pi - هـ$	$س = \pi + هـ$	$س = \pi - هـ$	$س = هـ$

فمثلاً زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ١٥٥°

نلاحظ أن الزاوية التي قياسها ١٥٥° تقع في الربع الثاني، فتكون زاوية الإسناد (هـ) للزاوية ١٥٥° هي

$س = \pi - هـ \Leftarrow هـ = \pi - س = ١٨٠^{\circ} - ١٥٥^{\circ} = ٢٥^{\circ}$

ولإيجاد مجموعة حل المعادلة $٢ \text{ جتا } س + \sqrt{٣} = \text{صفر}$ ، $٠ < س < ٢\pi$.

نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية (س)، ثم نبحث عن زاوية إسنادها (هـ) :

$٢ \text{ جتا } س + \sqrt{٣} = ٠ \Leftarrow \text{جتا } س = -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow هـ = \frac{\pi}{٦}$ ،

وحيث إن جتا س سالب فتكون س إما في الربع الثاني أو الربع الثالث ؛

إذن قيمة الزاوية س في الربع الثاني : $س = \pi - هـ$ ، $= \pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$ ،

وقيمة الزاوية س في الربع الثالث: $س = \pi + هـ = \pi + \frac{\pi}{٦} = \frac{٧\pi}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{ \frac{٥\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{٦} \}$

توجيهات طرائقية عامة

عند تدريس هذه الوحدة يراعي المدرس الإرشادات التالية :

- يقوم المدرس بمراجعة النسب المثلثية الشهيرة ويسعى جاهداً إلى تثبيت الافكار والمفاهيم الأساسية لها
- يتأكد من أن الطلبة قادرون على إيجاد قيم هذه النسب لأنها اساس في حساب المثلثات .
- يرسم المعلم دائرة الوحدة ويوضّح للطلبة قيم كل من جا ، جتا ، ظا عليها .
- يذكّر الطلبة بأن إشارة النسبية المثلثية لزاوية ما تتحدّد بالربع الذي تنتمي إليه هذه الزاوية .
- يذكّر الطلبة بأن جميع قيم النسب المثلثية في الربع الأول موجبة وأن (جا) فقط تكون موجبة في الربع الثاني وظا موجبة في الربع الثالث و (جتا) موجبة في الربع الرابع .

(كل – جبار – ظالم – جاته داهية)

- يلفت المدرس انتباه الطلبة إلى أن القيمة المطلقة لكل من جا ، جتا لاي زاوية تقع بين [–١ ، +١].
- على المدرس إعطاء الطلبة تطبيقات عددية مباشرة إن أمكن على كل متطابقة بعد استنتاجها مباشرة .
- اقناع الطلبة بانّ العلاقة المثلثية لا تثبت في ذهن الطالب إلا بتكرارها واستخدامها بكثرة في حل تدريبات، لذا ينصح المدرس الطلبة بحفظ العلاقات عن طريق التدريب في حل كثير من التمارين.
- يذكّر المدرس الطلبة عندما يطلب منهم برهان صحة متطابقة بانّ هناك ثلاث طرق لإثباتها وهي :

أ) نبدأ بالطرف الأول أو الطرف الثاني، وذلك بتطبيق القوانين التي تعلمناها حتى يصبح هذا الطرف مساوياً للطرف الآخر .

ب) نبدأ بالطرف الأول ونطبق عليه القوانين حتى نحصل على عبارة ما، ثم نطبق القوانين على الطرف الآخر حتى نحصل على العبارة نفسها التي حصلنا عليها من الطرف الأول .

جـ) ننطلق من علاقة معلومة لنستنتج العلاقة المطلوبة ، (أي المطابقة المطلوب برهانها) .

٩ - ١ مراجعة

عدد الحصص : (١) حصة واحدة

الأهداف

- تثبيت مفهوم الزاوية الموجّهة، وإيجاد قياسها .
- تثبيت مفاهيم النسب المثلثية لزوايا خاصة .
- تثبيت بعض العلاقات بين النسب المثلثية .

تنفيذ حصص البند

ينفّذ الدرس في حصة واحدة مركزاً على أهم المفاهيم التي سبق وأن درسها الطالب ، والتي لها علاقة مباشرة ببنود هذه الوحدة .

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ١)

[١] أ) ٣٠° ، وهي في الربع الاول ب) ٤٥° ، وهي في الربع الاول .

جـ) -٦٠° ، وهي في الربع الرابع د) ٣٠° ، وهي في الربع الأول .

هـ) -١٣٠° ، وهي في الربع الثالث و) ٣٠٠° ، وهي في الربع الرابع .

[٢] $\text{حا } ٢٤٠^\circ = \text{حا } (١٨٠ + ٦٠) = -\text{حا } ٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\text{حتا } ٤٢٠^\circ = \text{حتا } (٣٦٠ + ٦٠) = \text{حتا } ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\text{حا } \frac{٧\pi}{٦} = \text{حا } (\pi + \frac{\pi}{٦}) = -\frac{١}{٢}$

[٣] أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٢ جـ) $٣\sqrt{٣}$ د) $\frac{١}{٤}$

[٤] $\text{حتا هـ} = -\frac{٤}{٥}$ ، $\text{ظا هـ} = \frac{-٣}{٤}$ ، $\text{قا هـ} = -\frac{٥}{٤}$

$\text{قتا هـ} = \frac{٥}{٣}$ ، $\text{ظتا هـ} = -\frac{٤}{٣}$

٩ - ٢ النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

- يستنتج النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ الدرس في حصتين على النحو التالي :

الحصة الأولى : النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما .

الحصة الثانية : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال مناقشات صفية ، ومتابعة حل الواجبات المنزلية والصفية .

يقدّم السؤال التالي أو سؤال مماثل كتقويم نهاية الحصة الثانية :

أوجد قيم النسب التالية :

أ) $\text{جتا } ٢٨٥^\circ$ ب) $\text{جا } ٤٤^\circ \text{ جتا } ١٦^\circ + \text{جتا } ٤٤^\circ \text{ جا } ١٦^\circ$

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ٢)

[١] $\text{جا } ١٦٥^\circ = \frac{\sqrt{٣}-١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\text{جتا } ١٩٥^\circ = \frac{-(\sqrt{٣}+١)}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا } ١٠٥^\circ = -(٢+\sqrt{٣})$

[٢] أ) $\sqrt{٣}$ ، ب) ١

[٣] أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ب) $\frac{١}{٢}$ ، جـ) $\frac{١}{٢}$ ، د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

[٥] $\frac{٤١٦}{٤٢٥}$ ، $\frac{٣٠٤}{٤٢٥}$ ، $\frac{-٢٩٧}{٤٢٥}$ ، $\frac{٨٧}{٤٢٥}$ ، $\frac{-٣٠٤}{٢٩٧}$ ، $\frac{٤١٦}{٨٧}$

[٦] $\text{جا}(\text{س} - \text{ص}) = \frac{٨}{٥\sqrt{٣}} - \frac{١}{٤}$ ، $\text{جتا}(\text{س} - \text{ص}) = \frac{٢\sqrt{٣}}{٥} - \frac{١}{٣}$

$\text{ظا}(\text{س} - \text{ص}) = \frac{٣٢\sqrt{٣} - ١٥}{٢٤\sqrt{٣} - ٢٠}$

[٨] $\text{ظا}(\text{أ}+\text{ب}) = \frac{١١}{٧}$ ، $\text{ظا}(\text{أ}-\text{ب}) = \frac{١}{١٣}$

٩ - ٣ النسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

- يستنتج النسب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) لضعف الزوايا .
- يستنتج النسب المثلثية (جا ، جتا ، ظا) لنصف الزوايا .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ الدرس في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : النسب المثلثية لضعف الزاوية .

الحصة الثانية : النسب المثلثية لنصف الزاوية .

الحصتان الثالثة والرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا، ويعطي المدرس التمرين التالي أو تمرينًا مماثلاً كخطوة تقويم في نهاية الحصة الرابعة :

اكتب كلا مما يأتي على صورة حاصل ضرب :

أ) جتا ٦٠° − جتا ٢٠°

ب) $\frac{١}{٢}$ (جتا ٦° + جتا ١٢°)

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ٣)

[١] جتا ا = $\frac{٣}{٥}$ ، جا ٢ا = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، جتا ٢ا = $\frac{-٧}{٢٥}$ ، ظا ٢ا = $\frac{-٢٤}{٧}$

[٢] جا $\frac{ا}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$ جتا ٢ا = ± $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$ ، ظا $\frac{ا}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{١٨}{٣٢}}$

[٣] جتا ٢ا = $\frac{-٧}{٢٥}$ ، جا ٢ا = $\frac{-٢٤}{٢٥}$ ، ظا ٢ا = $\frac{٢٤}{٧}$

جا $\frac{ا}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{٢}{١٠}}$ ، جتا $\frac{ا}{٢}$ = $\sqrt{\frac{٨}{١٠}}$

[٤] أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٩ - ٤ تحويل مجموع وفرق جيبي أو جيبي تمام زاوية إلى حاصل ضرب، والعكس

عدد الحصص : (٤) حصص .

الهدف

- تحويل مجموع جيبي أو جيبي تمام أو الفرق بينهما إلى حاصل ضرب، والعكس .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ الدرس في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى والثانية: تحويل مجموع (فرق) جيبي أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب، والعكس .

الحصتان الثالثة والرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال مناقشات صفية ، ومتابعة حلول الواجبات المنزلية والصفية . يعطي المدرس التمرين التالي أو تمرينًا مماثلاً في نهاية الحصة الرابعة كخطوة تقويم:

اكتب ما يلي على صورة مجموع أو فرق جيبي تمام :

أ) جتا ٧٥° جتا ١٥°   ب) جتا ٤٥° جتا ١٥°

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ٤)

[١] أ) $\frac{١}{٢}$ (جا ١٠ ص − جا ٤ ص)   جـ) جتا ١٤٠° + جتا ٢٠°

[٢] أ) ٢ جا ٦٠° جتا ٣٠°   ب) ٢جتا ٦٠° جتا ٣٠°

هـ) − ٢ جا ٦ جـ جا ٣ جـ   و) ٢ جتا ٥ا جا ا

ح) ٢ جتا $\frac{(٩٠ + ٢ ص)}{٢}$ جا $\frac{(٩٠ - ٤ ص)}{٢}$

[٣] أ) ٢ جتا ٤٥° جا ١٥° = جا (٤٥ + ١٥) − جا (٤٥ − ١٥) ، = جا ٦٠° − جا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$

∴ جتا ٤٥° جا ١٥° = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ ، ٢جتا ١٥° جتا ٧٥° = جتا ٩٠° + جتا ٦٠° = صفر + $\frac{١}{٢}$

∴ جتا ١٥° جتا ٧٥° = $\frac{١}{٤}$

∴ جتا ٤٥° جا ١٥° + جتا ٧٥° جتا ١٥° = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

ب) $\frac{\text{جا ٨٠° + جا ٢٠°}}{\text{جتا ٨٠° + جتا ٢٠°}}$ = $\frac{\text{٢ جا} (\frac{١٠٠}{٢}) \times \text{جا} (\frac{٦٠}{٢})}{\text{٢ جتا} (\frac{١٠٠}{٢}) \times \text{جتا} (\frac{٦٠}{٢})}$ = $\frac{\text{جا ٣٠°}}{\text{جتا ٣٠°}}$ = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جـ) $\frac{\text{جا ١٠° + جا ٢٠°}}{\text{جتا ٢٠° + جتا ١٠°}}$ = $\frac{\text{٢ جا ١٥°} \times \text{جتا (− ٥°)}}{\text{٢ جتا ١٥°} \times \text{جتا (− ٥°)}}$ = $\frac{\text{جا ١٥°}}{\text{جتا ١٥°}}$ = ظا ١٥°

٩ - ٥ المعادلات المثلثية

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

- يعرِّف مفهوم المعادلات المثلثية .
- يحل المعادلات المثلثية التي تؤول إلى الصور :(جا س = أ ، جتا س = أ ، ظا س = أ) .
- يحل معادلات مثلثية بالطريقة العامة .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ الدرس في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المعادلات المثلثية وحلها .

الحصتان الثانية والثالثة :أمثلة (على حل المعادلات المثلثية) .

الحصة الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، ويعطي المدرس التمرين التالي أو تمريناً مماثلاً في نهاية الحصة الخامسة كخطوة تقويم :

حل المعادلات التالية :

أ) جا س = $\frac{١}{٢}$ ب) جتا^{٢}س - جتا س - ١ = ٠ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ π

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ٥)

[١] أ) جا جـ = -١ ، ٠ ≤ جـ < ٢ π

جا هـ = | جا جـ | = | -١ | ⟸ هـ = $\frac{\pi}{٢}$

وحيث أن جا جـ = كمية سالبة ⟸ جـ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

قيمة جـ في الربع الثالث = π + هـ = π + $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{٣\pi}{٢}$

قيمة جـ في الربع الرابع = ٢ π - هـ = ٢ π - $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{٣\pi}{٢}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{٣\pi}{٢}$ }

ب) جتا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ٠ ≤ جـ < ٢ π

جتا هـ = | جتا جـ | = | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ⟸ هـ = $\frac{\pi}{٦}$

وحيث إن جتا جـ كمية موجبة ⟸ جـ تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

∴ قيمة جـ في الربع الأول = هـ = $\frac{\pi}{٦}$

قيمة جـ في الربع الرابع = ٢ π - هـ = ٢ π - $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١١\pi}{٦}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$ }

وبالطريقة نفسها يمكن حل بقية فقرات السؤال [١] جـ ، د ، هـ ، و

جـ) مجموعة الحل = { ك π ، ك ∈ ص } ،

د) مجموعة الحل = { $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ك π } ، ك ∈ ص

هـ) جا جـ = جا ٢ جـ ولكن جا ٢ جـ = ٢ جا جـ جتا جـ

∴ جا جـ = ٢ جا جـ جتا جـ ⟸ جا جـ - ٢ جا جـ جتا جـ = صفر ⟸ جا جـ (١ - ٢ جتا جـ) = صفراً

إما جا جـ = صفراً فتكون جـ = ٠ ، π أو جتا جـ = $\frac{١}{٢}$ فتكون جـ = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، π ، $\frac{٥\pi}{٣}$ }

و) جـ = { $\frac{٥\pi}{٦}$ + ك π ، ك ∈ ص }

[٢] أ) جتا ٣ س = جتا ٥ س

٣ س = ± ٥ س + ٢ ك π ، ك ∈ ص

٣ س = ٥ س + ٢ ك π ⟸ -٢ س = ٢ ك π ⟸ س = - ك π ، ك ∈ ص

٣ س = - ٥ س + ٢ ك π ⟸ ٨ س = ٢ ك π ⟸ س = $\frac{ك\pi}{٤}$ ، ك ∈ ص

∴ مجموعة الحل = { - ك π ، $\frac{ك\pi}{٤}$ }

وبالطريقة نفسها يمكن حل بقية فقرات السؤال [٢] ب ، جـ ، د

ب) مجموعة الحل = { -٣ ك π ، $\frac{٣\pi}{٤٠}$ (١ + ٢ ك) } ، ك ∈ ص

جـ) مجموعة الحل = { - ($\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π) ، $\frac{\pi}{٣}$ ($\frac{١}{٤}$ + ٢ ك + ١) } ، ك ∈ ص

د) مجموعة الحل = { $\frac{\pi}{٤}$ (ك - $\frac{٣}{٤}$) } ، ك ∈ ص

[٣] أ) نضع جا س = ص فتصبح المعادلة ٤ ص^{٢} - ٢ ص - ١ = ٠

ص = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{١٢}$ فيكون ص$_{١}$ = $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٤}$ ، ص$_{٢}$ = $\frac{١ - \sqrt{٥}}{٤}$

وكلاهما مقبول لان - ١ ≤ ص$_{١}$ ≤ ١ ، - ١ ≤ ص$_{٢}$ ≤ ١

حا س = $\frac{\text{١ - }\sqrt{\text{٥}}}{\text{٤}}$ أو حا س = $\frac{\text{١ - }\sqrt{\text{٥}}}{\text{٤}}$ فيكون حا س = حا هـ

ومنه إما س = هـ + ٢ ك π أو س = π - هـ + ٢ ك π ، ك ∈ ص

أو حا س = حا هـ ومنه إما س = هـ + ٢ ك π أو س = π - هـ + ٢ ك π ، ك ∈ ص

وبالطريقة نفسها يمكن حل بقية فقرات السؤال [٣] ب ، د ، هـ

جـ) نضع $\sqrt{\text{٣}}$ = ظا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ فتصبح المعادلة حتا س - ظا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ حا س = ١

حتا س - $\frac{\text{حا }\frac{\pi}{\text{٣}}}{\text{حتا }\frac{\pi}{\text{٣}}}$ حا س = ١ نضرب طرفي المعادلة في حتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$

حتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ حتا س - حا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ حا س = حتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$ ⟸ حتا ($\frac{\pi}{\text{٣}}$ + س) = حتا $\frac{\pi}{\text{٣}}$

$\frac{\pi}{\text{٣}}$ + س = ± $\frac{\pi}{\text{٣}}$ + ٢ ك π ، ك ∈ ص

∴ س = ٢ ك π أو س = $\frac{\text{-٢}\pi}{\text{٣}}$ + ٢ ك π = ٢ π (ك - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$)

∴ مجموعة الحل = { ٢ ك π ، ٢ π (ك - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$) }

٩ - ٦ حل المثلث وتطبيقاته

عدد الحصص : (٧) حصص .

الأهداف

- يتعرف العلاقات الأساسية للمثلث ، وهي :

  أ^2 = ب^2 + جـ^2 - ٢ $\overline{\text{ب}}$ $\overline{\text{جـ}}$ حتا ا ،

  ب^2 = جـ^2 + أ^2 - ٢ $\overline{\text{جـ}}$ $\overline{\text{أ}}$ حتا ب ،

  جـ^2 = أ^2 + ب^2 - ٢ $\overline{\text{أ}}$ $\overline{\text{ب}}$ حتا جـ ،

  $\frac{\overline{\text{أ}}}{\text{حا ا}}$ = $\frac{\overline{\text{ب}}}{\text{حا ب}}$ = $\frac{\overline{\text{جـ}}}{\text{حا جـ}}$.

- يحسب مساحة المثلث بمعلومية طول ضلعين وجيب الزاوية المحصورة بينهما .
- يحسب مساحة المثلث بمعلومية اطوال اضلاعه .
- يحسب نصف قطر الدائرة المرسومة خارج مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه .
- يحل المثلث إذا علم منه :
  - زاويتان وضلع
  - ضلعان وزاوية
  - ثلاثة أضلاع
- يحل مسائل تطبيقية على حل المثلث .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ الدرس في سبع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : العلاقة الأساسية للمثلث .

الحصتان الثانية والثالثة : حساب مساحة المثلث ونصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث .

الحصة الرابعة : حالات حل المثلث .

الحصة الخامسة : تطبيقات على حل المثلث .

الحصتان السادسة والسابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة السابعة يعطي المدرس التمرين التالي ، أو تمريناً مشابهاً :

حل المثلث ا ب جـ الذي فيه $\overline{\text{ب}}$ = ٦سم ، ق (∡ا) = ٦٠° ، ق (∡ب) = ٤٠° ، ثم احسب مساحته ؟

إرشادات وإجابات : تمارين (٩ - ٦)

[١] ق (∡ا) = ٩٨° ، ق (∡ب) = ٣٢° ، ق (∡جـ) = ٥٠°

[٢] ق (∡ا) = ٧٥° ، ق (∡ب) = ٦٠° ، ق (∡جـ) = ٤٥°

[٣] أ) ق (∡ا) = ٧٥° ، ق (∡ب) = ٦٠° ، ق (∡جـ) = ٤٥°

$\overline{\text{أ}}$ ≈ ١٢ سم ، $\overline{\text{ب}}$ ≈ ١٠,٧ سم ، $\overline{\text{جـ}}$ ≈ ٨,٧ سم

ب) $\overline{\text{أ}}$ ≈ ٩,٥ سم ، $\overline{\text{ب}}$ ≈ ٦,٤سم ، $\overline{\text{جـ}}$ = ٩سم ، ق (∡ا) = ٧٥° ، ق (∡ب) = ٤٠° ، ق (∡جـ) = ٦٥°

جـ) ق (∡ا) ≈ ١١٨° ، ق (∡ب) ≈ ٢٩° ، ق (∡جـ) ≈ ٣٤°

د) ق (∡ا) = ١١٤° ، ق (∡ب) = ٣٩° ، ق (∡جـ) = ٢٧°

هـ) $\overline{\text{جـ}}$ ≈ ١٥ سم ، ق (∡ب) ≈ ٢١° ، ق (∡جـ) ≈ ٤٢°

و) $\overline{\text{جـ}}$ = ٢ سم ق (∡ب) = ٤٥° ، ق (∡ا) = ٩٠°

[٤] أ) - ٠,٨٦٦ ب) ٠,١٧٤ جـ) ٠,٥٧٤

د) ٠,٦٢٥ هـ) ٠,٧٦٦ و) صفر .

[٥] $\frac{\overline{\text{أ}}}{\text{حا ا}}$ = $\frac{\overline{\text{ب}}}{\text{حا ب}}$ ⟸ حا ب = $\frac{\text{٨ × ٠,٦٤٢}}{\text{٥}}$ = ١,٠٢

∴ لا يمكن رسم هذا المثلث لأن جيب الزاوية أكبر من واحد .

[٦] مساحة المثلث = ١٧,٣ سم^2

[٧] جتا أ = $\frac{٢٠ + ١٥ - ٢٥}{٤\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ ، جتا ب = $\frac{٢}{\sqrt{١٥}}$ ، جتا جـ = $\frac{٣}{٢\sqrt{٥}}$

[٨] مساحة المثلث = ٨٧,٧٤ سم^{٢} ، نصف قطر الدائرة = ٨,٧ سم

[٩] ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥° ، ق (∠ جـ) = ٧٥°

نصف قطر الدائرة = ١ سم

[١٠] مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ $\overline{ب}$ $\overline{جـ}$ جا أ

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ جا أ ⟸ جا أ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ أ) = ٣٠°

[١١] ٥ سم تقريباً

[١٢] ٢٩,٤ متر

[١٣] قياس الزوايا : ٥٦° ، ٣٧°

[١٤] البعد بين أ ، جـ = ٢٣٦,٣٥ كم

[١٥] ارتفاع المئذنة = ١٨ متر .

اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

- يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة لدى الطلبة .

تنفيذ الاختبار

يتم تنفيذ الإختبار في حصتين .

يُكلف المدرس أولاً الطلبة بحل الاختبار الذي في كتاب التمارين كتهيئة ، ثم يعطي لهم الاختبار الذي في الدليل ، أو اختباراً مماثلاً من إعداد المدرس شريطة مراعاة قياس مدى تحقق كاف لأهداف الوحدة . والجدول الموضح جانباً يبيّن رقم الهدف ورقم السؤال الذي يقيسه .

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١
٢	٢
٣ ، ٤	٣
٥	٤
٦	٥ ، ٦ ، ٧

- يقوم المدرس بتصحيح أوراق إجابات الطلبة ومن خلالها يتم معرفة الأهداف التي لم تتحقق لدى الطلبة .
- يشرح المدرس لطلابه الحلول الصحيحة للأسئلة التي اخفقوا في حلها، ويوضح لهم أخطاءهم حتى يتحسوها .

الاختبار

أجب عن جميع الأسئلة التالية :

[١] أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي (بدون استخدام الآلة الحاسبة)

أ) جتا ٧٥° ب) جتا ١٥° جتا ٧٥° − جا ١٥° جا ٧٥°

جـ) $\frac{\text{ظا } ١١٠° - \text{ظا } ٥٠°}{١ + \text{ظا } ١١٠° \text{ ظا } ٥٠°}$

[٢] إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ ، فأوجد قيمة كل من :

جا ٢أ ، جا $\frac{أ}{٢}$ ، جتا $\frac{أ}{٢}$

[٣] عبِّر عمّا يأتي بصورة حاصل ضرب .

أ) جتا ٤٥° + جتا ٣٠° ب) جا ٧أ − جا ٥أ

[٤] اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع أو فرق جيبي تمام :

أ) جا ٥س جتا ٣س ب) ٢ جا ٣٠° جتا ٦٠°

[٥] أوجد مجموعة حل المعادلة: جا $\frac{١٩}{٣}$ س = جا ٧س .

[٦] حل المثلث أ ب جـ الذي فيه $\overline{أ}$ = ٤ ، $\overline{ب}$ = ٣ ، ق (∠ جـ) = ٦٠° ،

ثم أوجد مساحته (علماً بأن $\sqrt{١٣}$ = ٣,٤)

المصطلحات

دائرة الوحدة	Unit Circle
نصف قطر الدائرة	Radius of The Circle
الوضع القياسي للزاوية	Standard Pasition
المتطابقات المثلثية	Trigonometric Identities
زاوية الإسناد	Reference Angle
النسب المثلثية لضعف الزوايا	Double angle for Trigonometric
النسب المثلثية لنصف الزوايا	Half angle for Trigonometric
المعادلات المثلثية	Trigonometric Equations
حل المعادلات المثلثية	Solution Trigonometric Equations
حل المثلث	Solution a Triangle
تطبيقات على حل المثلث	Applications of Triangle Solution

المراجع

١- جمال بشير عكاشة وآخرون ، تاريخ الرياضيات ، دار المستقبل للنشر والتوزيع ، ١٩٩٠ ، عمان ، الأردن .

٢- د. عبد الله العمري ، تاريخ العلوم عند العرب ، دار مجد لادي للنشر والتوزيع ، ١٩٩٠ ، عمان، الأردن .

3 - Q uestion Bank in Mathematics for class IX, second Edition.
Manoj Dubey R S Tomar .2000.

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمالات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١٠-١	مراجعة	٢
١٠-٢	الارتباط وأشكال الانتشار	٦
١٠-٣	الانحدار	٣
١٠-٤	الاحتمالات	٩
١٠-٥	اختبار الوحدة	٢
	المجموع	٢٢

أهداف الوحدة

يُتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

- يعرّف الانتشار.
- يحدد نوع الارتباط بين متغيرين.
- يعرّف معامل الارتباط.
- يحسب معامل الارتباط بين متغيرين.
- يعرّف الانحدار الخطي.
- يعرّف العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط.
- يستخدم معادلة الانحدار في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المقابلة للمتغير الآخر.
- يعرّف الحادثة.
- يربط أنواع العمليات على الحوادث بلغة المجموعات.
- يعرّف دالة الاحتمال.
- يحسب الاحتمال.

المقدمة

سبق أن تعرفنا على الرمز **مجـ** مدلوله وخواصه وعلى مقاييس النزعة المركزية والتشتت وسندرس هذا العام الارتباط واشكال الانتشار والانحدار وبعض المفاهيم الاساسية في الاحتمالات مثل التجربة العشوائية وفضاء العينة وبعض الحوادث العشوائية والعمليات عليها وتعريف دالة الاحتمالية وبعض الخواص والنتائج الهامة الخاصة بها .

لمحة تاريخية

لقد نشأت نظرية الاحتمالات على أساس رياضي (١٤٩٤م) بواسطة باسيولي . ومن الدراسات الفلكية لكل من كبلر(١٥١٧ - ١٦٣٠) وجاليلو (١٥٦٤ - ١٦٤٢م) اللذين قاما بتطوير نماذج الاحتمالات غير أن التاريخ الحقيقي لنظرية الاحتمالات بدأ منتصف القرن السابع عشر ويبدو أنه نتيجة للابحاث التي قام بها العالمان الفرنسيان باسكال (١٦٢٣- ١٦٦٢) وفيرمات (١٦٠٨ - ١٦٦٥) عند دراستهما لأرقام معينة في عالم المراهنة وألعاب الحظ ، ولقد كان العمل الذي قام به هجينز (١٦٢٩ - ١٦٩٥) وهو نشر كتيب صغير في موضوع المعالجة الرياضية لعرض الفوز في مباريات ورق اللعب وزهرة النرد دافعاً للكثيرين لدراسة النظريات والمشاكل المتعلقة بمباريات الصدفة ومنهم برنوللي (١٦٥٤ - ١٧٠٥) ودي موافر (١٦٦٧ - ١٧٥٤) وأربثنوت ولابلاس (١٧٤٩ - ١٨٢٧) وجاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) كما أوضح كيتيليه (١٧٩٦ - ١٨٧٤) عالم الفلك الاجتماعي البلجيكي إمكان استخدام الاحتمالات والإحصاء لوصف وتفسير الظواهر الاجتماعية والاقتصادية وقدم مساهمات هامة في الطرق الإحصائية وفي تنظيم وإدارة الإحصاءات الرسمية إضافة إلى تقديمه طريقة عامة في الانثروبولوجيا وهناك الكثير من العلماء الذين ساهموا في نظرية التقديرات واختبارات الفروض منهم نيمان وعالم الإحصاء الإنجليزي فيشر (١٨٩٠ - ١٩٦٢) الذي كان من أهم أعماله البارزة نظرية التقديرات وتوزيعات المعاينة للعينات وتحليل التباين وتعميم وتحليل التجارب إضافة إلى عالم النفس الإنجليزي فرنسيس جالتون (١٨٢٢ - ١٩١١) الذي بدأ في دراسة موضوع الارتباط والانحدار وهو أول من أطلق مفهوم الإنحدار نتيجة لدراسته أطوال الأبناء بأطوال آبائهم وطوره من بعده عالم الإحصاء الإنجليزي كارل بيرسون(١٨٠٧ - ١٩٣٦) كما قدم أيضاً عالم النفس الإنجليزي سبيرمان (١٨٦٣- ١٩٤٥) مساهمات فعالة في دراسة الإرتباط وبعد الثلاثي : فيشر وبيرسون وريمان من مؤسسي منهج الاستقراء الاحصائي الذي يعرف حالياً بالإتجاه الكلاسيكي وشهدت تلك الفترة عملاً مكثفاً أدى ذلك العمل إلى نشوء وظيفة حديثة للإحصاء تحت اسم نظرية القرارات الإحصائية ويرجع ذلك إلى أعمال والدونيومان ومورجنسترن وصاحب ذلك التطور إلى بداية ظهور مجموعة من التخصصات المختلفة تهتم بمجالات وأهداف خاصة وبلغ هذا التطور قدراً يكاد يظهر علم الإحصاء كما لو أنه علم مستقل بذاته ومن هذا التخصصات بحوث العمليات والإحصاء السكاني ومراقبة الجودة والاقتصاد القياسي ، ونظراً لإعتماد العلوم المختلفة على الرياضيات من فهم لظواهرها وقياسها وتفسيرها فقد أفردت فيما بعد لهذه التخصصات فروع خاصة تهتم بدراسة ظواهرها بإستخدام الأساليب الإحصائية منها على سبيل المثال : الإحصاء الحيوي والاجتماع الرياضي والقياس الاجتماعي والنفسي والتربوي والإقتصادي إضافة إلى علم النفس الرياضي والتاريخ الاقتصادي الجديد وغيرها .

خلفية علمية

الرمز مجـ مدلوله وخواصه :

في كثير من الدراسات الإحصائية يكون من الضروري ان نعبر عن مجموع أعداد او رموز بطريقة مختصرة وبسيطة وقد استخدمنا الرمز « مجـ » للدلالة على المجموع كما يكتب هذا الرمز احياناً بالشكل « Σ » وهو حرف اغريقي ويقرأ « سجما » فاذا كان لدينا المقادير التالية:

١) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ن$

٢) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢$

٣) $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \dots + ن^٣$

٤) $س_١ + س_٢ + س_٣ + \dots + س_ن$

٥) $(س_١ + ص_١) + (س_٢ + ص_٢) + \dots + (س_ن + ص_ن)$

٦) $(س_١ \times ع_١) + (س_٢ \times ع_٢) + \dots + (س_ن \times ع_ن)$

فإنه يمكن إعادة كتابة هذه المقادير بإستخدام الرمز « مجـ » كما يلي :

١) $١ + ٢ + ٣ + \dots + ن = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

٢) $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢ = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

٣) $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \dots + ن^٣ = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ر^٣ = \frac{ن^٢(ن+١)^٢}{٤}$

٤) $س_١ + س_٢ + س_٣ + \dots + س_ن = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} س_ر$

٥) $(س_١ + ص_١) + (س_٢ + ص_٢) + \dots + (س_ن + ص_ن) = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} (س_ر + ص_ر)$

٦) $(س_١ + ع_١) + (س_٢ + ع_٢) + \dots + (س_ن + ع_ن) = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} (س_ر + ع_ر)$

خواص الرمز « مجـ »:

قاعدة (١) لاي عدد صحيح موجب ن يكون : $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} س_ر + \text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ص_ر$

قاعدة (٢) لاي عدد حقيقي ا يكون : $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ا\,س_ر = ا\,\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} س_ر$ (حيث ا مقدار ثابت)

قاعدة (٣) لاي عدد حقيقي ط يكون : $\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} ط = ن\,ط$ (حيث ط مقدار ثابت)

مقاييس النزعة المركزية والتشتت

سبقان درسنا طرق عرض البيانات الإحصائية ، في جداول وطرق تمثيل هذه البيانات بواسطة الأشكال الهندسية والرسومات البيانية بهدف الوصول إلى بعض خصائص المجتمعات الإحصائية التي جمعت عنها البيانات . هاتان الوسيلتان لا تكفيان للأهداف الإحصائية خاصة في حالة المتغيرات الكمية . ونعلم أن معظم الجداول هي جداول تكرارية توزع فيها مفردات الدراسة حسب فئات المتغير موضوع الدراسة مما يصعب على أي شخص إعطاء تصور عنها بشكل مباشر مما حذا بالإحصائيين إلى محاولة تلخيص هذه الجداول في عدد قليل من المقاييس الإحصائية التي يمكن بواسطتها إلقاء الضوء على بعض خصائص المجتمع موضوع الدراسة وتواجهنا في حياتنا العملية الكثير من المسائل والمواقف التي نحتاج فيها إلى مقارنة توزيعين تكراريين أو أكثر للظاهرة نفسها فقد نحتاج مثلاً إلى مقارنة أداء مجموعتين على اختبار تحصيلي أو اختبار ذكاء . . . إلخ . مما يجعلنا لا نستطيع أن نضع العلامات المفردة للتوزيعات التكرارية جنباً إلى جنب ونقارنها بل نلجأ عادة إلى التعبير عن أداء كل مجموعة بإيجاد متوسط الأداء وتشتته باستخدام المقاييس الاحصائية التي تقيس هاتين الخاصيتين ومن ثم نقارن المتوسطات لهذه المجموعات وتشتتها ، ومقاييس النزعة المركزية ماهي إلا محاولة لتلخيص البيانات في عدد واحد بحيث يمكن اتخاذ هذا العدد دليلاً مميزاً للبيان الإحصائي موضوع الدراسة ومن أهم مقاييس النزعة المركزية المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال وحيث إن هذه المقاييس وحدها لا تكفي لإعطاء انطباع كاف عن البيانات الإحصائية لغرض وصفها أو مقارنتها لذلك لابد من استعمال قياس إحصائي آخر يبين لنا مدى تباعد قيم المتغير عن بعضها وهذا الإحصائي هو التشتت ، وهناك مقاييس عديدة للتشتت أهمها المدى – نصف المدى الربيعي – الانحراف المتوسط – التباين – الانحراف المعياري وهذه المقاييس تعتبر جزءاً مكملاً لمقاييس النزعة المركزية فكلاهما ضروري لأغراض الوصف الإحصائي والاستنتاج الإحصائي. ولكي نوجد المتوسط الحسابي من البيانات المفردة س_1 ، س_2 ، س_3 ، . . . $\text{س}_{\text{ن}}$ نستخدم العلاقات التالية: $\bar{\text{س}} = \dfrac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$

أما إذا أردنا إيجاد المتوسط الحسابي من جداول التوزيعات التكرارية فإننا في هذه الحالة نعتمد على مراكز الفئات ونتعامل مع الجداول على أساس أن تكرارات الفئات هو تمثيل لقيم المتغيرا المدروس ويستخرج المتوسط الحسابي في هذه الحالة من العلاقة التالية :

$$\bar{\text{س}} = \dfrac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{ك}_{\text{ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}}$$

حيث: س = مراكز الفئات ، $\text{ك}_{\text{ر}}$ = تكرارات الفئات ، ن = عدد الفئات بالتوزيع التكراري ، ر = دليل الفئات التكرارية

ويمثل الوسيط الدرجة الثانية بعد المتوسط الحسابي من حيث أهميته ، ونتذكر دائماً على أنه مقياس يتوسط القياسات من حيث رتبها دون قيمها ، وقد رمزنا للوسيط بالرمز« و » وعندما تكون المشاهدات فردية فإن موقع الوسيط يكون هو : $\frac{\text{ن}+1}{2}$ أما عندما تكون المشاهدات زوجية فلا توجد قيمة وسيطة واحدة وإنما يكون الوسيط في هذه الحالة هو متوسط القيمتين الوسيطتين ، أي يكون : ($\frac{\text{ن}}{2}$ ، $\frac{\text{ن}}{2}+1$) وفي حالة ما يراد منا

لإيجاد قيمة الوسيط من جدول التوزيعات التكرارية نتبع مايلي :

١) ننشئ جدول التوزيع التكراري المجتمع الصاعد أو (النازل) .

٢) نحدد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية: ترتيب الوسيط = $\frac{\text{ن}}{2}$ ، حيث ن = مجموع تكرارات المشاهدات. فمثلاً إذا كانت ن = ٣٦ ⟸ ترتيب الوسيط = $\frac{36}{2} = 18$ وهذا العدديقع في المحور الرأسي وهو يحدد الفئة الوسيطية أي الفئة التي يقع داخلها الوسيط .

٣) نوجد قيمة الوسيط للتكرار المجتمع الصاعد من العلاقة التالية :

$$\text{و} = \text{ا} + \dfrac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_1}{\text{ك}_2} \times \text{ك}$$

حيث : ا = الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، ك_1 = التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة التي يقع فها الوسيط ، ك_2 = تكرار الفئة الوسيطية ، ل = طول الفئة الوسيطية

ونوجد قيمة الوسيط للتكرار المجتمع النازل من العلاقة التالية :

$$\text{و} = \text{ب} - \dfrac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_3}{\text{ك}_2} \times \text{ل}$$

حيث : ب = الحد الأعلى للفئة الوسيطية ، ك_3 = التكرار المتجمع النازل للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية.

الجدير بالذكر أنه يمكن أيضاً إيجاد قيمة الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة التالية :

$$\text{و} = \text{ا} + \dfrac{\frac{\text{ن}}{2} - \text{ك}_1}{\text{ك}_2 - \text{ك}_1} \times \text{ل}$$

حيث : ا = الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، ك_1 = التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة التي يقع فيها الوسيط ، ك = التكرار المتجمع للفئة التي يقع فيها الوسيط ، ل = طول الفئة الوسيطية = (الحد الأعلى للفئة الوسيطية – الحد الأدني للفئة الوسيطية) + ١

ويمكن إيجاد المنوال من التوزيعات التكرارية باتباع الآتي :

١) نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار في حالة الفئات المتساوية أو أكبر تكرار معدل في حالة الفئات غير المتساوية .

٢) نوجد قيمة المنوال داخل الفئة المنوالية . ويمكن إيجاد قيمة المنوال داخل الفئة المنوالية بأربع طرق مختلفة. إما بالرسم من المنحنى التكراري أو بطريقة العزوم (الرافعة) أو بطريقة الفروق (بيرسون) أو بطريقة الرسم من المدرج التكراري . ويكتفى للطالب في إيجاد قيمة المنوال بطريقة العزوم (الرافعة) وهي:

$$\hat{\text{م}} = \text{ا} + \dfrac{\text{ك}_2}{\text{ك}_1 - \text{ك}_2} \times \text{ل}$$

حيث : ا = الحد الأدنى للفئة المنوالية ، ك_1 = تكرار الفئة السابقة لفئة المنوال ، ك_2 = تكرار الفئة اللاحقة لفئة المنوال ، ل = طول الفئة المنوالية .

وفي مقاييس التشتت يكتفى بما قد ورد في كتاب الطالب (الانحراف المتوسط والتباين – الانحراف المعياري).

الارتباط وأشكال الانتشار

لقد تعرفنا سابقاً على متغير واحد وفي هذا البند سنتناول متغيرين يتغيران في وقت واحد بهدف التعرف على نوع العلاقة التي تربطهما . فإذا أردنا دراسة العلاقة بين الطول والوزن للفرد لمجتمع الذكور البالغين في الجمهورية اليمنية على عينة من هذا المجتمع عدد مفرداتها « ن » وإذا رمزنا لمتغير الطول بالرمز « س » ولمتغير الوزن بالرمز « ص » وإذا قمنا بتسجيل قيمة هذين المتغيرين لكل فرد من أفراد العينة موضوع الدراسة فتكون هذه المشاهدات هي : $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ ، .... ، $(س_ر ، ص_ر)$ ، .... ، $(س_ن ، ص_ن)$ ،

وهي عبارة عن أزواج مرتبة . نمثل كل زوج من هذه المشاهدات $(س_ر ، ص_ر)$ بنقطة على ورقة رسم بياني والشكل الناتج يسمى شكل الإنتشار . وأشكال الإنتشار تأخذ صوراً كثيرة ولن نتعرض في هذا البند إلا للأشكال التي توافق خطوط مستقيمة فقط . كما في كتاب الطالب . والغرض من رسم شكل الإنتشار هو من أجل التحديد بالنظر ما إذا كانت توجد علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص أم لا . وكلما كانت مجموعة النقط قريبة من خط يمكن رسمه يتوسط هذه النقط كلما كانت العلاقة بين هذين المتغيرين قوية وإذا كانت النقط مبعثرة ومشتتة وبعيدة عن أي خط يمكن رسمه بحيث يتوسط هذه النقط كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص ضعيفة وكثير من الإحصائيين يسمون الخط الذي يتوسط النقط موضوع الدراسة « خط الإنحدار » . الجدير بالذكر أنه قد لا توجد أية علاقة بين أي متغيرين نهائياً مثل الذكاء ولون العيون مثلاً . وعادة ما تقاس درجة الإرتباط بمعامل يسمى « معامل الإرتباط » ورمزنا له بالرمز « ر » وعندما تكون قيمة ر = +١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين موضوع الدراسة تكون علاقة طردية تامة (ارتباط خطي موجب) أي تكون جميع النقط في شكل الإنتشار واقعة على خط مستقيم أو قريبة جداً منه . وعند ما تكون قيمة ر = − ١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين موضوع الدراسة تكون علاقة عكسية تامة (ارتباط خطي سالب) وتقع كذلك جميع النقط في شكل الانتشار على خط مستقيم أيضاً أما عندما يكون قيمة ر = ٠ فهذا يعني عدم وجود أية علاقة بين المتغيرين موضوع الدراسة نهائياً . ونشير هنا أن قيمة « ر » لا يمكن أن تتجاوز واحداً صحيحاً سواء بإشارة موجبة أم إشارة سالبة أي أن : $-١ \leq ر \leq ١$ وهناك عدة معاملات ارتباط شائعة الاستعمال ونكتفي هنا في معاملي بيرسون وسبيرمان لارتباط الرتب فقط وقد رمزنا لمعامل ارتباط بيرسون بالرمز « ر » ولمعامل ارتباط سبيرمان بالرمز « ρ » وهو حرف اغريقي (يوناني) يُقرأ « رُو » وحرصنا على تقديم ثلاث علاقات هامة لحساب معامل ارتباط بيرسون إضافة إلى ملاحظة هامة تساعد على تسهيل العمل الحسابي في حساب معامل إرتباط بيرسون أيضاً وقد استخدمنا في هذه الملاحظة الإنحرافات البسيطة ولذلك ينبغي التركيز عليها جيداً والعلاقات الثلاث الهامة التي استخدمناها في حساب معامل ارتباط بيرسون هي :

أ) حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلاقات المعيارية وهي : $ر = \frac{\text{مجـ } ز_{س} \times ز_{ص}}{ن}$ حيث :

$ز_{س}$ = العلاقة المعيارية لقيم المتغير س ، $ز_{س} = \frac{ح_{س}}{ع_{س}}$ ، $ح_{س} = س - \bar{س}$ ، $ع_{س} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن}}$

وبشكل مماثل $ز_{ص}$ = العلاقة المعيارية لقيم المتغير ص ، $ز_{ص} = \frac{ح_{ص}}{ع_{ص}}$ ، $ح_{ص} = ص - \bar{ص}$ ،

$ع_{ص} = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(ص - \bar{ص})^2}{ن}}$ ، ن = عدد أزواج المشاهدات

ب) حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلاقة المختزلة وهي :

$$ر = \frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{\sqrt{[\text{مجـ}(س - \bar{س})^2]\,[\text{مجـ}(ص - \bar{ص})^2]}}$$

جـ) حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام العلاقات الخام وهي :

$$ر = \frac{ن \ \text{مجـ } س \times ص - (\text{مجـ } س)\,(\text{مجـ } ص)}{\sqrt{[ن \ \text{مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2]\,[ن \ \text{مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2]}}$$

وبالنسبة للملاحظة كما في كتاب الطالب . وبالنسبة لمعامل سبيرمان لارتباط الرتب فقد أوردنا علاقة واحدة فقط لحسابه وهي : $\rho = ١ - \frac{٦ \ \text{مجـ } ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$ حيث : ف = الفرق بين المتغيرين موضوع الدراسة ،

$ف^2$ = مجموع مربعات الفرق بين المتغيرين ، ن = عدد المشاهدات .

ولحساب المعامل « ρ » نتبع الخطوات الواردة في كتاب الطالب تماماً مع الانتباه لترتيب القيم والقيم المكررة كما في مثال (١٠ − ٨) في كتاب الطالب . وحل جميع أمثلة معاملي بيرسون وسبيرمان كاملة دون انتقاص .

الإنحدار :

إذا ارتبط متغيرين بعلاقة فإنه يمكن التنبوء بأيّ منهما إذا علم أحدهما وتعتمد دقة التنبوء على قوة العلاقة بين المتغيرين موضوع الدراسة . فكلما كانت قيمة $ر = \pm ١$ (أي العلاقة قوية بين المتغيرين) كلما كان التنبوء أكثر دقة أما إذا كانت قيمة ر = ٠ فإننا لا نستطيع التنبوء بأي من المتغيرين نهائياً . ولذلك يعتبر معامل الارتباط الخطي « ر » مؤشراً قوياً على إمكانية التنبوء إلا أنه لا يكفي وحده ، إذ لا بد من الاستعانة ببعض الطرق الرياضية . وفي ها المجال يستفاد كثيراً من معادلة الخط المستقيم ص = ا س + ب حيث الثابت « ا » يمثل ميل هذا المستقيم أي يمثل الزاوية التي يصنعها هذا المستقم مع المحور الموجب لمحور السينات والثابت « ب » يمثل المسافة أو الجزء المقطوع من محور الصادات عندما تكون قيمة س = ٠ والثابتان ا ، ب يحددان الخط المستقيم تماماً . وسوف نسمي هنا معادلة الخط المستقيم ص = ا س + ب « بمعادلة خط الانحدار » والثابتين ا ، ب بمعاملي معادلة خط الانحدار . ولكي نحل المعادلة ص = ا س + ب يتطلب منا حساب المعاملين ا ، ب على أساس البيانات المتوفرة للمتغيرين موضوالدراسة . وعادة ما يكون استخراج قيمة المعامل « ا » شرطاً مسبقاً لاستخراج قيمة المعامل « ب » . وإذا اردنا التنبوء بقيم المتغير ص مثلاً من خلال معرفتنا بقيم المتغير س فإننا نستخدم المعادلة : ص = ا س + ب وفي هذه الحالة يكون قيمة ا هي :

$$ا = \frac{ن \ \text{مجـ}(س \times ص) - (\text{مجـ } س)\,(\text{مجـ } ص)}{ن \ \text{مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2} \quad ...(١)$$

$ب = \bar{ص} - ا\,\bar{س}$

أما إذا أردنا العكس أي التنبوء بقيم المتغير س من خلال معرفتنا بقيم المتغير ص فإننا نستخدم المعادلة :

س = ا ص + ب وفي هذه الحالة يكون قيمة ا هي :

$$ا = \frac{ن \ \text{مجـ}(س \times ص) - (\text{مجـ } س)\,(\text{مجـ } ص)}{ن \ \text{مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2} \quad ...(٢)$$

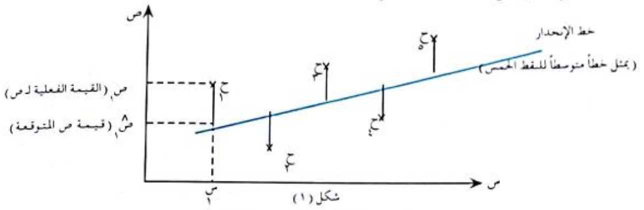
ب = سَ − ا صَ ، ويمكن من العلاقة (١) استنباط عدة صور لقيمة ا من ضمنها العلاقة التالية :

$ا = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}$ وهذه الصورة تمثل العلاقة بين معامل الانحدار « ا » ومعامل الارتباط « ر » عندما يكون التنبوء بقيم ص من خلال معرفة قيم س ، أما إذا كان التنبوء بقيم س من خلال معرفة قيم ص فإننا نستخدم العلاقة التالية :

$ا = ر \times \frac{ع_س}{ع_ص}$ حيث : ر = معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س ، ص موضوع الدراسة ،
$ع_س$ = الانحراف المعياري لقيم المتغيرين س ، $ع_ص$ = الانحراف المعياري لقيم المتغير ص

الجدير بالذكر أننا قد بينا كيفية رسم خط الإنحدار في بند الارتباط السابق إلا أن تلك الطريقة ليست دقيقة وقد تعطي نتائجا مختلفة باختلاف الاشخاص الذين يقومون برسم هذا الخط . وقد توصل الإحصائيون إلى ابتداع طريقة عامة لرسم هذه الخط بحيث لو استعملها الجميع فإنهم يتوصلون إلى نفس النتيجة ونفس الخط وهذه الطريقة تستند إلى معيار المربعات الصغرى وهذا المعيار ينص على أن خط الإنحدار يجب أن يرسم بحيث يكون مجموع مربعات الانحرافات عنه أقل ما يمكن .

ولتوضيح ذلك دعنا ندرس الشكل (١) التالي الذي من خلاله نتنبأ بقيم ص من خلال معرفة قيم س حيث يتم التنبوء من خلال خط الانحدار .



شكل (١)

رسم توضيحي لفكرة انحراف قيم ص عن خط الانحدار

إن شكل (١) يبين لنا انحرافات قيم ص عن القيم المتوقعة لها من خلال خط الإنحدار لعدد خمس نقاط . حيث $ح_1$ يمثل الانحراف الأول للنقطة الأولى ، $ح_2$ يمثل الانحراف الثاني للنقطة الثانية . . . وهكذا . وإذا رمزنا لإنحراف قيمة ص الفعلية عن القيمة المتوقعة $\hat{ص}$ من خلال خط الإنحدار بالرمز ح فإن :

$$ح = ص_1 - \hat{ص}_1$$

وهي كما هو واضح تساوي الفرق بين القيمة الفعلية لـ ص وقيمة ص المتوقعة من خلال الخط . وهذه الأخيرة يتم الحصول عليها من خلال المعادلة : $\hat{ص}_1 = ا س_1 + ب$ وبذلك فإن :

$$ص_1 - \hat{ص}_1 = ص_1 - (ا س_1 + ب)$$

وان مربع الانحراف $(ص_1 - \hat{ص}_1)^2 = [ص_1 - (ا س_1 + ب)]^2$ وعليه فإن مجموع مربعات الانحرافات ستكون كما يلي :

$$مجـ (ص - \hat{ص})^2 = مجـ [ص - (ا س + ب)]^2 \quad ...(١)$$

وحيث إن معيار المربعات الصغرى يعتمد على كون قيمة مجموع المربعات أقل ما يمكن . لذا فإنه يلزم لتحقيق ذلك إجراء عملية التفاضل الجزئي للعلاقة (١) أولاً بالنسبة إلى ا وثانياً بالنسبة إلى ب وجعل الناتج في كل مرة يساوي صفراً ومن خلال حل المعادلتين الناتجتين نحصل على قيم كل من المعاملين ا ، ب وحيث إن استخراج قيمة المعاملين ا ، ب يعتمد على إجراء تفاضل جزئي لذلك أوردنا قيمتها للطلاب مباشرة دون الخوض في التفاضلات الجزئية لأنها فوق مستواهم وأوردنا التفاصيل هنا من أجل أن نبين للمعلم فقط كيف أوجدنا قيمة المعاملين ا ، ب . ولمزيد من التوضيح اكثر عن الانحدار نقدم المثالين التاليين :

مثال (١) : أوجد معادلة الخط الذي ميله − ٤ والجزء المقطوع من محور الصادات هو ١٦ .

الحل : ا = − ٤ ، ب = ١٦ وحيث إن : ص = ا س + ب

∴ ص = ١٦ − ٤ س .

مثال (٢) : اكتب معادلة الانحدار التي نتنبأ بها عن قيم ص من خلال قيمة س من بيانات جول (١٠ − ١) وإذا كانت س = ١٧ فما قيمة ص ؟

جدول (١٠ − ١)

س	٢٠	١٨	١٦	١٥	١٤	١٢	١٢	١٠	٨	٥
ص	١٢	١٦	١٠	١٤	١٢	١٠	٩	٨	٧	٢

الحل :

لاحظ أن : ن = ١٠ ، مجـ (س × ص) = ١٤٤٠ ، مجـ س = ١٣٠ ، مجـ ص = ١٠٠ ،
مجـ $س^2$ = ١٨٧٨ ، $(مجـ س)^2$ = ١٦٩٠٠ ، سَ = ١٣ ، صَ = ١٠ وحيث إن :

$$ا = \frac{ن \; مجـ (س \times ص) - (مجـ س)(مجـ ص)}{ن \; مجـ س^2 - (مجـ س)^2} \quad ، ب = صَ - ا سَ$$

$$∴ ا = \frac{١٠ \times ١٤٤٠ - ١٣٠ - ١٠٠}{١٠ \times ١٨٧٨ - ١٦٩٠٠} = ٠,٧٤ \quad ، ب = ١٠ - ٠,٧٤ \times ١٣ = ٠,٣٨$$

وحيث إن معادلة الانحدار عندما نتنبأ بقيم ص من خلال معرفة قيم س هي : ص = ا س + ب

∴ ص = ٠,٧٤ س + ٠,٣٨ وهي معادلة الإنحدار المطلوب كتابتها .

وعندما س = ١٧ ⟸ ص = ٠,٧٤ × ١٧ + ٠,٣٨ = ١٢,٦٩

الإحتمالات

لقد كانت قضايا الحظ والصدفة تعتبر في الماضي من الأمور الغامضة التي لا تخضع إلى تحليل رياضي أو تنبوء علمي ولكن الرياضيين أثبتوا عكس ذلك حين استطاعوا أن يحوّلوا مثل هذه القضايا إلى علم يساهم في التنمية وتقدم البشر . وعلم الاحتمال يهتم بدراسة التجارب العشوائية ولذلك لقد أوردنا في هذا البند الكثير من المبادئ والمفاهيم الاساسية الاولية الهامة كمدخل للاحتمال. مثل التجربة العشوائية وفضاء العينة وبعض الحوادث العشوائية والعمليات الاساسية عليها إضافة إلى تعريف دالة الاحتمال وبعض الخواص والنتائج الهامة الخاصة بها.

وما في كتاب الطالب من رموز ومصطلحات وتعاريف ومعارف كاف . ومن أراد من الأخوة المعلمين الإثراء والتوسع أكثر في الإحصاء والإحتمالات يمكنه العودة إلى المرجعين التاليين :

١) كتاب الممتاز المصري

٢) سلسلة ملخصات سيشوم (نظريات ومسائل في الإحصاء ، نظريات ومسائل في الاحتمالات) .

وفيما يلي نذكر المعلم بأهم ما يجب أن يركز عليه في هذا البند :

- التجربة العشوائية : أي إجراء أو محاولة نعلم مسبقاً جميع نواتجها الممكنة وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ أي هذه النواتج سيقع أو سيتحقق فعلاً . ومن الأمثلة على التجربة العشوائية : رمي قطعة نقود ، ورمي حجر نرد ، سحب ورقة من بين أوراق لعب عادي ، . . . إلخ .
- فضاء العينة : هي جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز لها بارمز « ع » ونسمي كل نتيجة ممكنة نقطة عينة أو حادثة ابتدائية .
- فضاء الحوادث : هي مجموعة الحوادث التي يمكن تكوينها من فضاء العينة ويرمز لها بالرمز « ك » أي أن ك هي مجموعة كل المجموعات الجزئة التي يمكن تكوينها من الفضاء ع .
- الحدث المستحيل : إذا لم تحتو المجموعة الجزئية على عنصر من ع فإن الحدث ∅ يدعى حدثاً مستحيلاً
- الحدث المؤكّد : هو فضاء العينة ع في أي تجربة باكملها .
- العمليات على الحوادث العشوائية :

١) إذاكانت ا حادثة (ا ∈ ك) فإن : اَ مكملة ا

٢) إذا كانت ا ، ب حادثتين من ك فإن :

- ا ∪ ب هي الحادثة التي تتكون من عناصر ا أو ب أو كليهما وترمز لوقوع إحدى الحادثتين ا أو ، ب على الأقل.
- (ا ∩ ب) هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين ا ، ب وترمز لوقوع الحادثتين معاً.

لاحظ أن : (ا ∩ ب) تكتب أحياناً اب ولها المعنى نفسه

- (ا – ب) هي الحادثة التي تتكون من عناصر ا التي لا تنتمي إلى ب وترمز لوقوع الحادثة ا وعدم وقوع الحادثة ب

لاحظ أن : (ا – ب) تكتب أحياناً (ا ∩ بَ) أو ا بَ والصيغ الثلاث لها المعنى نفسه .

- (ا ∩ ب)′ هي الحادثة التي تتكون من عناصر ع التي لا تنتمي إلى (ا ∩ ب) وترمز لعدم وقوع الحادثتين ا ، ب معاً . وحيث إن (ا ∩ ب)′ = اَ ∩ بَ فإن هذه الحادثة ترمزلوقوع إحدى الحادثتين ا أو ب على الأكثر .

٣) يقال إن ا ، ب حادثتان متنافيتان (منفصلتان) إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الأخرى أي أن:

ا ∩ ب = ∅ ، وهذا يعني أن الحادثتين لا يمكن أن تقعا معاً. ويقال إن ا١ ، ا٢ ، ... ، ان هي : « ن » حوادث متنافية مثنى مثنى بمعنى أن : ار ∩ ال = ∅ لأي ١ ≤ ر ≤ ن ، ١ ≤ ل ≤ ن .

- دالة الإحتمال : إذا كان ع فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان ك فضاء الحوادث [٠ ، ١] ⊂ ح (ح مجموعة الأعداد الحقيقيه) فإن الدالة حا : ك ← [٠ ، ١] تسمى دالة احتمال إذا توفرت فيها المسلمات الآتية:

١ - حا(ا) ≥ ا ∈ ك

٢ - حا(ا) + حا(ع) = ١

٣ - لكل حادثتين متنافيتين ا ، ب يكون حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا (ب)

المسلمة (٣) يمكن تعميمها لاكثر من حادثتين .

نأمل أن يستوعب الطلاب كل هذه التعاريف والرموز والمصطلحات جيداً لأنها خير معين لهم لفهم دروس احتمالات العام القادم .

توجيهات طرائقية عامة

إنّ لطريقة التدريس أثراً كبيراً في تحقيق أهداف الدرس وينبغي أن نتذكّر دائماً أنه لا يكفي أن يكون المعلم متمكناً في مادته العلمية وإنما يجب أن يكون فناناً بارعاً ومبدعاً في طريقة أدائه وشرحه وتبسيطه لمعارف الدروس، إضافة إلى اتصاله وتفاهمه وعلاقته الحسنة مع طلابه. ويجري تحديد الطريقة تبعاً لطبيعة موضوع الدرس وأهدافه المرجوة. وطريقة التدريس تختلف من مادة إلى أخرى ومن موضوع إلى آخر وربما يستخدم المعلم في الدرس الواحد أكثر من طريقة. وينبغي على المعلم الانتباه دائماً إلى أن عامل الإثارة والتشويق يجب أن يستمر طوال مراحل الدرس وأن يراعي الفروق الفردية بين الطلبة واستخدام الأساليب التي تنشّط التفكير والإبداع والاعتماد على النفس وتحقّق أكبر قدر ممكن من مشاركة الطلبة بحيوية ونشاط وفاعلية الدرس . ولا بد من أن نؤكد هنا مرة ثانية على ضرورة التنويع في طرائق التدريس في الموضوع الواحد كما أسلفنا القول. وهذا يتطلّب من المعلم أن تكون خطته الدراسية مرنه قابلة للإضافة أو الحذف.

واستخدام المعلم لطريقة واحدة يبعث الملل والسأم في نفوس الطلبة، ولذلك لا بدّ للمعلم من التنويع في طرائق التدريس واختيار الطرق المناسبة في الدرس الواحد لاستثارة دافعية الطلبة وتحفيزهم على تعلّم معارف

الوحدة. فالطالب داخل الفصل يستطيع أن يستمع إلى شرح المعلّم للدرس ويستطيع أن يقرأ ما كتبه المعلم على السبورة أو أن يقرأ مادة أخرى، كما يستطيع التحدث مع زميله ويستطيع أن يفكر في أمور أخرى خارجة عن الدرس، بمعنى آخر إنّ جهاز الاستقبال لدى الطالب يكون مشغولاً في أمور جانبية خارجاً عن الدرس. لذلك نجد أن الطالب الذي يسلك مثل هذا السلوك لا يستوعب شيئاً من الدرس الذي يشرحه المعلم له ولزملائه على السبورة ويمكن للمعلم أن يتعرّف على سلوك أمثال هؤلاء الطلبة من خلال تحركه وتجواله بين الحين والآخر بين صفوف الطلبة أثناء شرحه للدرس لمراقبة من يتابعه ومن لايتابع شرحه على السبورة، ومن يراه شارداً عن شرحه يحاول يشد انتباهه لان مراقبة المعلم وملاحظته ومتابعته لكل حركات وتصرفات الطلبة داخل الفصل لا شك تساهم وتساعد الطلبة إلى حد ما على فهمهم واستيعابهم للدروس التي يشرحها لهم على السبورة، ولذلك اد عو كل معلم يعلم في المدرسة أن يتخذ من الاساليب الديمقراطية ما يجعل الطالب يحب المعلم والمادة لان التعليم في الاساس هو عبارة عن تكوين علاقة بين مثير وإجابة ويجب أن تثبت هذه العلاقة وتستمر وتتكرر عن طواعية لدى الطلبة لا شك أنها ستكون فاعلة ومفيدة. ومثل هذا التعليم يسمّى تعليماً مركّزاً وموجّهاً نحو تحقق الهدف المحدّد تحديداً دقيقاً في بداية الحصه، وفيما يلي نقدّم بعض التوصيات والتوجيهات التي تساعد المعلم على تنفيذ دروس هذه الوحدة :

١- أنّ ما يحتويه الدليل من توزيع الحصص هو مجرد اقتراح يمكن للمعلّم الأخذ به أو تعديله حسب ما يقتضيه الموقف التعليمي وبما يحقق أهداف الدرس.

٢- يشكل البند «١» مراجعة عامة لما قد سبق تدريسه في وحدة إحصاء العام الماضي أما البنود ٢، ٣، ٤ فهي بنود جديدة على الطلبة، ولذلك يجب على المعلّم إعطاء إهتمام بما يمكن الطلبة من المادة ويستخدم الأمثلة ويناقش الواجبات .

٣- التحديد والانتقاء للتمارين التي تعطى للطلبة من بين مجموعة التمارين الموجودة بعد نهاية كل بند، وتقديم الإرشادات للتمارين التي يراها صعبة على الطلبة سواء التمارين الموجودة بعد نهاية كل بند في كتاب الطالب أو التي في كتاب التمارين الملحق.

٤- إعطاء الطلبة أسئلة الاختبارين الموجودين في كتاب التمارين ودليل المعلم مع توصويب كل الأخطاء التي قد يقع فيها الطلاب على السبورةسواء أسئلة الاختبارين أو الواجبات المنزلية التي تعطى للطلبة من كتاب الطالب وكتاب التمارين .

٥- إعطاء الحرية للطلبة أثناء شرح الدرس في طرح الأسئلة والاستفسارات عن كل الأمور الغامضة عليهم في الدرس والرد عليها من قبل المعلّم بصدر رحب دون انفعال.

٦- الدقة في استخدام اللغة والرموز والمصطلحات وتوضيح مدلولات كل هذه الرموز للطلبة وكتابة كل الحقائق والتعاريف داخل براويز وتبيينها للطلبة والتركيز عليها جيداً.

٧- تدريب الطلبة على كيفية تكوين الجداول الإحصائية واستخدام الحاسبات الصغيرة والكمبيوتر وكل التقنيات الحديثة ذات العلاقة بدروس الإحصاء ومحاولة الاستفادة في هذا الجانب من كل الإمكانات المتوفرة في المؤسسات التعليمية الاخرى التي يتوفر فيها مثل هذه التقنيات الحديثة.

٨- تقديم كل ما يساهم في تطوير المادة وتنمية معارفها للافضل والاحسن من ملاحظات وأبحاث وتصورات ومقترحات من خلال كافة الوسائل الممكنة وإعطائها فريق التاليف .

٩- التفاهم والاتصال وحسن المعاملة الجيدة مع الطلبة فالطالب لا يمكن ان يتعلّم شيئاً إذا لم يحب استاذه، لذلك يجب أن تكون علاقة المعلم مع طلابه علاقة حب ووفاء لا علاقة رئاسة وتسلّط واستبداد وأوامر، . . .الخ . وإنما يجب على المعلم ان يتخذ من الاساليب ما يجعل طلبته يحبونه ويستجيبون له ويحبون مادته ويستمعون لشرحه، فالمعلم الناجح يكون بمثابة منشط ومشجع وصبور ورحيم ، وغير منفعل ولا يحتقر طلبته ولا يصدّهم ولا يسخر منهم ولا يكبح شعورهم ويرد على كل تساؤلاتهم واستفساراتهم بصدر رحب دون انفعال .

١٠- إجراء تقويمات قبلية عن طريق إجراء بعض الأسئلة الشفوية وغيرها حول موضوع الدرس وتقويمات بعدية بعد كل درس وكل الدروس ذات العلاقة للتاكد من استيعاب الطلبة كل معارف الوحدة .

١١- التركيز على ممارسة وتطبيق كل ما قد تعلمه الطلبة من دروس عملياً فالمرء لا يستطيع ان يتعلم السباحة إلا إذا مارسها .

١٢- التركيز على جودة التعليم وجودة التعليم مرتبط بكفاءة المعلم.

١٣- إجراء الانتقاء المناسب لكمية ونوعية المعارف ومدى مناسبتها مع زمن الحصة.

١٤- التحديد الواضح الدقيق للأهداف المعرفية والوجدانية والمهاراتية وتعريف الطلبة بها مسبقاً قبل شرح الدرس لهم وعمل منافسات ومسابقات ونشاطات للطلبة على مستوى الشعبة والشعب الأخرى في المدرسة والمدارس الأخرى وإشعار أولياء الأمور بمستويات تحصيل أبنائهم العلمي في المادة وفي سلوكهم في المدرسة.

١٥- متابعة حضور الطلبة يومياً في كل درس وخاصة الطلبة الذكور بعد الراحة لان حضور الطالب أمر مهم في استيعاب معارف الدرس.

١٦- استثمار جميع الحواس في توصيل المادة العلمية إلى أذهان الطلبة بشكل سليم وصحيح.

١٠ - ١ مراجعة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا البند إلى مراجعة مدلول الرمز « **مجـ** » ومقاييس النزعة المركزية والتشتت ويركز على الانحراف المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري .

١٠ - ٢ الارتباط وأشكال الانتشار

عدد الحصص : (٦) حصص .

الأهداف

- يتعرّف أشكال الانتشار .
- يعرّف الارتباط .
- يتعرّف نوع الارتباط بين متغيرين .
- يتعرّف شروط معامل ارتباط بيرسون .
- يحسب معامل ارتباط بيرسون .
- يتعرّف الخطوات المتبعة في حساب معامل سبيرمان لارتباط الرتب .
- يحسب معامل ارتباط الرتب .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : أشكال الانتشار .

الحصة الثانية : معامل بيرسون .

الحصة الثالثة : معامل سبيرمان .

الحصة الرابعة : أمثلة على المعاملين .

الحصتان الخامسة والسادسة : تمارين صفية

التقويم يتم التقويم بنائيًا وفي نهاية الحصة السادسة يعطى التمرين التالي :

فيما يلي بيانات عن عمر الزوج (س) وعمر الزوجة (ص) لمجموعة من خمس اسر.

عمر الزوج (س)	٤٠	٣٦	٥٥	٢٩	٣٩
عمر الزوجة (ص)	٣٥	٣١	٤٩	٣٠	٣٨

المطلوب: ١ - احسب معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص

٢ - احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب بين س ، ص

إرشادات وإجابات : تمارين (١٠ - ١)

[١] : نكون الجدول المرسوم جانبًا :

	س	ص	$س^2$	$ص^2$	س × ص
	١١	٣	١٢١	٩	٣٣
	١٣	٤	١٦٩	١٦	٥٢
	١٥	٧	٢٢٥	٤٩	١٠٥
	١٩	٥	٣٦١	٢٥	٩٥
	٧	١	٤٩	١	٧
المجموع	٦٥	٢٠	٩٢٥	١٠٠	٢٩٢

$$\because ر = \frac{\text{ن مجـ}(س \times ص) - (\text{مجـ } س)(\text{مجـ } ص)}{\sqrt{(\text{ن مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2)(\text{ن مجـ } ص^2 - (\text{مجـ } ص)^2)}}$$

$$\therefore ر = \frac{٥ \times ٢٩٢ - ٦٥ \times ٢٠}{\sqrt{[٥ \times ٩٢٥ - (٦٥)^2][٥ \times ١٠٠ - (٢٠)^2]}} = \frac{١٤٦٠ - ١٣٠٠}{\sqrt{(٤٦٢٥ - ٤٢٢٥)(٥٠٠ - ٤٠٠)}}$$

$$= \frac{١٦٠}{\sqrt{٤٠٠ \times ١٠٠}} = \frac{١٦٠}{\sqrt{٤٠٠٠٠}} = \frac{١٦٠}{٢٠٠} = \frac{٤}{٥} = ٠,٨$$

[٢] : نكوّن الجدول التالي :

	$س_ر$	$س_ر^2$	$ص_ر$	$ص_ر^2$	$(س_ر \times ص_ر)$
	٥	٢٥	٢٠	٤٠٠	١٠٠
	٤	١٦	٢٠	٤٠٠	٨٠
	٦	٣٦	١٥	٢٢٥	٩٠
	٧	٤٩	١٢	١٤٤	٨٤
	٨	٦٤	١٠	١٠٠	٨٠
	١٠	١٠٠	١٠	١٠٠	١٠٠
المجموع	٤٠	٢٩٠	٨٧	١٣٦٩	٥٣٤

$$\because ر = \frac{\text{ن مجـ } س_ر ص_ر - \text{مجـ } س_ر \times \text{مجـ } ص_ر}{\sqrt{[\text{ن مجـ } س_ر^2 - (\text{مجـ } س_ر)^2][\text{ن مجـ } ص_ر^2 - (\text{مجـ } ص_ر)^2]}}$$

$$\therefore ر = \frac{٦ \times ٥٣٤ - ٤٠ \times ٨٧}{\sqrt{(٦ \times ٢٩٠ - ١٦٠٠)(٦ \times ١٣٦٩ - ٧٥٦٩)}}$$

$$= \frac{٣٢٠٤ - ٣٤٨٠}{\sqrt{(١٧٤٠ - ١٦٠٠)(٨٢١٤ - ٧٥٦٩)}} = \frac{-٢٧٦}{\sqrt{١٤٠ \times ٦٤٥}} = \frac{-٢٧٦}{\sqrt{٩٠٣٠٠}}$$

$= -٠,٩٢$ ، يتضّح أن هناك ارتباطاً قوياً في الاتجاه السالب بين س ، ص

[٣] ١) نكوّن الجدول التالي :

مسلسل	قيم س مرتبة	رتبة س	قيم ص مرتبة	رتبة ص
١	٣٢	١	٣٥	١
٢	٣٦	٢	٤٤	٢
٣	٤٥	٣	٥٥	٣
٤	٥١	٤	٥٦	٤
٥	٥٣	٥	٥٨	٥
٦	٦٦	٦	٦٠	٦
٧	٦٧	٧	٧٠	٧
٨	٧٦	٨	٧٦	٨
٩	٨٤	٩	٨٠	٩
١٠	٨٨	١٠	٨١	١٠

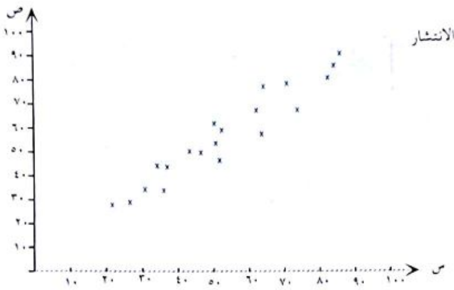
٢) نكوّن جدولاً آخر كالتالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = س − ص	ف²
٥٣	٤٤	٥	٢	٣	٩
٣٦	٥٨	٢	٥	٣−	٩
٨٨	٧٦	١٠	٨	٢	٤
٨٤	٨٠	٩	٩	٠	٠
٤٥	٥٥	٣	٣	٠	٠
٦٧	٧٠	٧	٧	٠	٠
٦٦	٦٠	٦	٦	٠	٠
٧٦	٨١	٨	١٠	٢−	٤
٣٢	٣٥	١	١	٠	٠
٥١	٥٦	٤	٤	٠	٠
					٢٦

∵ $(ر) = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$

∴ $(رو) = ١ - \frac{٦ \times ٢٦}{١٠(١٠٠ - ١)} = ١ - \frac{١٥٦}{٩٩٠} = ١ - ٠,١٦ = ٠,٨٤$

[٤] أ) رسم شكل الانتشار



ب) نكوّن الجدول التالي :

	$س_ر$	$س_ر^٢$	$ص_ر$	$ص_ر^٢$	$(س_ر \times ص_ر)$
	٥٣	٢٨٠٩	٤٥	٢٠٢٥	٢٣٨٥
	٣٦	١٢٩٦	٤٣	١٨٤٩	١٥٤٨
	٨٨	٧٧٤٤	٨٩	٧٩٢١	٧٨٣٢
	٨٤	٧٠٥٦	٧٩	٦٢٤١	٦٦٣٦
	٨٦	٧٣٩٦	٨٤	٧٠٥٦	٧٢٢٤
	٦٤	٤٠٩٦	٦٦	٤٣٥٦	٤٢٢٤
	٤٥	٢٠٢٥	٤٩	٢٤٠١	٢٢٠٥
	٤٨	٢٣٠٤	٤٨	٢٣٠٤	٢٣٠٤
	٣٩	١٥٢١	٤٣	١٨٤٩	١٦٧٧
	٦٧	٤٤٨٩	٧٦	٥٧٧٦	٥٠٩٢
	٥٤	٢٩١٦	٥٩	٢٤٨١	٣١٨٦
	٧٣	٥٣٢٩	٧٧	٥٩٢٩	٥٦٢١
	٦٥	٤٢٢٥	٥٦	٣١٣٦	٣٦٤٠
	٢٩	٨٤١	٢٨	٧٨٤	٨١٢
	٥٢	٢٧٠٤	٥١	٢٦٠١	٢٦٥٢
	٢٢	٤٨٤	٢٧	٧٢٩	٥٩٤
	٧٦	٥٧٧٦	٧٦	٥٧٧٦	٥٧٧٦
	٣٢	١٠٢٤	٣٤	١١٥٦	١٠٨٨
	٥١	٢٦٠١	٦٠	٣٦٠٠	٣٠٦٠
	٣٧	١٣٦٩	٣٢	١٠٢٤	١١٨٤
المجموع	١١٠١	٦٨٠٠٥	١١٢٢	٦٨٩٩٤	٦٨٧٤٠

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٢٠ \times ٦٨٧٤٠ - ١١٠١ \times ١١٢٢}{\sqrt{[٢٠ \times ٦٨٠٠٥ - (١١٠١)^{٢}][٢٠ \times ٦٨٩٩٤ - (١١٢٢)^{٢}]}}$$

$$= \frac{١٣٧٤٨٠٠ - ١٢٣٥٣٢٢}{\sqrt{(١٣٦٠١٠٠ - ١٢١٢٢٠١)(١٣٧٩٨٨٠ - ١٢٥٨٨٨٤)}}$$

$$= \frac{١٣٩٤٧٨}{\sqrt{(١٤٧٨٩٩)(١٢٠٩٩٦)}} = \frac{١٣٩٤٧٨}{١٣٣٧٧٢,٨٩} \approx ١$$

[٥] : نكوّن الجدول التالي :

	$\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{س}^{٢}_{\text{ر}}$	$\text{ص}_{\text{ر}}$	$\text{ص}^{٢}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}}$
	٨	٦٤	٩	٨١	٧٢
	٣	٩	٥	٢٥	١٥
	٩	٨١	١٠	١٠٠	٩٠
	٢	٤	١	١	٢
	٧	٤٩	٨	٦٤	٥٦
	١٠	١٠٠	٧	٤٩	٧٠
	٤	١٦	٣	٩	١٢
	٦	٣٦	٤	١٦	٢٤
	١	١	٢	٤	٢
	٥	٢٥	٦	٣٦	٣٠
المجموع	٥٥	٣٨٥	٥٥	٣٨٥	٣٧٣

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{١٠ \times ٣٧٣ - ٥٥ \times ٥٥}{\sqrt{[١٠ \times ٣٨٥ - (٥٥)^{٢}][١٠ \times ٣٨٥ - (٥٥)^{٢}]}} = \frac{٣٧٣٠ - ٣٠٢٥}{\sqrt{(٣٨٥٠ - ٣٠٢٥)(٣٨٥٠ - ٣٠٢٥)}}$$

$$= \frac{٧٠٥}{\sqrt{(٨٢٥ \times ٨٢٥)}} = \frac{٧٠٥}{٨٢٥} = ٠,٨٥$$

[٦] أ) نكوّن الجدول التالي :

	$\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{س}^{٢}_{\text{ر}}$	$\text{ص}_{\text{ر}}$	$\text{ص}^{٢}_{\text{ر}}$	$(\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}})$
	٤٠	١٦٠٠	١٠	١٠٠	٤٠٠
	٥٠	٢٥٠٠	١٥	٢٢٥	٧٥٠
	٥٥	٣٠٢٥	١٨	٣٢٤	٩٩٠
	٦٥	٤٢٢٥	٢٠	٤٠٠	١٣٠٠
	٧٥	٥٦٢٥	٢٥	٦٢٥	١٨٧٥
	٩٠	٨١٠٠	٢٧	٧٢٩	٢٤٣٠
	١٠٠	١٠٠٠٠	٢٩	٨٤١	٢٩٠٠
	١١٠	١٢١٠٠	٣٠	٩٠٠	٣٣٠٠
المجموع	٥٨٥	٤٧١٧٥	١٧٤	٤١٤٤	١٣٩٤٥

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٨ \times ١٣٩٤٥ - ٥٨٥ \times ١٧٤}{\sqrt{[٨ \times ٤٧١٧٥ - (٥٨٥)^{٢}][٨ \times ٤١٤٤ - (١٧٤)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٩٧٧٠}{\sqrt{[٣٧٧٤٠٠ - ٣٤٢٢٢٥][٣٣١٥٢ - ٣٠٢٧٦]}} = \frac{٩٧٧٠}{\sqrt{(٣٥١٧٥)(٢٨٧٦)}}$$

$$= \frac{٩٧٧٠}{\sqrt{١٠١١٦٣٣٠٠}} = \frac{٩٧٧٠}{١٠٠٥٨} = ٠,٩٧$$

ب) نكوّن الجدول التالي :

١)

م	قيمة س مرتبة	رتبة س	قيمة ص مرتبة	رتبة ص
١	٤٠	١	١٠	١
٢	٥٠	٢	١٥	٢
٣	٥٥	٣	١٨	٣
٤	٦٥	٤	٢٠	٤
٥	٧٥	٥	٢٥	٥
٦	٩٠	٦	٢٧	٦
٧	١٠٠	٧	٢٩	٧
٨	١١٠	٨	٣٠	٨

٢) نكوّن الجدول التالي :

قيمة س	قيمة ص	رتبة س	رتبة ص	ف = س − ص	ف²
٤٠	١٠	١	١	صفر	صفر
٥٠	١٥	٢	٢	صفر	صفر
٥٥	١٨	٣	٣	صفر	صفر
٦٥	٢٠	٤	٤	صفر	صفر
٧٥	٢٥	٥	٥	صفر	صفر
٩٠	٢٧	٦	٦	صفر	صفر
١٠٠	٢٩	٧	٧	صفر	صفر
١١٠	٣٠	٨	٨	صفر	صفر
					صفر

$\because (\text{ر}) = ١ - \frac{٦\ \text{مجـ ف}^٢}{\text{ن}(\text{ن}^٢ - ١)}$

$\therefore (\text{ر}) = ١ - \frac{٦ \times ٠}{٨ \times (٦٤ - ١)} = ١ - \frac{٠}{٨ \times (٦٤ - ١)} = ١$

[٧] نكوّن جدولاً كالتالي :

س	ص	$ح_س = س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$	$ح_ص = (ص - \bar{ص})$	$(ص - \bar{ص})^٢$	$ز_س = \frac{ح_س}{ع_س}$	$ز_ص = \frac{ح_ص}{ع_ص}$	$ز_س \times ز_ص$
١	١	−٦	٣٦	−٤	١٦	$\frac{٦}{٤,٠٦} = −١,٤٨$	−١,٥١	٢,٢٣
٣	٢	−٤	١٦	−٣	٩	−٠,٩٩	−١,١٣	١,١٢
٤	٤	−٣	٩	−١	١	−٠,٧٤	−٠,٣٨	٠,٢٨
٦	٤	−١	١	−١	١	−٠,٢٥	−٠,٣٨	٠,١
٨	٥	١	١	٠	٠	+٠,٢٥	٠	٠
٩	٧	٢	٤	٢	٤	+٠,٤٩	+٠,٧٥	٠,٣٧
١١	٨	٤	١٦	٣	٩	+٠,٩٩	+١,١٣	١,١٢
١٤	٩	٧	٤٩	٤	١٦	+١,٧٢	+١,٥١	٢,٦
المجموع ٥٦	٤٠		١٣٢		٥٦			٧,٨٢

$\because \bar{س} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \quad \therefore \bar{س} = \frac{٥٦}{٨} = ٧ \text{ ،} \quad \because \bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} \text{ ،} \quad \therefore \bar{ص} = \frac{٤٠}{٨} = ٥$

$\because ع_س = \sqrt{\frac{(س - \bar{س})^٢}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{١٣٢}{٨}} = \sqrt{١٦,٥} = ٤,٠٦$

وكذلك : $ع_ص = \sqrt{\frac{(ص - \bar{ص})^٢}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٥٦}{٨}} = \sqrt{٧} = ٢,٦٥$

$\because \text{ر} = \frac{\text{مجـ } ز_س \times ز_ص}{\text{ن}} \text{ ،} \quad \therefore \text{ر} = \frac{٧,٨٢}{٨} = ٠,٩٨$

[٨] أ) بطرح «٥٦» من قيم «س» ، «١٤٧» من قيم "ص" لتسهيل العمل الحسابي ونكوّن الجدول التالي :

س	ص	$ح_س = س - ٥٦$	$ح_ص = ص - ١٤٧$	$ح_س \times ح_ص$	$ح_س^٢$	$ح_ص^٢$
٥٦	١٤٧	٠	٠	٠	٠	٠
٤٢	١٢٥	−١٤	−٢٢	٣٠٨	١٩٦	٤٨٤
٧٢	١٦٠	١٦	١٣	٢٠٨	٢٥٦	١٦٩
٣٦	١١٨	−٢٠	−٢٩	٥٨٠	٤٠٠	٨٤١
٦٣	١٤٩	٧	٢	١٤	٤٩	٤
٤٧	١٢٨	−٩	−١٩	١٧١	٨١	٣٦١
٥٥	١٥٠	−١	٣	٣	١	٩
٤٩	١٤٥	−٧	−٢	١٤	٤٩	٤
٣٨	١١٥	−١٨	−٣٢	٥٧٦	٣٢٤	١٠٢٤
٤٢	١٤٠	−١٤	−٧	٩٨	١٩٦	٤٩
٦٨	١٥٢	١٢	٥	٦٠	١٤٤	٢٥
٦٠	١٥٥	٤	٨	٣٢	١٦	٦٤
المجموع		−٤٤	−٨٠	٢٠٦٤	١٧١٢	٣٠٣٤

$$\therefore ر = \frac{\text{مجـ}(\text{ح}_{ق}\times\text{ح}_{ك}) - \frac{(\text{مجـ ح}_{ق})(\text{مجـ ح}_{ك})}{ن}}{\sqrt{\left[\text{مجـ ح}_{ق}^{2} - \frac{(\text{مجـ ح}_{ق})^{2}}{ن}\right]\left[\text{مجـ ح}_{ك}^{2} - \frac{(\text{مجـ ح}_{ك})^{2}}{ن}\right]}}$$

$$\therefore ر = \frac{\text{٢٠٦٤} - \frac{(\text{٤٤}-)(\text{٨٠}-)}{\text{١٢}}}{\sqrt{\left[\text{١٧١٢} - \frac{(\text{٤٣}-)^{2}}{\text{١٢}}\right]\left[\text{٣٠٣٤} - \frac{(\text{٨٠}-)^{2}}{\text{١٢}}\right]}}$$

$$= \frac{\text{٢٠٦٤} - \text{٢٩٣,٣}}{\sqrt{(\text{١٧١٢} - \text{١٦١,٣})(\text{٣٠٣٤} - \text{٥٣٣,٣})}} = \frac{\text{١٧٧٠,٧}}{\sqrt{\text{١٥٥٠,٧} \times \text{٢٥٠٠,٧}}}$$

$$= \frac{\text{١٧٧٠,٧}}{\sqrt{\text{٣٨٧٧٨٣٥,٤٩}}} = \frac{\text{١٧٧٠,٧}}{\text{١٩٦٩,٢٢}} = \text{٠,٩٠}$$

ب) (١) نكوّن الجدول التالي :

مسلسل	قيم س مرتبة	رتبة س	قيم ص مرتبة	رتبة ص
١	٣٦	١	١١٥	١
٢	٣٨	٢	١١٨	٢
٣	٤٢	٣,٥	١٢٥	٣
٤	٤٢	٣,٥	١٢٨	٤
٥	٤٧	٥	١٤٠	٥
٦	٤٩	٦	١٤٥	٦
٧	٥٥	٧	١٤٧	٧
٨	٥٦	٨	١٤٩	٨
٩	٦٠	٩	١٥٠	٩
١٠	٦٣	١٠	١٥٢	١٠
١١	٦٨	١١	١٥٥	١١
١٢	٧٢	١٢	١٦٠	١٢

(٢) نكوّن الجدول التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف=رتبة س−رتبة ص	ف²
٥٦	١٤٧	٨	٧	١	١
٤٢	١٢٥	٣,٥	٣	٠,٥	٠,٢٥
٧٢	١٦٠	١٢	١٢	٠	٠
٣٦	١١٨	١	٢	−١	١
٦٣	١٤٩	١٠	٨	٢	٤
٤٧	١٢٨	٥	٤	١	١
٥٥	١٥٠	٧	٩	−٢	٤
٤٩	١٤٥	٦	٦	٠	٠
٣٨	١١٥	٢	١	١	١
٤٢	١٤٠	٣,٥	٥	−١,٥	٢,٢٥
٦٨	١٥٢	١١	١٠	١	١
٦٠	١٥٥	٩	١١	−٢	٤
				المجموع	١٩,٥

$$\because ر = \text{١} - \frac{\text{٦ مجـ ف}^{2}}{ن(ن^{2}-\text{١})}$$

$$\therefore ر = \text{١} - \frac{\text{١٩,٥} \times \text{٦}}{\text{١٢}(\text{١٢}^{2}-\text{١})}$$

$$= \text{١} - \frac{\text{١١٧}}{\text{١٢} \times \text{١٤٣}}$$

$$= \text{٠,٩٣}$$

(٩) : نكوّن الجدول التالي :

	س	ص	س²	ص²	س × ص
	٦٥	٤٥	٤٢٢٥	٢٠٢٥	٢٩٢٥
	٦٣	٤٣	٣٩٦٩	١٨٤٩	٢٧٠٩
	٦٧	٣٢	٤٤٨٩	١٠٢٤	٢١٤٤
	٦٤	٣٥	٤٠٩٦	١٢٢٥	٢٢٤٠
	٦٨	٤٢	٤٦٢٤	١٧٦٤	٢٨٥٦
	٦٢	٤٠	٣٨٤٤	١٦٠٠	٢٤٨٠
	٧٠	٥٠	٤٩٠٠	٢٥٠٠	٣٥٠٠
	٦٦	٣٣	٤٣٥٦	١٠٨٩	٢١٧٨
	٦٨	٤٧	٤٦٢٤	٢٢٠٩	٣١٩٦
	٦٧	٣٨	٤٤٨٩	١٤٤٤	٢٥٤٦
	٦٩	٤١	٤٧٦١	١٦٨١	٢٨٢٩
	٧١	٤٥	٥٠٤١	٢٠٢٥	٣١٩٥
المجموع	٨٠٠	٤٩١	٥٣٤١٨	٢٠٤٣٥	٣٢٧٩٨

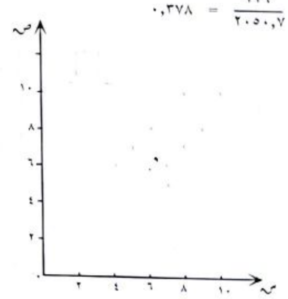
$$\because ر = \frac{ن\ \text{مجـ}(س \times ص) - (\text{مجـ } س)(\text{مجـ } ص)}{\sqrt{(ن\ \text{مجـ } س^{2} - (\text{مجـ } س)^{2})(ن\ \text{مجـ } ص^{2} - (\text{مجـ } ص)^{2})}}$$

$$\therefore r = \frac{١٢ \times ٣٢٧٩٨ - ٨٠٠ \times ٤٩١}{\sqrt{[١٢ \times ٥٣٤١٨ - ٦٤٠٠٠٠][١٢ \times ٢٠٤٣٥ - ٢٤١٠٨١]}}$$

$$= \frac{٣٩٣٥٧٦ - ٣٩٢٨٠٠}{\sqrt{(٦٤١٠١٦ - ٦٤٠٠٠٠)(٢٤٥٢٢٠ - ٢٤١٠٨١)}} = \frac{٧٧٦}{\sqrt{١٠١٦ \times ٤١٣٩}}$$

$$= \frac{٧٧٦}{\sqrt{٤٢٠٥٢٢٤}} = \frac{٧٧٦}{٢٠٥٠,٧} = ٠,٣٧٨$$

[١٠] أ) رسم شكل الانتشار



ب) نكوّن الجدول التالي :

	س	ص	$س^2$	$ص^2$	س X ص
	٦	٨	٣٦	٦٤	٤٨
	٥	٧	٢٥	٤٩	٣٥
	٨	٧	٦٤	٤٩	٥٦
	٨	١٠	٦٤	١٠٠	٨٠
	٧	٥	٤٩	٢٥	٣٥
	٦	٨	٣٦	٦٤	٤٨
	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
	٤	٦	١٦	٣٦	٢٤
	٩	٨	٨١	٦٤	٧٢
	٧	٦	٤٩	٣٦	٤٢
المجموع	٧٠	٧٥	٥٢٠	٥٨٧	٥٤٠

$$\because r = \frac{\text{ن مجـ (س X ص) – (مجـ س) (مجـ ص)}}{\sqrt{(\text{ن مجـ } س^2 - (\text{مجـ س})^2)(\text{ن مجـ } ص^2 - (\text{مجـ ص})^2)}}$$

$$\because r = \frac{١٠ \times ٥٤٠ - ٧٠ \times ٧٥}{\sqrt{(١٠ \times ٥٢٠ - ٤٩٠٠)(١٠ \times ٥٨٧ - ٥٦٢٥)}} = \frac{٥٤٠٠ - ٥٢٥٠}{\sqrt{٣٠٠ \times ٢٤٥}}$$

$$= \frac{١٥٠}{\sqrt{٧٣٥٠٠}} = \frac{١٥٠}{٢٧١,١} = ٠,٥٥٦$$

جـ)(١) نكوّن الجدول التالي :

مسلسل	قيم س مرتبة	رتبة س	قيم ص مرتبة	رتبة ص
١	٤	١	٥	١
٢	٥	٢	٦	٢,٥
٣	٦	٣,٥	٦	٢,٥
٤	٦	٣,٥	٧	٤,٥
٥	٧	٥,٥	٧	٤,٥
٦	٧	٥,٥	٨	٧
٧	٨	٧,٥	٨	٧
٨	٨	٧,٥	٨	٧
٩	٩	٩	١٠	٩,٥
١٠	١٠	١٠	١٠	٩,٥

(٢) نكوّن الجدول التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف=رتبةس–رتبةص	$ف^2$
٦	٨	٣,٥	٧	٣,٥–	١٢,٢٥
٥	٧	٢	٤,٥	٢,٥–	٦,٢٥
٨	٧	٧,٥	٤,٥	٣+	٩
٨	١٠	٧,٥	٩,٥	٢–	٤
٧	٥	٥,٥٠	١	٤,٥	٢٠,٢٥
٦	٨	٣,٥	٧	٣,٥–	١٢,٢٥
١٠	١٠	١٠	٩,٥	٠,٥	٠,٢٥
٤	٦	١	٢,٥	١,٥–	٢,٢٥
٩	٨	٩	٧	٢	٤
٧	٦	٥,٥	٢,٥	٣,٠	٩
					٧٩,٥

$$\because (r) = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^2}{ن(ن^2-١)}$$

$$\therefore (r) = ١ - \frac{٦ \times ٧٩,٥}{٩٩٠}$$

$$= ١ - \frac{٤٧٧}{٩٩٠}$$

$$= ١ - ٠,٤٨٢$$

$$= ٠,٥١٨$$

١٠ - ٣ الانحدار

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

- يعرِّف الانحدار (الانحدار الخطي)
- يعرِّف خط الانحدار .
- يستخدم خط الانحدار في التنبوء بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المقابلة للمتغير الآخر .
- يتعرَّف كيفية إيجاد المعاملين ا ، ب في معادلة خط الانحدار .
- يرسم خط الانحدار .
- يتعرَّف العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط .

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الانحدار الخطي .

الحصة الثانية : تطبيقات على الانحدار .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم ساثياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

يتم التقويم ساثياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي :

فيما يلي بيانات عن أطوال الآباء (س) وأطوال أكبر الأبناء (ص) وذلك لمجموعة من الأسر .

طول الأب (س)	١٧٠	١٧٢	١٦٠	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٥	٢٠٠
طول الابن (ص)	١٧٢	١٧٠	١٦٥	١٧٥	١٨٠	١٨٥	١٩٠	١٩٠

المطلوب : احسب معادلة الانحدار الخطي للمتغير (ص) على (س) .

إرشادات وإجابات : تمارين (١٠ - ٣)

[١] : لإيجاد معادلة انحدار ص على س نكوِّن الجدول التالي :

	س	ص	س٢	س × ص
	٢	١٨	٤	٣٦
	٤	١٢	١٦	٤٨
	٥	١٠	٢٥	٥٠
	٦	٨	٣٦	٤٨
	٨	٧	٦٤	٥٦
	١١	٥	١٢١	٥٥
المجموع	٣٦	٦٠	٢٦٦	٢٩٣

نعلم أنَّ معادلة الانحدار الخطي هي : ص = ا س + ب

$$\therefore \text{ا} = \frac{\text{ن مجـ (س × ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$\therefore \text{ا} = \frac{٦ \times ٢٩٣ - ٣٦ \times ٦٠}{٦ \times ٢٦٦ - (٣٦)^2} = \frac{١٧٥٨ - ٢١٦٠}{١٥٩٦ - ١٢٩٦} = \frac{-٤٠٢}{٣٠٠} = -١,٣٤$$

∵ ب = صَ − ا سَ ، ∴ ب = ١٠ − (−١,٣٤) × ٦

⇐ ب = ١٠ + ٨,٠٤ = ١٨,٠٤ ، ∴ ص = −١,٣٤ س + ١٨,٠٤

[٢] : نكوِّن الجدول التالي :

	س	ص	ص٢	(س × ص)
	٦	٨	٦٤	٤٨
	٥	٧	٤٩	٣٥
	٨	٧	٤٩	٥٦
	٨	١٠	١٠٠	٨٠
	٧	٥	٢٥	٣٥
	٦	٨	٦٤	٤٨
	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠
	٤	٦	٣٦	٢٤
	٩	٨	٦٤	٧٢
	٧	٦	٣٦	٤٢
المجموع	٧٠	٧٥	٥٨٧	٥٤٠

نعلم أنَّ : س = ا ص + ب وحيث أنَّ :

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مجـ (س × ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}$$

، ب = سَ − ا صَ

$$\therefore \text{ا} = \frac{١٠ \times ٥٤٠ - ٧٠ \times ٧٥}{١٠ \times ٥٨٧ - (٧٥)^2} = \frac{٥٤٠٠ - ٥٢٥٠}{٥٨٧٠ - ٥٦٢٥} = \frac{١٥٠}{٢٤٥} = ٠,٦١$$

وكذلك : ب = سَ − ا صَ = ٧ − ٠,٦١ × ٧,٥

= ٧ − ٤,٥٧٥ = ٢,٤٢٥

وحيث أن معادلة انحدار س على ص هي : س = ا ص + ب

∴ س = ٠,٦١ ص + ٢,٤٢٥

[٣] : نعلم أنَّ : ص = ا س + ب

$$\text{ا} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_\text{ص}}{\text{ع}_\text{س}} ، \quad \text{ب = صَ − ا سَ}$$

$$\therefore \text{ا} = ٠,٥٨ \times \frac{٠,٤}{١٠٠} = ٠,٠٠٢٣٢$$

وكذلك : ب = صَ − ا سَ = ٤,٨ − ٠,٠٠٢٣٢ × ٦٠٠ ، = ٤,٨ − ١,٣٩٢ ⇐ ب = ٣,٤٠٨

∴ ص = ٠,٠٠٢٣٢ س + ٣,٤٠٨

أ) القيمة المتوقعة للمتغير ص عندما تكون س = ٣٥٠ هي :

ص = ٠,٠٠٢٣٢ × ٣٥٠ + ٣,٤٠٨ ، = ٠,٨١٢ + ٣,٤٠٨ = ٤,٢٢ ، وهو المطلوب أولاً .

ب) نعلم أن : س = أص + ب (عندما يكون التنبؤ بقيم س من خلال قيمة ص)

حيث : أ = ر × $\frac{\text{ع س}}{\text{ع ص}}$ ، ب = سَ − أ صَ

∴ أ = ٠,٥٨ × $\frac{\text{١٠٠}}{\text{٠,٤}}$ = ٠,٥٨ × ٢٥٠ = ١٤٥

∵ ب = سَ − أ صَ ⟸ ب = ٦٠٠ − ١٤٥ × ٤,٨ = ٦٠٠ − ٦٩٦ = −٩٦

∴ س = ١٤٥ ص − ٩٦

عندما ص = ٥,١ ⟸ س = ١٤٥ × ٥,١ − ٩٦ = ٦٤٣,٥

عندما ص = ٤,٨ ⟸ س = ١٤٥ × ٤,٨ − ٩٦ = ٦٠٠

[٤] (١) لإيجاد معادلة انحدار ص على س نكوّن جدولاً آخر كالتالي :

	س	ص	س²	(س × ص)	ص²
	٧	٦	٤٩	٤٢	٣٦
	٩	٨	٨١	٧٢	٦٤
	٤	٦	١٦	٢٤	٣٦
	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
	٦	٨	٣٦	٤٨	٦٤
	٧	٥	٤٩	٣٥	٢٥
	٨	١٠	٦٤	٨٠	١٠٠
	٨	٧	٦٤	٥٦	٤٩
	٥	٧	٢٥	٣٥	٤٩
	٦	٨	٣٦	٤٨	٦٤
المجموع	٧٠	٧٥	٥٢٠	٥٤٠	٥٨٧

∵ أ = $\frac{\text{ن مجـ (س × ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س² − (مجـ س)²}}$

∴ أ = $\frac{\text{١٠ × ٥٤٠ − ٧٠ × ٧٥}}{\text{١٠ × ٥٢٠ − ٤٩٠٠}}$ = $\frac{\text{٥٤٠٠ − ٥٢٥٠}}{\text{٥٢٠٠ − ٤٩٠٠}}$

= $\frac{\text{١٥٠}}{\text{٣٠٠}}$ = ٠,٥ ، ∴ أ = ٠,٥

∵ ب = صَ − أ سَ ⟸ ب = $\frac{\text{٧٥}}{\text{١٠}}$ − ٠,٥ × $\frac{\text{٧٠}}{\text{١٠}}$

لأن ن = ١٠

∴ ب = ٧,٥ − ٣,٥ = ٤ وحيث أن معادلة انحدار ص على س هي :

ص = أس + ب ، ∴ ص = ٠,٥ س + ٤

(٢) ∵ أ = $\frac{\text{ن مجـ (س × ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ ص² − (مجـ ص)²}}$ ، ∵ أ = $\frac{\text{١٠ × ٥٤٠ − ٧٠ × ٧٥}}{\text{١٠ × ٥٨٧ − ٥٦٢٥}}$

∴ أ = $\frac{\text{٥٤٠٠ − ٥٢٥٠}}{\text{٥٨٧٠ − ٥٦٢٥}}$ ، ∴ أ = $\frac{\text{١٥٠}}{\text{٢٤٥}}$ = ٠,٦ ، ∵ ب = سَ − أصَ

∴ ب = ٧ − ٠,٦ × ٧,٥ = ٧ − ٤,٥ = ٢,٥ ولإيجاد التنبؤ بقيم س من خلال قيم ص نستخدم

المعادلة : س = أص + ب ، ∴ س = ٠,٦ ص + ٢,٥

[٥] : نكوّن الجدول التالي :

	س	ص	س²	(س × ص)
	٥٦	١٥٥	٣١٣٦	٨٦٨٠
	٤٢	١٥٢	١٧٦٤	٦٣٨٤
	٧٢	١٤٠	٥١٨٤	١٠٠٨٠
	٣٦	١١٥	١٢٩٦	٤١٤٠
	٦٣	١٤٥	٣٩٦٩	٩١٣٥
	٤٧	١٥٠	٢٢٠٩	٧٠٥٠
	٥٥	١٢٨	٣٠٢٥	٧٠٤٠
	٤٩	١٤٩	٢٤٠١	٧٣٠١
	٣٨	١١٨	١٤٤٤	٤٤٨٤
	٤٢	١٦٠	١٧٦٤	٦٧٢٠
	٦٨	١٢٥	٤٦٢٤	٨٥٠٠
	٦٠	١٤٧	٣٦٠٠	٨٨٢٠
المجموع	٦٢٨	١٦٨٤	٣٤٤١٦	٨٨٣٣٤

∵ أ = $\frac{\text{ن مجـ(س×ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س² − (مجـ س)²}}$

∴ أ = $\frac{\text{١٢ × ٨٨٣٣٤ − ٦٢٨ × ١٦٨٤}}{\text{١٢ × ٣٤٤١٦ − (٦٢٨)²}}$

= $\frac{\text{١٠٦٠٠٠٨ − ١٠٥٧٥٥٢}}{\text{٤١٢٩٩٢ − ٣٩٤٣٨٤}}$

∴ أ = $\frac{\text{٢٤٥٦}}{\text{١٨٦٠٨}}$ = ٠,١٣ ، ∵ ب = صَ − أ سَ

سَ = $\frac{\text{٦٢٨}}{\text{١٢}}$ = ٥٢,٣٣

صَ = $\frac{\text{١٦٨٤}}{\text{١٢}}$ = ١٤٠,٣٣

∴ ب = ١٤٠,٣٣ − ٠,١٣ × ٥٢,٣٣

⟸ ب = ١٤٠,٣٣ − ٦,٨٠ ، ∴ ب = ١٣٣,٥٣

∵ ص = أس + ب وحيث أ = ٠,١٣ ، ب = ١٣٣,٥٣ ، س = ٤٥

∴ ص = ٠,١٣ × ٤٥ + ١٣٣,٥٣ ⟸ ص = ٥,٨٥ + ١٣٣,٥٣

∴ ص = ١٣٩,٣٨ وهو ضغط الدم لمعلم عمره ٤٥ سنة

[٦] : لإيجاد معادلة الانحدار الخطي لمعدل الطلاق على معدل الزواج نكوّن الجدول التالي :

	س	ص	س²	(س × ص)
	١٥	٢	٢٢٥	٣٠
	١٨	٣	٣٢٤	٥٤
	٢١	٣	٤٤١	٦٣
	٢٢	٥	٤٨٤	١١٠
	٢٧	٦	٧٢٩	١٦٢
	٢٩	٧	٨٤١	٢٠٣
	٣٢	٨	١٠٢٤	٢٥٦
	٣٣	٩	١٠٨٩	٢٩٧
	٣٥	١٠	١٢٢٥	٣٥٠
	٣٧	١١	١٣٦٩	٤٠٧
	٣٩	١٢	١٥٢١	٤٦٨
	٤٢	١٥	١٧٦٤	٦٣٠
المجموع	٣٥٠	٩١	١١٠٣٦	٣٠٣٠

∵ أ = $\frac{\text{ن مجـ(س×ص) − (مجـ س) (مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س² − (مجـ س)²}}$

= $\frac{\text{٣٦٣٦٠ − ٣١٨٥٠}}{\text{١٣٢٤٣٢ − ١٢٢٥٠٠}}$

∴ أ = $\frac{\text{٤٥١٠}}{\text{٩٩٣٢}}$ = ٠,٤٥٤

∵ ب = صَ − أ سَ

⟸ ب = $\frac{\text{٩١}}{\text{١٢}}$ − ٠,٤٥٤ × $\frac{\text{٣٥٠}}{\text{١٢}}$

∴ ب = ٧,٥٨ − ١٣,٢٤ = −٥,٦٦

∵ ص = أس + ب ، ∴ ص = ٠,٤٥٤ س − ٥,٦٦

∴ ص = ٠,٤٥٤ × ١٤ − ٥,٦٦

⟸ ص = ٦,٣٥٦ − ٥,٦٦ = ٠,٦٩٦

[٧] : لإيجاد معادلة انحدار س على ص نكوّن الجدول التالي :

س	ص	س^{2}	ص^{2}	س×ص
٢	١٨	٤	٣٢٤	٣٦
٤	١٢	١٦	١٤٤	٤٨
٥	١٠	٢٥	١٠٠	٥٠
٦	٨	٣٦	٦٤	٤٨
٨	٧	٦٤	٤٩	٥٦
١١	٥	١٢١	٢٥	٥٥
المجموع ٣٦	٦٠	٢٦٦	٧٠٦	٢٩٣

$$\because \text{أ} = \frac{\text{ن مجـ(س×ص)} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}}$$

$$= \frac{٦ \times ٢٩٣ - ٣٦ \times ٦٠}{٦ \times ٧٠٦ - (٣٦٠٠)}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{١٧٥٨ - ٢١٦٠}{٤٢٣٦ - ٣٦٠٠} = \frac{-٤٠٢}{٦٣٦} = -٠,٦٣$$

كذلك :

$\text{ب} = \bar{\text{س}} - \text{أ}\,\bar{\text{ص}} \Leftarrow \text{ب} = ٦ - (-٠,٦٣ \times ١٠)$

$\Leftarrow$ ب $= ٦ + ٦,٣ = ١٢,٣$ وحيث أن معادلة انحدار س على ص هي :

س = أ ص + ب ، $\therefore$ س = $-٠,٦٣$ ص + $١٢,٣$

[٨] : نكوّن الجدول التالي :

س	ص	س^{2}	س×ص
١٥	٥	٢٢٥	٧٥
١٢	٤	١٤٤	٤٨
٦	٢	٣٦	١٢
٤	٢	١٦	٨
٣	١	٩	٣
المجموع ٤٠	١٤	٤٣٠	١٤٦

$$\because \text{أ} = \frac{\text{ن مجـ(س×ص)} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}}$$

$$= \frac{٥ \times ١٤٦ - ٤٠ \times ١٤}{٥ \times ٤٣٠ - ١٦٠٠}$$

$$= \frac{٧٣٠ - ٥٦٠}{٢١٥٠ - ١٦٠٠} = \frac{١٧٠}{٥٥٠} = ٠,٣١$$

$\because \text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$

$\therefore$ ب $= ٢,٨ - ٠,٣١ \times ٨ \Leftarrow$ ب $= ٢,٨ - ٢,٤٨ = ٠,٣٢$ ، وحيث ص = أ س + ب

$\therefore$ ص = $٠,٣١$ س + $٠,٣٢$

$\because$ س = ٧

$\therefore$ ص $= ٠,٣١ \times ٧ + ٠,٣٢ \Leftarrow$ ص $= ٢,١٧ + ٠,٣٢ = ٢,٤٩$

[٩] (١) لإيجاد معادلة انحدار ص على س نكوّن الجدول التالي :

س	ص	س^{2}	س×ص
٧٤	٧٧	٥٤٧٦	٥٦٩٨
٨٩	٨٤	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٢	٦٨	٥١٨٤	٤٨٩٦
٩٥	٩٨	٩٠٢٥	٩٣١٠
٨٠	٧١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩١	٨٧	٨٢٨١	٧٩١٧
٧٢	٦٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٦	٩٣	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٧٨	٨٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٨٢	٧٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
المجموع ٨١٩	٧٩٨	٦٧٦٧٥	٦٦٠٤٥

$$\because \text{أ} = \frac{\text{ن مجـ(س×ص)} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}}$$

$$= \frac{١٠ \times ٦٦٠٤٥ - ٨١٩ \times ٧٩٨}{١٠ \times ٦٧٦٧٥ - (٨١٩)^{2}}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{٦٦٠٤٥٠ - ٦٥٣٥٦٢}{٦٧٦٧٥٠ - ٦٧٠٧٦١} = \frac{٦٨٨٨}{٥٩٨٩} = ١,١٥$$

كذلك :

$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}} \Leftarrow \text{ب} = ٧٩,٨ - ١,١٥ \times ٨١,٩$

$\Leftarrow \text{ب} = ٧٩,٨ - ٩٤,١٨٥ \Leftarrow \text{ب} = -١٤,٣٨٥$

$\because$ ص = أ س + ب ، $\therefore$ ص $= ١,١٥ \times ٤٩ + ١٤,٣٨٥$

(حيث درجة الطالب في الجبر = ٤٩ درجة)

$= ٥٦,٣٥ + ١٤,٣٨٥$ ، $= ٧٠,٧٣٥$

وهي درجة الطالب في الهندسة

[١٠] : لإيجاد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص نكوّن الجدول التالي :

س	س^{2}	ص	ص^{2}	س×ص
١٥	٢٢٥	٤	١٦	٦٠
١٤	١٩٦	٦	٣٦	٨٤
١٠	١٠٠	٤	١٦	٤٠
٩	٨١	٨	٦٤	٧٢
٨	٦٤	٧	٤٩	٥٦
٨	٦٤	٨	٦٤	٦٤
٧	٤٩	١٠	١٠٠	٧٠
٦	٣٦	٩	٨١	٥٤
٤	١٦	١٤	١٩٦	٥٦
٢	٤	١٢	١٤٤	٢٤
المجموع ٨٣	٨٣٥	٨٢	٧٦٦	٥٨٠

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مجـ(س×ص)} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}][\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}]}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{١٠ \times ٥٨٠ - ٨٣ \times ٨٢}{\sqrt{[١٠ \times ٨٣٥ - (٨٣)^{2}][١٠ \times ٧٦٦ - (٨٢)^{2}]}}$$

$$= \frac{٥٨٠٠ - ٦٨٠٦}{\sqrt{(٨٣٥٠ - ٦٨٨٩)(٧٦٦٠ - ٦٧٢٤)}}$$

$$= \frac{-١٠٠}{\sqrt{١٤٦١ \times ٩٣٦}} = \frac{-١٠٠٦}{\sqrt{١٣٦٧٤٩٦}}$$

$$= \frac{-١٠٠٦}{١١٦٩,٤} \text{ ، } \therefore \text{ر} = -٠,٨٦$$

ب) (١) نكوّن الجدول التالي :

مسلسل	قيم س مرتبة	رتبة س	قيم ص مرتبة	رتبة ص
١	٢	١	٤	١,٥
٢	٤	٢	٤	١,٥
٣	٦	٣	٦	٣
٤	٧	٤	٧	٤
٥	٨	٥,٥	٨	٥,٥
٦	٨	٥,٥	٨	٥,٥
٧	٩	٧	٩	٧
٨	١٠	٨	١٠	٨
٩	١٤	٩	١٢	٩
١٠	١٥	١٠	١٤	١٠

(٢) نكوّن الجدول التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	(ف=رتبةس−رتبةص)	ف٢
١٥	٤	١٠	١,٥	٨,٥	٧٢,٢٥
١٤	٦	٩	٣	٦	٣٦
١٠	٤	٨	١,٥	٦,٥	٤٢,٢٥
٩	٨	٧	٥,٥	١,٥	٢,٢٥
٨	٧	٥,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
٨	٨	٥,٥	٥,٥	٠	٠
٧	١٠	٤	٨	٤−	١٦
٦	٩	٣	٧	٤−	١٦
٤	١٤	٢	١٠	٨−	٦٤
٢	١٢	١	٩	٨−	٦٤
					٣١٥

∵ (ر) = ١ − (٦ مجـ ف٢) / (ن (ن٢−١))

∴ (ر) = ١ − (٦ × ٣١٥) / (١٠ × ٩٩)

= ١ − ١٨٩٠ / ٩٩٠

= ١ − ١,٩

= − ٠,٩

جـ) لإيجاد معادلة انحدار ص على س نوجد أولاً

ا = (ن مجـ (س×ص) − (مجـ س) (مجـ ص)) / (ن مجـ س٢ − (مجـ س)٢)

من الفقرة «ا» وجدنا مجـ (س×ص) = ٥٨٠ ، مجـ س = ٨٣ ، مجـ ص = ٨٢

، مجـ س٢ = ٨٣٥ ، ∴ ا = (١٠ × ٥٨٠ − ٨٣ × ٨٢) / (١٠ × ٨٣٥ − (٨٣)٢) = (٥٨٠٠ − ٦٨٠٦) / (٨٣٥٠ − ٦٨٨٩)

∴ ا = − ١٠٠٦ / ١٤٦١ = − ٠,٦٩

∵ ب = صَ − ا سَ ⟸ ب = ٨,٢ + ٠,٦٩ × ٨,٣ ⟸ ب = ٨,٢ + ٥,٧٢٧ ⟸ ب = ١٣,٩٢٧

∵ ص = ا س + ب ، ∴ ص = −٠,٦٩ س + ١٣,٩٢٧

لإيجاد معادلة انحدار س على ص نوجد أولاً الآتي :

ا = (ن مجـ (س×ص) − (مجـ س) (مجـ ص)) / (ن مجـ ص٢ − (مجـ ص)٢)

∴ ا = −١٠٠٦ / (١٠ × ٧٦٦ − (٨٢)٢) = −١٠٠٦ / (٧٦٦٠٠ − ٦٧٢٤) = −١٠٠٦ / ٩٣٦ = − ١,٠٧

وكذلك :

ب = سَ − ا صَ ⟸ ب = ٨,٣ + ١,٠٧ × ٨,٢ ⟸ ب = ٨,٣ + ٨,٧٧٤ ، = ١٧,١

لإيجاد التنبؤ بقيم س من خلال معرفة قيم ص تستخدم المعادلة التالية :

س = ا ص + ب = − ١,٠٧ ص + ١٧,١

الاحتمالات

الحصص : (٩) حصص .

الأهداف

يعرّف مفهوم الاحتمال .

يعرّف التجربة العشوائية .

يكتب فضاء العينة لتجربة عشوائية .

يعرّف الحادثة .

يعرّف أنواع الحوادث .

يكتب الأحداث لتجربة عشوائية .

يعرّف أنواع العمليات على الحوادث بلغة المجموعات .

يعرّف دالة وفضاء الاحتمال .

يحسب الاحتمال .

توزيع حصص البند ينفذ هذا البند في تسع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : فضاء العينة .

الحصة الثانية : الحوادث .

الحصة الثالثة : أمثلة .

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

الحصتان السادسة والسابعة : المفاهيم الأولية للإحتمال .

الحصتان الثامنة والتاسعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة التاسعة يُعطى التمرين التالي كخطوة تقويم .

لتكن ا ، ب حادثتين في فضاء العينة ع لتجربة عشوائية ، وحا دالة احتمال معرفة على ع

إذا كان حا (ا ب) = $\frac{١}{٤}$ ، حا (ا ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ حا ($\bar{ب}$) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد :

١ - حا (ا)　　　٢ - حا (ب)　　　٣ - حا (ا ∩ $\bar{ب}$)

إرشادات وإجابات : تمارين (١٠ - ٤ أولاً)

[١] (١) نرمز لظهور الصورة بالرمز (ص) ، ولظهور الكتابة بالرمز (ك) :

فيكون ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) } .

كما يمكن الحصول على عناصر فضاء العينة « ع » في صورة جداء كما يلي :

الرمية (٢) / الرمية (١)	ص	ك
ص	(ص ، ص)	(ص ، ك)
ك	(ك ، ص)	(ك ، ك)

(٢) إنّ فضاء العينة عند إلقاء قطعتين متمايزتين (مختلفتين في اللون أو الشكل أو الحجم . . .) من النقود في آن واحد هو فضاء العينة نفسه عند إلقاء قطعة واحدة من النقود مرتين متتاليتين . وعليه يكون جواب (٢) هو جواب (١) نفسه أي

ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

(٣) عند إلقاء قطعتين متماثلتين من النقود في آن واحد في هذه الحالة يستحيل التمييز بين (ص ، ك) ، (ك ، ص) ونعبر عن فضاء العينة كما يلي :

ع = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك) } حيث (ص ، ص) تعني الناتج صورتين ،

(ص ، ك) تعني أن وجه أحدهما ص والآخر ك ، (ك ، ك) تعني الناتج كتابة وكتابة .

(٤) ع = { (ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ، ٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤) ، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦) }

وذلك : لأن فضاء العينة يتألف من جميع الأزواج المرتبة للجداء الديكارتي للفضائين .

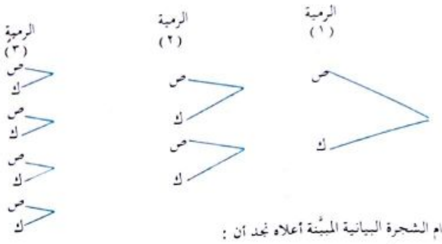
$ع_1$ = (ص ، ك) ، $ع_2$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } (حيث : ع = $ع_1 \times ع_2$) ، عدد نواتج فضاء العينة هو : ن (ع) = ١٢ عنصراً

(٥) ع = { ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٢ ، ١ ، ٦ }

(٦) ع = { ا ، ب ، جـ ، ء ، هـ } ، ن (ع) = ٥ .

(٧) ع = { -٦ ، -٥ ، -٤ ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } .

[٢]



باستخدام الشجرة البيانية المبيّنة أعلاه نجد أن :

ع = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

∴ (١) نفرض أن ا = حادثة ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، يعني ظهور الصورة مرة واحدة أو الصورة مرتين أو الصورة ثلاث مرات

∴ ا = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) }

(٢) نفرض أن ب = حادثة ظهور الصورة مرتين فقط

∴ ب = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) }

(٣) نفرض أن جـ = حادثة ظهور الصورة مرتين على الأقل يعني ظهور الصورة مرتين أو ثلاث مرات

∴ جـ = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) }

(٤) نفرض أن ء = حادثة ظهور الصورة مرتين على الأكثر يعني ظهور الصورة مرتين أو مرة واحدة أو عدم ظهورها .

∴ ء = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

(٥) نفرض أن هـ = حادثة ظهور الكتابة مرتين متتاليتين

∴ هـ = { (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) }

[٣] (١) ع = {٢ ، ١ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ٦}

(٢) نفرض أن ا = حادثة أن الرقم المسحوب فردي

∴ ا = {١ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

كذلك نفرض أن ب = حادثة أن الرقم المسحوب زوجي

∴ ب = {٢ ، ٦}

(٣) ∵ ا ∩ ب = ∅ ⟸ ا ، ب حادثتان متنافيتان ، ا ∪ ب = ع

∴ الحادثتان ا ، ب كل واحدة منهما مكملة للأخرى .

[٤] نفرض أن و = حادثة اختيار طالب ، ب = حادثة اختيار طالبة، ولاختيار ثلاثة أفراد من مجموعة مكوّنة من ٤ طلاب ، ٣ طالبات، هناك ٤ احتمالات لإيجاد فضاء العيّنة ع، إما أن يكون الثلاثة الأفراد جميعهم طلابًا أو طالبين وطالبة، أو طالب وطالبتين أو الثلاثة الأفراد المختارون جميعهم طالبات .

∴ (ا) ع = {(و و و) ، (و و ب) ، (و ب ب) ، (ب ب ب)} حيث «و» ترمز لطالب ، «ب» ترمز لطالبة

(ب) للتعبير عن الحوادث نفرض أن :

(١) جـ = حادثة اختيار طالبتين على الأقل ، ∴ جـ = {(و ب ب) ، (ب ب ب)} .

(٢) د = حادثة اختيار طالبتين على الأكثر ، ∴ د = {(و و و) ، (و و ب) ، (و ب ب)} .

(٣) ق = حادثة اختيار طالبين على الأقل ، ∴ ق = {(و و و) ، (و و ب)} .

(٤) ك = حادثة اختيار طالبين على الأكثر ، ∴ ك = {(و و ب) ، (و ب ب) ، (ب ب ب)} .

[٥] نفرض أن :

(١) ا = حادثة الحصول على العدد «٥» مرتين ∴ ا = {(٥ ، ٥)} ، ن(ا) = ١ .

(٢) ب = حادثة الحصول على عددين مجموعهما «٩» ،

∴ ب = {(٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤)} ، ن(ب) = ٤ .

(٣) جـ = حادثة الحصول على عدد فردي في الرمية الأولى وزوجي في الرمية الثانية ،

∴ جـ = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، . . .} ، ن(جـ) = ٩ .

(٤) د = حادثة الحصول على عددين مجموعهما «٨» أو «١٠» ،

∴ د = {(٢ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥)} ، ن(د) = ٨ .

(٥) هـ = حادثة الحصول على عددين مجموعهما «١٣» ∴ هـ = ∅ ، ن(هـ) = صفر .

(٦) ى = حادثة الحصول على عددين مجموعهما يقبل القسمة على «٥» ،

∴ ى = {(١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥)} ، ن(ى) = ٧ .

[٦] ع = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

نفرض أن

(١) : ا = حادثة ظهور كتابة على الأقل ، ∴ ا = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

(٢) جـ = حادثة ظهور كتابتين ، ∴ جـ = {(ك ، ك)}

(٣) د = حادثة ظهور صورة على الأكثر ، ∴ د = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

(٤) و = حادثة ظهور الشيئ نفسه في الرميتين ، ∴ و = {(ص ، ص) ، (ك ، ك)}

(٥) هـ = حادثة ظهور كتابة في الرمية الأولى ، ∴ هـ = {(ك ، ص) ، (ك ، ك)}

[٧] (١) وقوع الحادثة ا وعدم وقوع الحادثة ب

= ا − ب = ا ∩ بَ [أنظر شكل (١)].

(٢) عدم وقوع الحادثة ا أو وقوع الحادثة ب

= اَ ∪ ب = (ا − ب)َ [انظر شكل (٢)].

(٣) عدم وقوع الحادثتين معاً

= (ا ∩ ب)َ [انظر شكل (٣)].

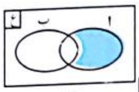
(٤) وقوع الحادثة ب فقط

= ب − ا [انظر شكل (٤)].

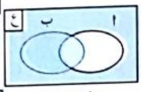
(٥) وقوع إحدى الحادثتين فقط

= (ا ∪ ب) − (ا ∩ ب)

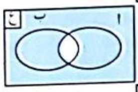
= (ا − ب) ∪ (ب − ا) [انظر شكل (٥)].



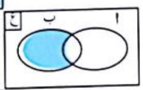
شكل (١)



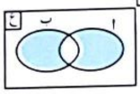
شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)



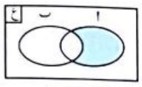
شكل (٥)

[٨] (١) ع = {(ص، ١) ، (ص، ٢) ، (ص، ٣) ، (ص، ٤) ، (ص، ٥) ، (ص، ٦) ،
(ك، ١) ، (ك، ٢) ، (ك، ٣) ، (ك، ٤) ، (ك، ٥) ، (ك، ٦)}

(٢) ا = {(ص، ٢) ، (ص، ٤) ، (ص، ٦)}
ب = {(ك، ١) ، (ك، ٣) ، (ك، ٥)}
جـ = {(ص، ٢) ، (ص، ٣) ، (ص، ٥) ، (ك، ٢) ، (ك، ٣) ، (ك، ٥)}

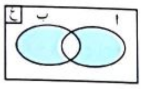
(٣) ∵ ا ∩ ب = ∅ ⟸ ا ، ب حادثتين متنافيتين
بينما ا ∩ جـ = {ص، ٢} ≠ ∅ ⟸ ا ، جـ حادثتين غير متنافيتين
ب ∩ جـ = {(ك، ٣) ، (ك، ٥)} ≠ ∅ ⟸ ب ، جـ حادثتين غير متنافيتين

[٩] ط = وقوع الحادثة ا وعدم وقوع الحادثة ب
= (ا − ب)
= (ا ∩ بَ) [أنظر شكل (٦)]



الجزء المظلل يمثل ا − ب
شكل (٦)

هـ = وقوع الحادثة ا أو ب وليس كليهما
= (ا ∪ ب) − (ا ∩ ب)
= (ا − ب) ∪ (ب − ا) [أنظر شكل (٧)]



الجزء المظلل يمثل (ا − ب) ∪ (ب − ا)
شكل (٧)

إرشادات وإجابات : تمارين (١٠ − ٤ ثانيًا وثالثًا)

[١] أ) «حا» لا تعرّف فضاءً احتمالياً على ع
ب) «حا» تعرّف فضاءً احتمالياً على ع
جـ) «حا» لاتعرّف فضاءً احتمالياً على ع
د) «حا» تعرّف فضاءً احتمالياً على ع
و) «حا» لاتعرّف فضاءً احتمالياً على ع

[٢] (١) حا (اَ) = ١ − حا(ا)
= ١ − ٠,٤ = ٠,٦
(٢) حا (بَ) = ١ − حا(ب)
= ١ − ٠,٣ = ٠,٧
(٣) حا (ا ∩ ب) لإيجاده :
∵ حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا(ب) − حا(ا ∩ ب)
∴ ٠,٥ = ٠,٤ + ٠,٣ − حا (ا ب) ⟸ حا (ا ب) = ٠,٢
(٤) حا (ا بَ) = حا(ا − ب) = حا(ا) − حا(ا ب)
= ٠,٤ − ٠,٢ = ٠,٢

[٣] (١) ∵ حا (ا ∪ ب) = حا(ا) + حا(ب) − حا(ا ب)
∴ حا (ع) = حا (ا) + حا(ب) − حا (ا ب)
∴ ١ = ٢/٥ + ٧/١٠ − حا(ا ب)
⟸ حا (ا ب) = ١/١٠
(٢) حا (ا بَ) = حا(ا − ب)
= حا (ا) − حا(ا ب)
= ٢/٥ − ١/١٠ = ٣/١٠

[٤] (١) حا (ا)َ = ١ − حا(ا) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦
(٢) حا (ا − ب) = حا(ا) − حا(ا ب) = ٠,٤ − ٠,٢ = ٠,٢
(٣) ∵ حا (ا ∪ ب) = حا(ا) + حا(ب) − حا(ا ب) = ٠,٤ + ٠,٣ − ٠,٢ = ٠,٥
∴ حا (ا ∪ ب)َ = ١ − حا(ا ∪ ب)
= ١ − ٠,٥
= ٠,٥

[٥] ∵ حا (ا ∪ ب) = حا (ا) + حا (ب) − حا(ا ب)
١/٨ = ١/٤ + ١/٥ − حا(ا ب) ⟸ حا (ا ب) = ١٣/٤٠
∴ ا ، ب حادثتان غير متنافيتين (لأن حا (ا ب) ≠ ٠)

[٦] نفرض أن : حا (ب) = س ، ∴ حا(ا) = ٣ س ، حا(جـ) = ٣/٢ س
∵ حا (ا) + حا(ب) + حا(جـ) = ١
∴ ٣ س + س + ٣/٢ س = ١ ⟸ ١١/٢ س = ١ ⟸ س = ٢/١١

∴ حا (أ) = ٣ × $\frac{٢}{١١}$ = $\frac{٦}{١١}$ ، حا (ب) = $\frac{٢}{١١}$ ، حا (حـ) = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{٢}{١١}$ = $\frac{٣}{١١}$

[٧] نفرض أن أ = حادثة ظهور عدد اولي

∴ أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ن (أ) = ٣

ونفرض كذلك أن ب = حادثة ظهور عدد أقل من ٣

∴ ب = { ١ ، ٢ } ، ن (ب) = ٢

∴ (١) حا (أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، (٢) حا (ب) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

(٣) أ ، ب غير متنافيتين (لأن حا (أ ب) = $\frac{١}{٦}$

[٨] نفرض أن أ = حادثة اختيار طالب سوري

∴ (١) حا (أ) = $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

ونفرض أن : ب = حادثة اختيار طالب اردني

∴ (٢) حا (ب) = $\frac{٣}{٢٠}$

ونفرض أن حـ = حادثة اختيار طالب عراقي ⇐ حا (حـ) = $\frac{٨}{٢٠}$

∴ (٣) حا (حـ ∪ ب) = حا (حـ) + حا (ب) − حا (حـ ب)

= $\frac{٨}{٢٠}$ + $\frac{٣}{٢٠}$ − صفر = $\frac{١١}{٢٠}$

[٩] ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ٥٠ } ⇐ ن (ع) = ٥٠

نفرض أن أ = حادثة أن العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على ٥

= { ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٥٠ } ، ∴ ن (أ) = ١٠

∴ حا (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ع)}$ = $\frac{١٠}{٥٠}$ = $\frac{١}{٥}$

[١٠] نفرض أن أ = حادثة اختيار طالب يدرس اللغة الانجليزية ،

∴ حا (أ) = $\frac{٦٠}{١٢٠}$ = $\frac{١}{٢}$

نفرض أن : ب = حادثة اختيار طالب يدرس اللغة الفرنسية ،

∴ حا (ب) = $\frac{٥٠}{١٢٠}$ = $\frac{٥}{١٢}$

نفرض حـ = أ ∩ ب = حادثة يدرس الانجليزية والفرنسية معاً ،

∴ حا (حـ) = حا (أ ب) = $\frac{٢٠}{١٢٠}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) − حا (أ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{١٢}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٦+٥-٢}{١٢}$ = $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

١٠-٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

يعطي المعلم الاختبار الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي تحضيراً لإختبار الوحدة الذي يعطيه في حصتين ويعطي الاختبار الذي في الدليل أو اختباراً مشابهاً بحيث يغطي أهداف الوحدة كما في الجدول التالي :

رقم السؤال	رقم الهدف
١	١ ، ٢ ، ٣ ، ٤
٢	٥ ، ٦ ، ٧
٣	٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١

الأختبار

[١] فيما يلي عدد الشيكات بالألف (س) وقيمة الشيكات بملائين الريالات (ص) في البنك المركزي اليمني خلال شهر لعام ٢٠٠٢م لصالح موسسة ما :

س	٦٨	٥٩	٦٧	٦٥	٦٧	٦٠	٦٣	٥٤	٥٣	٦٩	٦٠	٧١
ص	٣٦	٤٣	٣٧	٣١	٣٣	٢٧	٣١	٢٤	٢٥	٣٤	٢٨	٣٥

أ) ارسم مخطط شكل الانتشار للبيانات المبينة في الجدول

ب) احسب معامل الارتباط الخطي بين س ، ص

جـ) احسب معامل ارتباط الراتب بين س ، ص

[٢] اذا كانت ن = ١٠ ، مجـ س ص = ١٤٤٠

مجـ س^٢ = ١٨٧٨ ، مجـ ص = ١٠٠ ، مجـ س = ١٣٠ ، $\bar{س}$ = ١٣ ، $\bar{ص}$ = ١٠

أوجد معادلة الانحدار التي تتنبأ بها عن قيم ص من خلال قيم س

[٣] – أ) عرّف مايلي :

– الحادثة المؤكّدة – شرط تنافي حادثتين – دالة الاحتمال

ب) إذا كانت أ ، ب حادثتين في فضاء العينة « ع » لتجربة عشوائية ، « حا » دالة احتمال معرّفة على « ع » وكان:

حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، حا (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، حا (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ اوجد :

أولاً : حا ($\bar{أ}$ ∪ $\bar{ب}$) ثانياً : حا ($\bar{أ}$ ∩ ب) ثالثاً : حا (أ ∩ $\bar{ب}$)

المصطلحات

شكل الانتشار	Scatter Diagrams
معامل الارتباط	Correlation Coefficient
خطية	Linear
انحدار	Regression
التنبؤ	Prediction
الانحدار الخطي	Linear Regression
معيار	Criterian
القيمة المقدرة	Assessed Value
المتغير العشوائي .	Random Varible
تعريف	Definition
حوادث	Events
فضاء العينة	Sample Space
حادثتان منفصلتان « متنافيتان »	Mutually Exclusive Events
حادثة	Event
حادث أكيد	Certain Event
حادث متمم(مكمل)	Complementry Event
احتمال	Probability
حادث مستحيل	Null Event

المراجع

١- فريد أبو زنية، لطفي لطيفة، خليل الخليلي [الطرق الإحصائية في التربية والعلوم الانسانية . الجزء الأول (الأردن ١٩٨١م)] .

٢- محمد رجائي ، عزت عبد الرحمن [الممتاز في الجبر والاحتمالات وحساب المثلثات للصف ٣ث / ع شعبتي العلوم والرياضيات (مصر العربية)] .

٣- د . حبيب علي اسماعيل (المدخل للإحصاء) .

٤- نظريات ومسائل في الاحتمالات ، نظريات ومسائل في الإحصاء[سلسلة ملخصات سيشوم] .

٥- أ . ثابت عزيز الشاروني ، [مبادئ علم الإحصاء، (مصر العربية)] .

٦- د . مدني دسوقي (مبادئ في علم الإحصاء) .

٧- د . أنيس كنجو (الإحصاء).

٨- كتب المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم.

تم بحمد الله

وزارة التربية والتعليم

مطابع الكتاب المدرسي