بسمة امل

في الرياضيات
جلسة امتحانية
بكلوريا ٢٠٢١

♥ فكرة مميزة :

عيّن قيمة A :

الخطوات:

① نحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ حسب الطلب

② نبدأ من الجملة " $f(x)$ تنتمي إلى المجال ... $]a, b[$

③ نكتب $a < f(x) < b$

④ نطرح النهاية التي طلعت " l "

$$a-l < f(x)-l < b-l$$

" رح يطلع عددين متساويين بالقيمة ومتعاكسين بالإشارة ".

⑤ نأخذ الطرف الموجب ونكتب قيمة مطلقة.

$$|f(x)-l| < b-l$$

⑥ نعوض $f(x)$ بقيمتها.

⑦ نوحد مقامات ونصلح ونختصر..

⑧ نتخلص من القيمة المطلقة

⑨ نعزل x ... والعدد الذي بيطلع

عدد $< x \Leftarrow$ العدد هو A.

Note: في بعض الأحيان بيختصر خطوات

" بيقول $f(x)$ ينتمي إلى مجال مفتوح مركزه "عدد" ونصف قطره "عدد آخر"

فبيكون وفر علينا أول ④ خطوات

نبلش من: $|f(x) -$ المركز$| <$ نصف القطر

Ex:

① : ليكن f التابع المعرف على $]\frac{1}{2},+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

* أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عيّن عدد A يحقق $x>A$ فإن $f(x)$ في المجال $]1.95,2.05[$.
* احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

② : ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق:

2019 أولى

$$f(x)=\frac{2+\ln x}{1+\ln x}$$

• جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: $x>A$ فإن $f(x)$ في المجال $]0.9, 1.1[$.

• احسب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

③ : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$

* احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$ ، ثم جد عدد طبيعي n_0 يحقق: أياً كان $n>n_0$ فإن u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

2019 ثانية

④ : ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x)=\frac{3e^x+2}{e^x-1}$$

* احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم أعط عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ فإن $f(x)\in]2.95,3.05[$.

كن بسيطاً ومسالماً في كل شيء إلا في أحلامك ... انتزعها من الحياة انتزاعاً ...

Sam ♥

للتواصل: 0991070187

الاستمرار :

شرط الاستمرار عند x_0 :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)}$$

أمثلة :

① ليكن f تابع معرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4} & ; x>1 \\ -\dfrac{1}{5} & ; x=1 \\ B\cdot\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2+1)\cdot|x-1|} & ; x<1 \end{cases}$$

* عيّن A و B ليكون f مستمر على $\mathbb{R}$.

② عيّن قيمة m ليكون مستمر على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x\neq 0 \\ m & ; x=0 \end{cases}$$

③ ادرس استمرار f عند الصفر :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4(1-\cos x)}{x^2} & ; x\neq 0 \\ 2 & ; x=0 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

إذا السؤال...
عطانا تابع $f(x)$
وطلب احسب
$f'(x_0), f'(x), f(x_0)$
ثم استنتج قيمة
النهاية... منطبق الخطوات.
① - نحسب $f(x_0), f'(x)$
$f'(x_0)$.
② حسب تعريف العدد المشتق:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

إذا السؤال : أثبت
أن f اشتقاقي عند عدد
لازم يطلع الطرف الثاني
عدد.
وإذا طلع لانهاية بيكون
f غير اشتقاقي.

ركز يا صاحبي
في صيغة السؤال..

EX :

① ليكن f التابع المعرف على $[0,3]$ وفق :
$f(x)=(x-3)\sqrt{x(3-x)}$.
جد $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ واستنتج أنه f اشتقاقي عند 3.

② ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق :
$f(x)=\cos x$
① - احسب $f(\frac{\pi}{3})$ ، $f'(x)$ ، $f'(\frac{\pi}{3})$
② - استنتج قيمة النهاية
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}=?$$

للتواصل: 0991070187

(٧) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-\ln x) & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

١. احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ واستنتج أن f اشتقاقي عند الصفر.

(٤) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

(a) احسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$.

(b) ادرس قابلية الاشتقاق لـ f عند الصفر من اليمين، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$.

(٥) ليكن f تابع معرف وفق: $f(x)=\sqrt{x+1}$

١) احسب $f(1)$ و $f'(x)$ و $f'(1)$.

٢) استنتج قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$$

Note: إذا أعطانا تابع f وطلب منا إيجاد f' ثم استنتج مشتق تابع آخر يشبه f مع فرق بسيط بيكون بدل مكان x بشغلة ثانية ... فبيكون مشتق $g(x)$ هو نفس مشتق $f(x)$ بس منبدل مكان x الشغلة اللي بدلناها ومنضرب بمشتق اللي بدلناه ..
لسه كتير ... ههه ... ع الجبال بيتهم"

(٦) ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln(x+1)$$

١) أثبت أن f اشتقاقي عند الصفر ثم استنتج مجموعة تعريف المشتق.

٢) جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$.

٣) استنتج مشتق التابع $g(x)$ المعرف على $]0,\frac{\pi}{2}[$ وفق: $g(x)=\sqrt{\cos x}\cdot\ln(1+\cos x)$.

(٧) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

١) عين $f'(x)$ ومجموعة تعريف المشتق.

٢) نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$، أثبت أن g اشتقاقي على J، ثم احسب $g'(x)$ على J.

♥ قيمة تقريبية :

$$f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\cdot h$$

x

مقدار صاحب a ← ... → h (مقدار بقي من x بلا a)

♥ معادلة المماس :

$$T:\ y-y_0=m(x-x_0)$$

* اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها x_0.

$y_0=f(x_0)$ — نعوض في التابع

$m=f'(x_0)$ — نعوض في المشتق.

للتواصل: 0991070187

تمرين: $f(x) = Ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$

① أوجد D_f

② اكتب معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

③ احسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

• تابع فردي، تابع زوجي، مركز تناظر:

فردي:

ⓐ $x \in D \Rightarrow -x \in D$

ⓑ $f(-x) = -f(x)$

• الصفة التناظرية: C متناظر بالنسبة للمبدأ.

زوجي:

ⓐ $x \in D \Rightarrow -x \in D$

ⓑ $f(-x) = f(x)$

• الصفة التناظرية: C متناظر بالنسبة للمحور yy'

مركز تناظر $A(x_0, y_0)$.

$\boxed{1}$ $x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D$

$\boxed{2}$ $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

ط

ط $f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2y_0$

• مسائل دراسة تغيرات #لخص_لكم:

$\boxed{1}$ - ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق: $f(x) = Ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب:

ⓐ أثبت أن f تابع فردي، ثم ادرس f على المجال $[0, 2[$.

ⓑ - اكتب معادلة المماس T للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$.

ⓒ - ادرس الوضع النسبي بين C_f و T.

$\boxed{2}$ - ليكن f التابع المعرف على $]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً.

③ اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x=3$.

ركزوا معي:

- حل المعادلة -

* حتى يكون للمعادلة $f(x)=k$ حل على المجال I يجب أن يتحقق الشرط:

• $f(x)$ مستمر ومطرد (متزايد أو متناقص)

• $k \in f(I)$!!! أهم شرط !!!

#حالة_خاصة: $f(x) = 0$

للمعادلة حل وحيد على المجال $]a, b[$ إذا تحقق f مستمر ومطرد و $f(a) \cdot f(b) < 0$.

♥ **معادلة تفاضلية :**

سؤال - التعريف :

$\boxed{A}$ $y' = ay$

حلها $f(x) = k \cdot e^{ax}$

$\boxed{B}$ $y' = ay + b$

حلها $f(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$

تعيين K :

$\boxed{A}$ - C يمر بالنقطة $A(x_0, y_0) \Leftarrow$

$f(x_0) = y_0$

$\boxed{B}$ - ذكر المشتق :

$f'(x_0) = y_0$

أثبت أن المعادلة $f(x) = ...$ هو حل للمعادلة التفاضلية ....

نعتبر $y = f(x)$ ونحسب حسب الموجود في المعادلة ونعوض...

Ex :

$\boxed{*}$ عيّن حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y + 1$ والذي يحقق : $f(0) = 1$

$\boxed{*}$ حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ ، ثم عيّن قيمة k كي يمر الخط البياني للحل بالنقطة $A(0, -1)$.

$\boxed{*}$ حل المعادلة التفاضلية $2y' = y$ ، ثم عيّن قيمة k إذا علمت أن قيمة المشتق للحل عندما $x = 0$ تساوي 2 .

$\boxed{*}$ - أثبت أن التابع $f(x) = x \cdot e^x$ حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$.

♥ **عيّن قيمة مجهول :**

$\boxed{A}$ ذكر قيمة حدية (x_0, y_0)

$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$

$\boxed{B}$ ذكر مماس - يوازي ... mx ... $y = mx$ ...

$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$

$\boxed{C}$ كسر... البسط أعلى من المقام بدرجة واحدة ... مقسمة اقليدية .

... المقام أكبر من البسط بدرجة أو أكثر و المقام بيتحلل ... توحيد المقامات وحذفها.

Ex :

$\boxed{*}$ ليكن f التابع المعرف على IR وفق :

$$f(x) = ax^3 + bx + 1$$

عيّن a و b لتكون النقطة $A(1, -1)$ قيمة حدية.

$\boxed{*}$ ليكن f التابع المعرف على IR_+^* وفق :

$$f(x) = ax + b + \frac{Lnx}{x}$$

عيّن a و b كي يقبل التابع قيمة حدية في $A(1,0)$

للتواصل: 0991070187

* ليكن f تابع حقيقي: $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$

• أوجد قيمة b و a اللذين يحققان:

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$$

* ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

* اكتب التابع f بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$

مقارب مائل: هام جداً جداً جداً...

أثبت أن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ حسب الطلب.

الخطوات:

① نحسب الفرق: $f(x)-y_\Delta$

② ننهي الفرق عند $+\infty$ أو $-\infty$: $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_\Delta)$

③ يجب أن يكون نهاية الفرق = صفر.

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x)-y_\Delta)=0 \Rightarrow \Delta$ مقارب مائل.

الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta$

لدينا ثلاث حالات:

ⓐ $f(x)-y_\Delta<0 \Leftarrow C$ تحت Δ

ⓑ $f(x)-y_\Delta>0 \Leftarrow C$ فوق Δ

ⓒ $f(x)-y_\Delta=0$ "يمكن إعدامه" ... هناك نقطة مشتركة.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ 2020 ثانية

1- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

2- ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*_+$ وفق: $f(x)=x-\ln\left(\frac{3x+1}{x}\right)$

ⓐ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-\ln 3$ مقارب الخط C في جوار $+\infty$.

ⓑ ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\ln(e^x+3)$

ⓐ أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل:

$$f(x)=x+\ln(3e^{-x}+1)$$

ⓑ أثبت أن C يقبل منصف الربعين الأول والثالث مقارب مائل في جوار $+\infty$.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}$ والمطلوب: 2019 أولى

* أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x+3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$ والمطلوب:

1- عيّن العددين الحقيقيين a و b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y=3x$.

2- من أجل $a=4$ و $b=-4$.

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

أوجد معادلة المقارب المائل:

① الطريقة العامة:

* الخطوات:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b$

4) $\Delta : y = ax + b$

② الطريقة القانونية:

"الإتمام إلى مربع كامل."

③ القسمة الإقليدية:

"شرط البسط أكبر من المقام بدرجة واحدة."

ناتج القسمة هو المقارب المائل.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+5}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$. ثم استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق: $f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$

a- اكتب x^2-2x+2 بالصيغة القانونية.

b- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sqrt{(x-1)^2}\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \sqrt{(x-1)^2}\right)$

c- استنتج أن C يقبل مقاربين مائلين Δ, Δ_2 اكتب معادلتيهما.

d- ادرس الوضع النسبي بين C و Δ & C و Δ_2.

♥ ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR_+^* وفق: $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{\ln x}{x}$

a احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$.

b استنتج معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

♥ قاعدة الواحد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Exs :

$f(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{\ln(2x+1)}$; $a=0$

$f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x+1}$; $a=-1$

$f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$; $a=0$

$f(x) = \dfrac{\ln(3x+1)}{\sin 6x}$; $a=0$

$f(x) = \dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\ln(2x+1)}$; $a=0$

$f(x) = x.\ln(1+\frac{1}{x})$; $a=+\infty$

♥ مبرهنة الإحاطة :

إذا شفت $\left.\begin{array}{l}\sin(\infty)\\ \cos(\infty)\\ E(\infty)\end{array}\right\}$ مبروك حصلت على دليل لمبرهنة الإحاطة.

$-1 \le \sin\theta \le 1$

$-1 \le \cos\theta \le 1$

$x-1 < E(x) \le x$

مبرهنة مفيدة :

$$|f(x) - l| \le g(x)$$

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

"الي بيدلك على هل مبرهنة كثير شغلات

أول شي # ما في $f(x)$ وثاني شي # في قيمة مطلقة.

وثالث شي # في متراجحة."

فأنت بتعوض الطرف الثاني $g(x)$ وبتحسب نهايته

عند الـ ∞ لازم يطلع صفر.

Exs :

$f(x) = x.\cos(\frac{1}{x})$; $a=0$

$f(x) = \dfrac{2x+\sin x}{x-2}$; $a=+\infty$

$|f(x) - 3| \le \dfrac{1}{x^2}$; $a=+\infty$

$|f(x) + 2| \le \dfrac{x.\cos(e^{x})}{x^2+1}$; $a=+\infty$

$|f(x) - 5| \le \dfrac{E(x)}{x^2+1}$; $a=+\infty$

* ليكن f التابع التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفقة:

$$f(x) = \frac{1}{3+\cos x}$$

2018 أولى

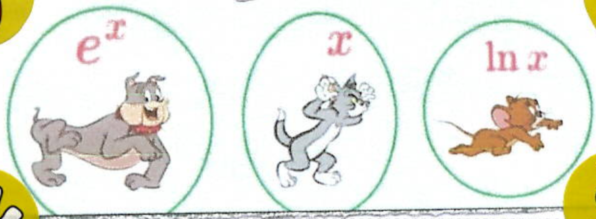
1 - أثبت محدودية f.

2 - استنتج $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+\cos x}$.

انتباه ... انتباه ... انتباه ...

هام وعاجل وضروري ...

قواعد نهايات خطيرة :



هي الصورة بتختصر كتير حكي :

إذا اجتمع اثنين من هدول في حالة

ضرب أو قسمة بنعوض بس بالكبير

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^n \cdot \ln x = 0$$

ولكن:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

EX3:

$f(x) = 2x \cdot e^{-x}$; $a = +\infty$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$; $a = +\infty$

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1}$; $a = +\infty$

$f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$; $a = 0, +\infty$

$f(x) = x - e^x$; $a = +\infty$

$f(x) = (x^2 - x) \cdot \ln x$; $a = 0$

$f(x) = e^x - \ln x$; $a = +\infty$

$f(x) = e^x - x^2$; $a = +\infty, -\infty$

تكشات على الماشي :

* جذر مع عدد و عدد $\leftarrow x$ ← فوراً مرافق
* $1 - \cos\theta$ فوراً $2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$
* $\sin\theta$ ← في $1 - \cos\theta \rightarrow 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
  ← في θ ← فوراً قاعدة الواحد
* تابع كسري والبسط والمقام بيتحللوا ... تحلل مختصر.

* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1-2}}{x-3}$; $a = 3$
* $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$; $a = 0$
* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4}$; $a = -2$
* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^3 - 1} - 1}{x - 1}$; $a = 1$

للتواصل: 0991070187

♥ حل جملة معادلتين :

1- $2\ln x + \ln y = 7$ —①
$3\ln x \;\; 5\ln y = 4$ —②

2- $\ln(x+y) = 2\ln 2$ —①
$\ln x + \ln y = \ln 3$ —②

3- $\ln(x.y) = 2$ —①
$2\ln x - 3\ln y = -1$ —②

4- $(\ln x).(\ln y) = -12$ —①
$\ln(x.y) = 1$ —②

5- $e^x - \frac{1}{e}e^y = 1$ —①
$2e^x + e^y = 4 + e$ —②

6- $e^{4x}.e^y = \frac{1}{e^2}$ —①
$x - y = -2$ —②

♥ حل معادلة :

1- $3^{x+1} = 7^x$

2- $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

3- $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

4- $e^{3x-1} = e^{2x}$

5- $(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 5 = 0$

6- $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

♥ حل متراجحة :

1- حل المعادلة $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
ثم استنتج حلول المتراجحة : $e^{2x} - e^x - 6 \leq 0$

2- حل المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$
ثم استنتج حلول المتراجحة : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$

3- $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

4- ميز : $(\ln x + 2)(\ln x - 3) \leq 0$

مسألة مميزة :

ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1- a- تحقق أن $P(-1) = 0$
b- استنتج أن $P(x)$ يكتب بالشكل :
$P(x) = (x+1).Q(x)$
c- حل المتراجحة : $P(x) \leq 0$

2- استفد من المعلومات السابقة لحل المتراجحة : $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

للتواصل: 0991070187

حل متراجحة :

إذا كانت المتراجحة تحوي في طرفيها نوعين مختلفين من التوابع فإننا ننقل أحد الطرفين إلى الآخر وندرس إطراد الطرف الأول.

ثم نستنتج صحة المتراجحة :

أولى 2020 :

* أثبت أنه: $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > -1$.

[*] - أثبت أنه $x < e^x$ أياً احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} e^x$.

تماس خطين بيانيين :

شرط تماس خطين بيانيين :

C_1 الخط البياني للتابع f_1

C_2 الخط البياني للتابع f_2

النقطة $A(x_0, y_0)$

الشروط:

1) $A \in C_1 \cap C_2$

أي A تحقق معادلة التابع الأول والتابع الثاني.

2) $m_1 = m_2$

يعني:

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$$

وإذا طلب معادلة المماس المشترك:

الميل $m = f_1'(x_0)$

والنقطة $A(x_0, y_0)$.

ثم نعوض في القانون: $T: y - y_0 = m(x - x_0)$

تكامل :

[A] - إذا كان: $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$

$$J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$$

احسب $I+J$ و

$I-3J$

ثم استنتج قيمة كل من I و J.

[B] - 2018 أولى: ليكن $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x+2}\,dx$

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$$

1 - احسب J.

2 - احسب $I+J$ ثم استنتج I.

[C] - ليكن $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$ ، $J = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

1 - احسب J.

2 - احسب $I+J$ ثم استنتج قيمة I.

كيوت - كيوت - كيوت :

[A] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=e^x-1$

① جد مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le 0$

② احسب $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

[B] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x)=\frac{2x^2+\ln x}{x}$ خطه البياني C.

① - أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

② - ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

③ - احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=1$, $x=e$

تكاملات على خفيف :

$$I_1=\int \frac{1}{1+e^{3x}}\,dx$$

$$I_2=\int_1^e \ln x\,dx$$

$$I_3=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$I_4=\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

$$I_5=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$I_6=\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$I_7=\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$$I_8=\int x\,e^x\,dx$$

$$I_9=\int x^2\cos x\,dx$$

$$I_{10}=\int x\sin^2 x\,dx$$

$$I_{11}=\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$I_{12}=\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1}\,dx$$

$$I_{13}=\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

$$I_{14}=\int x\,e^{x^2}\,dx$$

$$I_{15}=\int \tan^2 3x\,dx$$

2019 أولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق: $f(x)=\frac{4}{e^x+1}$ والمطلوب:

1- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- جد معادلة المماس T للخط البياني C عند النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي لـ C و T.

4- في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس T والخط C.

5- ليكن C' الخط البياني للتابع والمعرف على IR وفق: $g(x)=\frac{4e^x}{1+e^x}$. استنتج الخط البياني C' للتابع g.

2019 ثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR وفق: $f(x)=\frac{2x}{e^x}$ والمطلوب:

1- جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- في معلم متجانس ارسم C.

4- احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$.

5- استنتج رسم C_1 للتابع g المعرف وفق: $g(x)=2x.e^x$

6- أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'+y=2e^{-x}$.

2020 أولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق: $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب:

1- أثبت أن f تابع فردي.

2- ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.

3- اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

4- في معلم متجانس ارسم الخط البياني C.

5- استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\ln(2-x)-\ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$

2020 ثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ والمطلوب: 1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، واكتب معادلات كل مقارب أفقي أو شاقولي.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$.

4- في معلم متجانس ارسم الخط C.

5- استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $g(x)=\frac{1-x+\ln x}{x}$.

للتواصل: 0991070187

مسائل دراسة تغيرات شاملة:

2017 أولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- جد معادلة المماس Δ في النقطة A التي فاصلتها $x=1$.

4- ارسم كل مقارب وجدته، ثم ارسم Δ وارسم C.

5- احسب S مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم $x=e$.

2017 ثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+x(\ln x)^2$ وليكن $g(x)=(\ln x+1)^2$ والمطلوب:

1- أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

2- أثبت أن $f'(x)=g(x)$

3- حل المعادلة $g(x)=0$

4- نظم جدولاً بتغيرات f.

5- اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C.

2018 أولى:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\ln(e^{-x}+1)$$

1- جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$، هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة.

2- أثبت أن $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$

3- أثبت أن المستقيم $y=-x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

4- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

5- ارسم المقاربات وارسم الخط البياني C.

2018 ثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x^2-\ln x$

1- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

4- في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C.

5- احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ ، $x=e$.

6- نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ حيث: $U_n=n^2-\ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

مسألة شاملة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. واستنتج معادلتي المقاربين الأفقيين.

② ادرس الوضع النسبي بين C وكل مقارب وجدته.

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ ثم أوجده.

④ أوجد معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x_0 = 0$.

⑤ أثبت أن C متناظر بالنسبة للمبدأ O «تابع فردي».

⑥ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم Δ وارسم C.

⑦ استنتج رسم الخط C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^x + 1}$

⑧ أثبت أن مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = \ln 3$ و $x = -\ln 3$ تساوي $S = \ln\left(\frac{16}{9}\right)$

مسألة شاملة (2) :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

① أثبت أن f تابع فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C.

② أوجد معادلة كل مقارب يوازي المحور xx' وادرس الوضع النسبي مع C.

③ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

④ اكتب معادلة المماس Δ للخط C في المبدأ.

⑤ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C و Δ.

⑥ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = -1$ و $x = 1$.

مسألة شاملة (3) :

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = x - 1 - \ln x$ خطه البياني C.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها، بيّن القيم الكبرى والصغرى محلياً.

② استنتج من جدول f أنه $\ln x < x - 1$ أياً كان $x \in \mathbb{R}_+^*$

③ ارسم ~~...~~ C.

④ أثبت أنه التابع $g(x) = \frac{x^2}{2} - x.\ln x$ هو تابع أصلي لـ f على المجال $]0, +\infty[$.

انتهى العمل

للتواصل: 0991070187

للتواصل: 0991070187

جدول تغيرات شامل

*نجد جانباً جدول تغيرات التابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1 ما هي مجموعة تعريف f ومستقره الفعلي ؟

2 اكتب نهاية التابع f عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف .

3 هل يوجد للخط C_f مقاربات أفقية أو شاقولية أوجدها .

4 هل يقبل C مقارب مائل ؟ علل.

5 دل على القيمة الحدية للتابع f وبيّن نوعها.

6 ما هي عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ ؟ علل.

7 هل تقبل المعادلة $f(x) = -1$ حلاً ؟

8 اكتب معادلة المماس الأفقي .

9 إذا علمت أن التابع f يعطى بالشكل : $f(x) = a + \frac{b}{x^2+1}$. عيّن a و b.

10 ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C.

الحل

1 $D_f =]-\infty, +\infty[$ ، $E_f = [0, 1[$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

3 $y = 1$ مقارب أفقي .

4 لا يقبل C مقاربات مائلة ؛ لأن وجود المقارب الأفقي ينفي وجود المقارب المائل .

5 $f(0) = 0$ قيمة صغرى .

6 للمعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ حلين مختلفين .

الحل الأول : $x_1 \in]-\infty, 0[$ لأن f متناقص تماماً على هذا المجال وكذلك $\frac{1}{2} \in f(]-\infty, 0[)$

الحل الثاني : $x_2 \in]0, +\infty[$ لأن f متزايد تماماً على هذا المجال وكذلك $\frac{1}{2} \in f(]0, +\infty[)$.

7 لا تقبل المعادلة $f(x) = -1$ أي حل لأن $-1 \notin E_f$.

8 المماس الأفقي لـ C هو المستقيم الذي ينعدم فيه المشتق : $\Delta : y = 0$.

9 $f(x) = a + \frac{b}{x^2+1}$

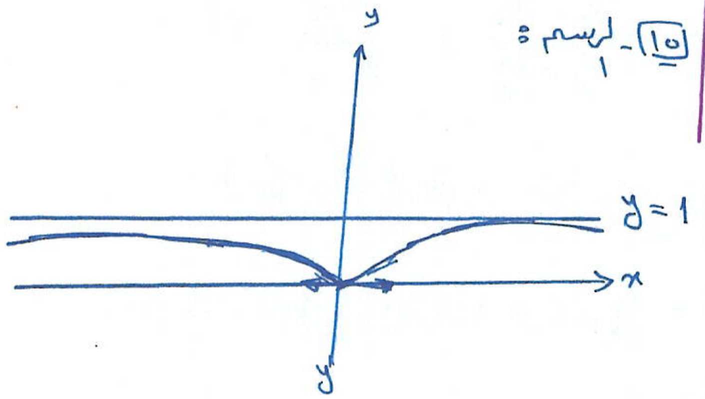
لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow a = 1$

وكذلك : $f(0) = 0 \Leftarrow a + b = 0$

$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

10 الرسم :



دورة 2020 أولى:

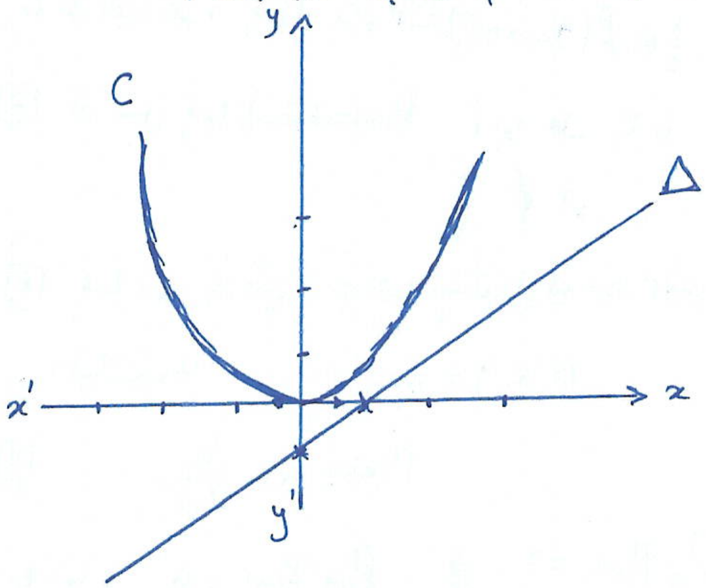
السؤال الأول: نتأمل جانباً الخط البياني C للتابع f المعرف على IR والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C والمطلوب:

1 جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 اكتب معادلة Δ.

3 جد $f(0)$ و $f'(0)$.

4 جد حلول المتراجحة $f'(x)<0$.



الحل:

١- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

٢- نختار نقطتين $A(1,0)$ و $B(0,-1)$

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0+1}{1-0}=1$$

$$\Delta: y-y_A=m(x-x_A)$$

$$\Delta: y-1=1.(x-0)$$

$$\Delta: y=x+1$$

دورة 2020

٣- $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ "مماس أفقي"

٤- $f'(x)<0 \Leftarrow$ التابع متناقص.

$I=]-\infty,0[$

دورة 2020 ثانية:

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات f المعرف على IR خطه البياني C. والمطلوب:

1 جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- دل على القيم الحدية للتابع f مبيناً نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

4- جد حلول المتراجحة $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	6	↘	$-\infty$

الحل:

١- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

٢- $f(4)=6$ قيمة كبرى

$f(0)=2$ قيمة صغرى.

٣- للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد.

٤- حلول المتراجحة $f'(x)>0$

$I=]0,4[$

جدول تغيرات :

تمرين 1 - تأمل جدول تغيرات f و المستمر على IR وخطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

1) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) دل على القيمة الحدية للتابع وحدد نوعها.

3) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C.

4) أوجد $f(IR)$.

تمرين 2 - نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C:

x	$-\infty$		-2			3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	1	||	-2 $-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$		0	$\searrow$	-3

1) أوجد مجموعة التعريف والمستقر المقابل.

2) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني، هل يوجد مقاربات مائلة؟ (علل).

3) هل يوجد مماسات أفقية؟

4) هل f اشتقاقي عند 3 علل ذلك؟

5) عين القيم الحدية.

تمرين 3 : نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

1) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الشاقولي.

2) عين القيم الحدية وبين نوعها.

3) اكتب معادلة المماس عند النقطة $x=1$ وبين نوعه.

4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

x	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$ -1	|| 2	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\searrow$	-4

تمرين 4 : نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب :

1) أوجد D_f ثم أوجد حلول المتراجحة $f'(x)>0$.

2) هل $f(1)$ قيمة حدية؟ علل. هل $f(0)$ قيمة حدية (علل)؟

3) اكتب معادلة المماس عند $x=1$ ، اكتب معادلة نصف المماس عند $x=0$ من اليسار.

4) - اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C.

تمرين 5 : ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}$ جدول تغيراته كما موضح.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

1- دل على معادلة كل مقارب أفقي.

2- هل 2 قيمة محلية ؟ علل.

3- دل على قيمة كبرى محلياً.

4- أوجد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$.

تمرين 6 : تأمل جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$، وخطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1- اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C.

2- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

3- أوجد معادلة مماس منحني التابع في النقطة التي فاصلتها $x=1$.

4- احسب $f(]-1,1[)$.

تمرين 7 : نجد جانباً جدولاً بتغيرات f والذي خطه البياني C.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	3

1- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C.

2- هل يقبل C مقاربات مائلة ؟ علل.

3- هل يقبل C مماسات أفقية ؟

4- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

تمرين 8 : نجد فيما يأتي جدول بتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

2) اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة منه فاصلتها $x=1$.

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4) ما عدد القيم الحدية محلياً.

تمرين 9: في الشكل المرسوم جانباً جدول تغيرات f والمطلوب:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

2) دل على القيم الحدية للتابع f ؟

3) عين صورة المجال $]0,+\infty[$ وفق التابع f.

4) اكتب معادلة كل مقارب أفقي وشاقولي لـ C.

5) اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 2.

تمرين 10: في الشكل التالي جدول تغيرات التابع f. خطه البياني C:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	5

a) هل يقبل C مقارب مائل عند $+\infty$ ؟ علل ذلك.

b) دل على القيم الحدية (في حال وجودها).

c) اكتب معادلة كل مستقيم مقارب أفقي أو شاقولي للخط C.

d) هل يوجد مماس أفقي؟ في حال الإيجاب، اكتب معادلته.

e) احسب $f(]-\infty,1])$ وبين عدد حلول المعادلة $f(x)=5$.

تمرين 11: تأمل جدول تغيرات f والمطلوب:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع مع التعليل.

3) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟

4) احسب $f([0,+\infty[)$.

تمرين 12: في الجدول المجاور. نطلب إليك التالي:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1) جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))$

2) عين القيمة المحلية الصغرى.

3) حل المتراجحة $f'(x)>0$.

4) اكتب معادلة كل مماس أفقي لـ C.

رسم بياني :

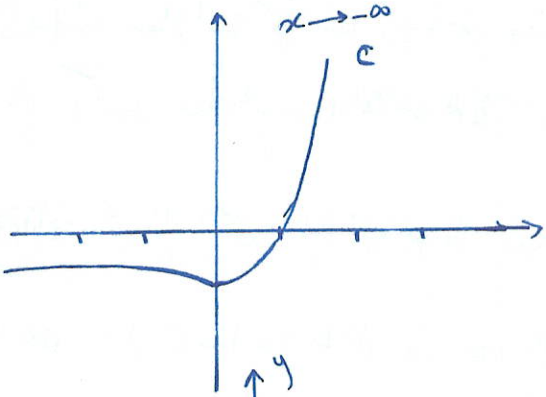
*** التمرين [1] :** في الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على IR . المطلوب :

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(f(x))$.

2) اكتب معادلة المقارب الأفقي .

3) دل على القيمة الصغرى محلياً .

4) ما هي حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$ ؟



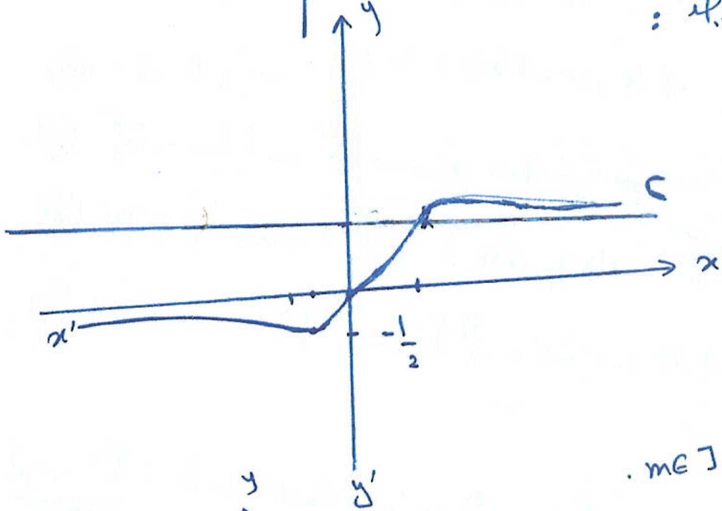
*** التمرين [2] :** في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f أوجد :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) حلول المتراجحة $f(x) > 1$.

3) $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

4) عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في المجال: $m \in]-\frac{1}{2}, 0[$.



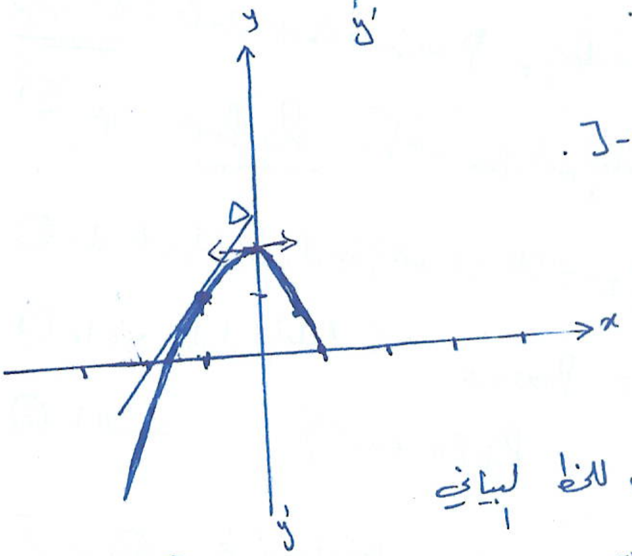
*** التمرين [3] :** نجد جانباً خطاً بيانياً لتابع f معرف على $]-\infty, 1[$.

1- أوجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، هل يوجد مقارب أفقي ؟

2- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3- أثبت أن $f(1)$ قيمة حدية محلياً .

4- إذا علمت أن المستقيم Δ المرسوم على الشكل هو مماس للخط البياني عند النقطة التي فاصلتها -1 ، اكتب معادلة Δ ثم استنتج قيمة تقريبية لـ $f(-0.9)$.



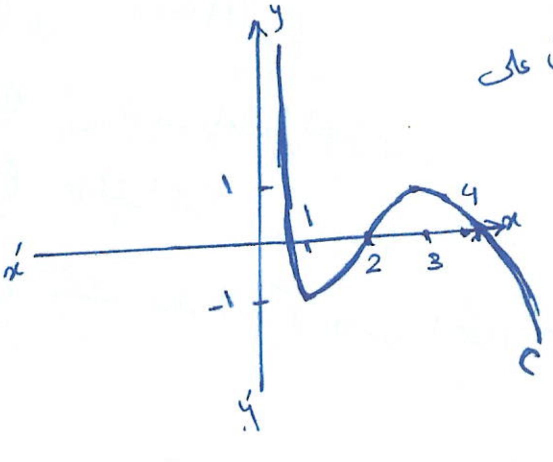
*** التمرين [4] :** في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ و المطلوب :

1) جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

2) دل على القيم الحدية وحدد نوعها .

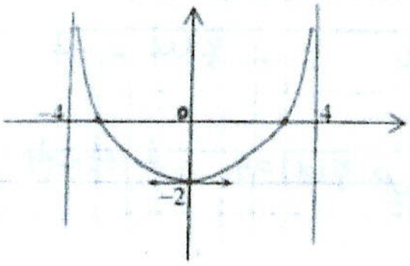
3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

4) ما حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ ؟



- دورات + وزاريات -

التمرين الأول: (دورة 2017 الأولى).



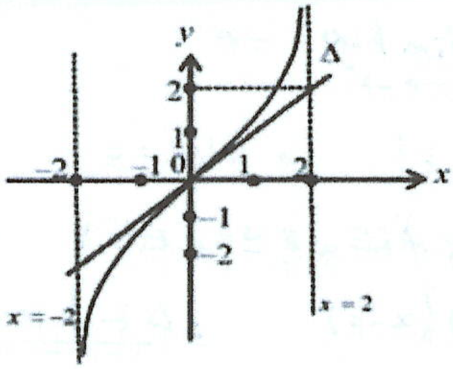
نتأمل في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4\,,4[$

1- احسب $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ، واستنتج معادلة كل مقارب للخط C.

2- احسب $f(0)$ و $f'(0)$.

3- جد حلول المعادلة $f(x)=0$.

التمرين الثاني: (دورة 2017 الثانية).



حيث C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]-2\,,+2[$
والمطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

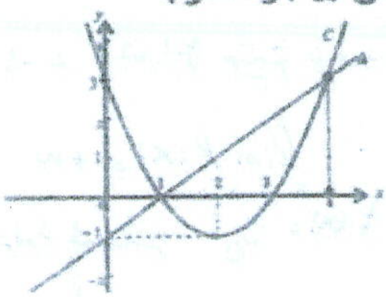
2- أوجد $f(0)$ ، $f'(0)$

3- هل التابع f فردي ام زوجي

4- اكتب معادلة المماس Δ

التمرين الثالث: (دورة 2018 الأولى).

تأمل الشكل المرسوم جانباً ، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$. والمطلوب



1- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

2- جد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3- ما حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$.

4- اكتب معادلة المستقيم Δ .

التمرين الرابع: (دورة 2018 الثانية).

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1- جد $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2- اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع f .

3- ماعدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

4- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f .

* حل التمرين الأول [illegible]:

① $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -4} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} +4} f(x) = +\infty$

$x=-4$ و $x=4$ } مقارب شاقولي .

② $f(0)=-2$ و $f'(0)=0$ " مماس أفقي "

③ حلول المعادلة $f(x)=0$ هي نقط تقاطع C مع xx' ⇐ $x_1=-3$ و $x_2=3$.

---

* حل دورة 2017 ثانية: التمرين الثاني:

① $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

② $f(0)=0$ و $f'(0) = \frac{0-1}{0-1} = 1$ (نختار نقطتين $(0,0)$ و $(1,1)$)

③ f تابع فردي لأنه متناظر بالنسبة للمبدأ O .

④ معادلة Δ : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ⇐ $y-0=1.(x-0)$ ⇐ $y=x$ "منصف الربعين الأول والثالث".

---

* حل دورة 2018 أولى التمرين الثالث:

① $f(+2)=-1$ قيمة صغرى حدية

② $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

③ حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$ هي نقط تقاطع C مع Δ وهي: $x_1=1$ و $x_2=4$.

④ معادلة Δ : نختار نقطتين $(1,0)$ و $(4,3)$: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-0}{4-1}=1$

$\Delta: y-0=m(x-1) \Rightarrow \boxed{\Delta: y=x-1}$

---

* حل دورة 2018 ثانية: التمرين الرابع:

① $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

② $y=2$ مقارب أفقي .

③ للمعادلة $f(x)=0$ حلين حيث: $x_1 \in]2,+\infty[$ ، $x_2 \in]-2,2[$.

④ $f(2)=-1$ قيمة حدية صغرى .

التمرين الخامس: (دورة 2019 الأولى).

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:
خطه البياني C .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

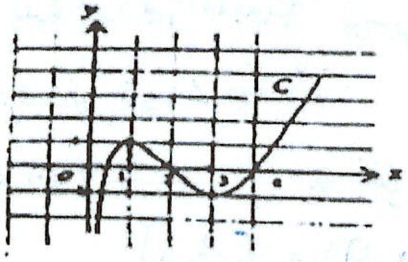
1- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C.

3- دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

4- احسب $f(\,]-1,2[\,)$.

التمرين السادس: (دورة 2019 الثانية).



في الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ والمطلوب:

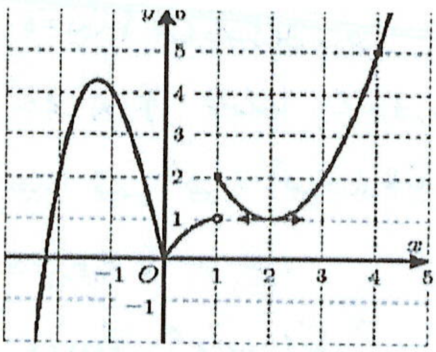
1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

2) دل على القيم الحدية مبيّناً نوعها.

3) جد حلول المتراجحة: $f'(x)\le 0$.

4) جد $f([1,3])$.

التمرين السابع: (نموذج وزاري الأول).



نجد جانباً الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=5$ ؟

2) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\ge 5$ ؟

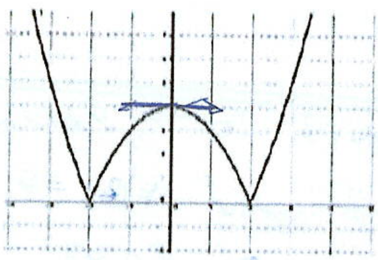
3) هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع. علل ذلك؟

4) ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟

5) ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x=2$ ؟

6) أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$ ؟

التمرين الثامن: (نموذج وزاري الثاني).



تجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$.والمطلوب

1) كم حلاً للمعادلة $f(x)=2$.

2) احسب قيمة المشتق للتابع عند الصفر.

3) عين صورة المجال $I=\left[-2,2\right]$ وفق f.

4) كم قيمة صغرى أو كبرى محلية للتابع f.

حل دورة 2019 الأولى : التمرين السادس :

1) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$.

2) $y=3$ مقارب أفقي .

3) $f(-1)=-2$ قيمة صغرى حدية

4) $f(]-1,2[) =]-2,4[$.

حل دورة 2019 الثانية : التمرين السادس :

1) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2) $f(1)=1$ قيمة كبرى و $f(3)=-1$ قيمة صغرى .

3) حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$ .. نرسم جدول تغيرات f .

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

من السطر الثاني نلاحظ أن :

$f'(x)\leq 0$ عندما x تنتمي للمجال $[1,3]$.

4) $f([1,3]) = [-1,1]$

حل نموذج وزاري 1 : التمرين السابع :

1) $f(x)=5$ للمعادلة حل وحيد .

2) $f(x)\geq 5$ حلولها $x\in [4,+\infty[$

3) $f(1)$ قيمة حدية (كبرى)، لأنه يوجد مجال I مفتوح وأياً كان $x\in \mathbb{R}\cap I$ فإن $f(x)\leq f(1)$

4) عدد القيم الحدية 4 قيم .

5) $f'(2)=0$ "مماس أفقي" .

6) f غير اشتقاقي عند $x=1$ لأنه غير مستمر عند 0 .

حل نموذج وزاري 3 : التمرين الثامن :

1) عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ هو أربع حلول .

2) $f'(0)=0$ "مماس أفقي" .

3) $f([-2,2]) = [0,4]$

4) للتابع قيمتين حديتين (صغرى) وقيمة كبرى .

$f(0)=4$ قيمة كبرى

$\left.\begin{array}{l} f(-2)=0 \\ f(2)=0 \end{array}\right\}$ قيمة صغرى .

التمرين التاسع: (نموذج وزاري الرابع).

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f والمطلوب

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

2) ما عدد القيم الحدية محلياً.

3) اكتب معادلة مماس منحن التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$.

التمرين العاشر: (نموذج وزاري السادس).

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب.

x	$-\infty$		-1			1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	3

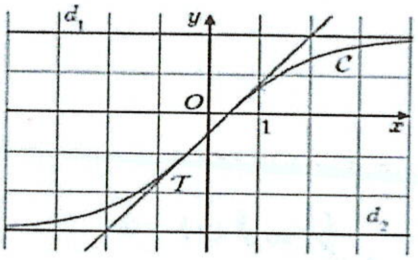
1) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C.

2) هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C؟

3) هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

4) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

التمرين الحادي عشر: (نموذج وزاري 2020).



إذا كان C الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 , d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C المطلوب:

١- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

٢- اكتب معادلة كل مقارب من المقاربين d_1 , d_2.

٣- إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $(0, \frac{-1}{2})$ احسب $f'(\frac{-1}{2})$ ثم اكتب معادلته.

﴿تمّ بعون الله تعالى﴾

حل النموذج الوزاري الرابع: التمرين التاسع:

① للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد حيث: $x \in]0,1[$.

② للتابع $f(x)$ قيمة حدية عظمى هي $f(1)=1$.

③ معادلة المماس عند $x=1$ نلاحظ أن: $m = f'(1) = 0$

فالمماس أفقي معادلته $y=1$.

أو $f'(1)=0$ والمماس يمر بالنقطة $(1,1)$: $\Delta : y-1 = 0(x-1) \Rightarrow y=1$

---

* حل النموذج الوزاري الخامس: التمرين العاشر:

① $y = 3$ مقارب أفقي.

$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ مقارب شاقولي.

② لا يوجد مقاربات مائلة " وجود المقارب الأفقي ينفي وجود المقارب المائل ".

③ لا يوجد مماسات أفقية؛ لأنه لا يوجد نقطة تحقق: $f'(x_0)=0$.

④ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ضمن المجال $]-1,1[$ لأن:

f متناقص تماماً على هذا المجال و $0 \in f(]-1,1[)$ أي $0 \in]-\infty, +\infty[$.

---

* حل النموذج الوزاري السادس: التمرين الحادي عشر:

①

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3$$

②

$$d_1 : y = 2 \quad , \quad d_2 : y = -3$$

③

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{0 - 2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = \frac{5}{4}$$

من نقطتين $(0, -\frac{1}{2})$ و $(2,2)$

معادلة Δ:

$$\Delta : y - f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = f'\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Delta : y - 0 = \frac{5}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\Delta : y = \frac{5}{4}x + \frac{5}{8}}$$