قناة بكالوريات النخبة

تقدم لكم :

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

الشامل في التحليل التوافقي

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

* أ. عمار الفرج

: محمدنور مدور

بكالوريات ELITE

@Mooi6

التحليل التوافقي

2022/3/20 قسم

- $n \in r$ أعداد طبيعية.
- طرق العد في الحسابات وإثبات العلاقات وحل المعادلات:

1) التباديل $(n!)$:

- $n! = n(n-1)\ldots\ldots 3,2,1$
- $n! = n.(n-1)!$
- $0! = 1$

أمثلة:

سط/ حد 152 -

1) $\frac{21!}{20!} = \frac{21 \cdot 20!}{20!} = 21$

2) $\frac{6! + 7!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{6.5.4! + 7.6.5.4!}{2! \cdot 3! \cdot 4!}$

$= \frac{4!(30 + 210)}{2.1.3.2.1.4!}$

$= \frac{240}{12} = 20$

3) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!}$

$= n^2 + n$

4) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1).2n.(2n-1)!}{(2n-1)!}$

$= 4n^2 + 2n$

5) $\frac{(2n)!}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)}$

$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 6.5.4.3.2.1}{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)}$

$= 2n(2n-2)(2n-4)\ldots\ldots 6.4.2$

$= \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}_{n!} \cdot \underbrace{2.2.2.\ldots 2}_{\text{عددها } n}$

$= n! \cdot 2^n$

6) $\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!}$

$= \frac{2n(2n-1)! - (2n-1)!}{2n(n-1)! - (n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)!}$

$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$

7) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{n+1!}$

$= \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} - \frac{n!}{(n+1)n!}$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n^2+n}$

$= \frac{1}{n^2+n}$

2) التراتيب P_n^r :

شرط $n \geq r \geq 1$

n و r عددان طبيعيان حيث $1 \leq r \leq n$

1- $P_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1)$

$= \frac{n!}{(n-r)!}$

2- $P_n^n = n!$

3- $P_n^1 = n$

2022

هنوا «

جدوى أمانيكم

بالدعاء ♥

"محمد نور قدور"

• مسألة 3، ص 169 :

★ حل المعادلات الآتية :

1) $P_{n+2}^4 = 14\, P_n^3$

$4 \leq n+2$ و $n \geq 3$ } شرط الحل

$n \geq 2$ و $n \geq 3$

$(n+2)(n+1)\,n(n-1) = 14 \cdot n(n-1)(n-2)$

$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$

$n^2 + n + 2n + 2 = 14n - 28$

$n^2 - 11n + 30 = 0$

$(n-5)(n-6) = 0$

$n = 5$ ✓ $\quad n = 6$ ✓

2) $P_n^4 = 10\, P_{n-1}^3$

$n \geq 4$ و $3 \leq n-1$ } شرط الحل

$\Rightarrow n \geq 4$ و $n \geq 4$

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$

$n = 10$ ✓

3) $P_n^5 = 18\, P_{n-2}^4$

$5 \leq n$ و $4 \leq n-2$ } شرط الحل

$6 \leq n$ و $6 \leq n$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$n(n-1) = 18(n-5)$

$n^2 - 19n + 90 = 0$

$(n-9)(n-10) = 0$

$n = 9$ ✓ $\quad n = 10$ ✓

3) التوافيق $\binom{n}{r}$:

• شرط : $n \geq r \geq 0$

$\geq$ اعداد ≥ 0

① $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

② $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$: $r > \frac{1}{2}n$ « تخفيف حساب »

③ $\binom{n}{q} = \binom{n}{p}$ « حل المعادلات »

* ما! : $p = q$

* أو : $p+q = n$

④ $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

⑤ $\binom{n}{1} = n$

• تدريبات / ص 155 11

★ بسط ما يلي :

11) $\binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1} = 15$: ط1

$= \binom{6}{2} = \frac{6.5}{2.1} = 15$: ط2

2) $\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$

3) $\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}$

$= \frac{\frac{5.4}{2}.\frac{6.5}{2}}{\frac{9.8.7}{3.2.1}} = \frac{{}^{6}\!\not{2}\,0.{}^{5}\!\not{15}}{3.\not{4}_{2}.7}$

$= \frac{25}{14}$

41) $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{{}^{4}\!\not{8}.7.6}{3.2.1}}{\frac{9.{}^{3}\!\not{8}.7}{3.2.1}} = \frac{2}{3}$

3) عين n إذا تحقق :

11) $\binom{n}{2} = 36$

شرط الحل $2 \leq n$

$\frac{n(n-1)}{2} = 36$

$n^2 - n - 72 = 0$

$(8n - 9)(n + 8) = 0$

$n = 9$ ✓ $\quad n = -8$ ✗

2) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

$4 \leq n \quad 2 \leq n \Rightarrow$ شرط $4 \leq n$

$\frac{3(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1} = \frac{{}^{7}\!\not{14}\, n(n-1)}{2.1}$

$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$

$n^2 - 5n - 50 = 0$

$(n - 10)(n + 5) = 0$

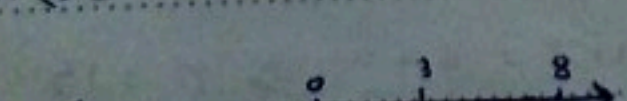
$n = 10$ ✓ $\quad n = -5$ ✗

3) $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

$0 \leq 3n \leq 10 \quad n+2 \leq 10$

$0 \leq n \leq \frac{10}{3} \quad 0 \leq n \leq 8$

$0 \leq n \leq 3$



شرط الحل : $0 \leq n \leq 3$

"أما" $3n = n+2$

$2n = 2 \Rightarrow n = 1$ ✓

"أو"

$3n + n + 2 = 16$

$4n = 8 \Rightarrow n = 2$ ✓

• مسألة 2 / حل 164 :

* عين n و r التي تحقق :

• $3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$

• $2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$

علماً أن : $0 \le r \le n$

$3\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = 8\frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$

$\frac{3.n!}{(n-r)!\,r(r-1)!} = \frac{8.n!}{(n-r+1)(n-r)!\,(r-1)!}$

$3n - 3r + 3 = 8r$

• $3n - 11r = -3$ ..... (1)

$2\frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!} = \frac{5(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$

$\frac{2(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)r!} = \frac{5(n+1)!}{(n+1-r)(n-r)!\,r!}$

$2n + 2 - 2r = 5r + 5$

• $2n - 7r = 3$ ..... (2)

$-2L_1 + 3L_2$

$-6n + 22r + 6n - 21r = 6 + 9 \Rightarrow r = 15$

(2) $\Rightarrow 2n - 7(15) = 3$

$2n - 105 = 3 \Rightarrow 2n = 108$

$\Rightarrow n = 54$

• اختبار عيني 3 :

* عين r :

• $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$

• $0 \le r \le 4$ $0 \le r \le 5$ $0 \le r \le 6$

شرط الحل $0 \le r \le 4$

$\frac{1}{\frac{4!}{(4-r)!\,r!}} = \frac{1}{\frac{5!}{(5-r)!\,r!}} + \frac{1}{\frac{6!}{(6-r)!\,r!}}$

$\frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(5-r)!\,r!}{5!} + \frac{(6-r)!\,r!}{6!}$

$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5.4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6.5.4!}$

$1 = \frac{5-r}{5} + \frac{30-6r-5r+r^2}{30}$ ×6

$1 = \frac{30-6r+30-6r-5r+r^2}{30}$

$r^2 - 17r + 60 = 30$

$r^2 - 17r + 30 = 0$

$(r-15)(r-2) = 0$

$r = 15$ ✗

$r = 2$ ✓

Notebook

@Mooi6

2022/3/23

«طرق العد في حل المسائل»

★ المبدأ الأساسي في العد «مسائل: عداد ورموز»

عملية

ل	...	ر	...	ا
r_1	×	r_2	×	r_3

عدد طرق العملية = $r_3 \times r_2 \times r_1$

★ تدريب 6 / ص 152 :

• $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

1) كم عدد مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من المجموعة S ؟

عدد	
عشرات	احاد
5	5

$5 \times 5 = 25$

2) كم عدد مختلف الارقام مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من S ؟

$5 \times 4 = 20$

3) كم عدد زوجي مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من S ؟

$5 \times 2 = 10$

★ نموذج وزاري «دورة 2019» :

• $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1) كم عدد زوجي مؤلف من ثلاث منازل يمكن تشكيله من S ؟

$6 \times 6 \times 3 = 108$

2) كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين ؟

$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

★ مسألة 1 / ص 156 :

• أثبت صحة كل من العلاقات الآتية :

1) $\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

$$f_1 = \frac{\frac{(n+1)!}{r! \cdot (n+1-r)!}}{\frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}} = \frac{r! \cdot (n-r)! \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1-r)! \cdot r!}$$

$$= \frac{(n+1)(n)! \cdot (n-r)!}{n! \cdot (n+1-r)(n-r)!}$$

$$= \frac{n+1}{n+1-r} = f_2$$

2) $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$

$$f_1 = \frac{\frac{(n+1)!}{(n-r)! \cdot (r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}} = \frac{(n+1)! \cdot (n-r)! \cdot r!}{(n-r)! \cdot (r+1)! \cdot n!}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot n! \cdot r!}{(r+1) \cdot r! \cdot n!}$$

$$= \frac{n+1}{r+1} = f_2$$

3) $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$

$$f_1 = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}$$

$$f_2 = \frac{r(n)!}{(n-r)r(r-1)!} = \frac{r(n)!}{(n-r) \cdot r(r-1)!}$$

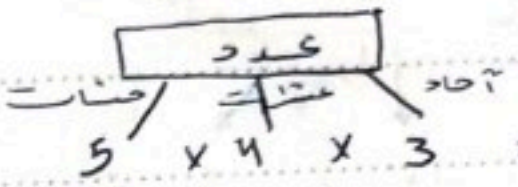
$$= \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} = f_1$$

Farah Notebook

* نموذج وزاري

• S = {0, 2, 3, 5, 6}

1) كم عدد مختلف مثنى مثنى من ثلاث منازل يمكن تشكيله من S.



5 x 4 x 3 = 60

2) كم عدد مضاعف لـ 5 مؤلف من ثلاث خانات.

~~5 + 5 = 5~~

5 x 5 x 1 = 25

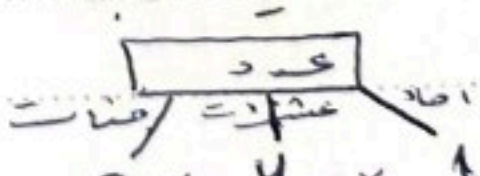
* دورة ~~2020~~ :

• S = {0, 2, 3, 5, 6, 7}

1) كم عدد مختلف مكون من ثلاث خانات يمكن تشكيله ؟

6 x 5 x 4 = 120

2) كم عدد مختلف من ثلاث خانات ومضاعف لـ 5 وأصغر من 500 يمكن تشكيله ؟



2 x 4 x 1 = 8

* دورة 2020 أوك :

• يوجد لبعض أنواع السيارات جهاز ذو قفل رمزي يفتح عند إدخال كود مكون من 3 خانات مأخوذة من الأرقام :

• 0, 1, 2, 3, 4, 5

1) ما هو عدد الرمزات التي تصلح للقفل.

6 x 6 x 6 = 216

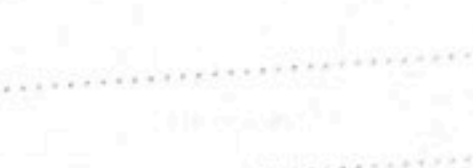
2) ما هو عدد الرمزات المختلفة التي تصلح للقفل.

6 x 5 x 4 = 120

* اختبار :

• S = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

1) كم عدد مؤلف من 3 خانات يمكن تشكيله ؟



5 x 6 x 6 = 180

الخانات 5 ؛ أرقام بدون الصفر عالميين عالوحدة

مثال : 12 ✗

2) كم عدد مؤلف من 3 خانات مختلفة يمكن تشكيله ؟

5 x 5 x 4 = 100

التوافيق في حل المسائل

نحو القمة

• الترتيب غير مهم.

• 5/ ص 152 :

* في إحدى مراكز خدمة مهندسان وخمسة عمال، والمطلوب :

1) كم لجنة مؤلفة من مهندس وعاملان يمكن تشكيلها؟

$\binom{2}{1} . \binom{5}{2}$

$= 2 . \frac{5.4}{2.1} = 2 . 10 = 20$

2) كم لجنة مؤلفة من مهندس وثلاث عمال يمكن تشكيلها؟

$\binom{2}{1} . \binom{5}{3}$

$= 2 . \frac{5.4.3}{3.2.1} = 2 . \frac{60}{6}$

$= 2 . 10 = 20$

• 6/ ص 155 :

* يريد تأليف لجنة مكونة من 4 أشخاص مأخوذين 5 رجال و 6 نساء.

1) كم لجنة يمكن تأليفها؟

$\binom{9}{4} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 3.2.7.3$

$= 126$

2) كم لجنة مختلفة مؤلفة من رجلين وامرأتين؟

$\binom{5}{2} . \binom{4}{2} = 10 . 6 = 60$

• مسألة 6/ ص 156 :

* أراد حزب تنظيم 8 طلاب و 6 طالبات تأليف لجنة مؤلفة من 5 أشخاص.

1) كم لجنة مختلفة مؤلفة من 3 طلاب وطالبتان يمكن تشكيلها؟

$\binom{8}{3} . \binom{6}{2} = \frac{8.7.6}{3.2.1} . 3 = 8.7 . 3$

$= 56$

2) كم لجنة مختلفة مؤلفة من طالبتين على الأكثر يمكن تشكيلها؟

$\binom{6}{2} . \binom{8}{3} + \binom{6}{1} . \binom{8}{4} + \binom{6}{0} . \binom{8}{5}$

3) كم لجنة مختلفة مؤلفة من طالبتين على الأقل؟

نأخذ المتمم

$\binom{14}{5} - \left[\binom{6}{1} \binom{8}{4} + \binom{6}{0} \binom{8}{5} \right]$

• مسألة 6/ ص 156 :

* يلتقي 10 أصدقاء في حفلة، ويصافح كل منهم البقية مرة واحدة.

1) كم عدد المصافحات التي جرت في الحفلة.

$\binom{10}{2} = \frac{90}{2} = 45$

2) كم عدد المصافحات التي جرت في الحفلة إذا علمت أنه يوجد 4 أشخاص متخاصمين لا يسلم أحدهم على الآخر؟

$\binom{4}{2} = \frac{4.3}{2} = 6$

$45 - 6 = 39$

Farah Notebook

• مسألة 5/ ص 169 :

* في إحدى الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من أصل عشرة.

1) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 120$$

2) بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا كانت الأربعة الأولى إجبارية ؟

$$\binom{4}{4}\binom{6}{3}$$

$$= 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

/ /

التراتيب في حل المسائل

انتبه !

* عند اختيار شيئين مختلفين X2
* عند اختيار ثلاث أشياء اثنان جمعها ترتيب واحد X3
* عند اختيار ثلاث أشياء مختلفة X3!

ص 192 / ح 60 :

تتألف مجلس إدارة نادي من سبع أعضاء، نريد تأليف لجنة مكونة من « مدير - نائب - أمين »

1) بكم طريقة يمكن تأليف اللجنة؟

$P_7^3 = 7.6.5 = 210$

2) بكم طريقة يمكن تأليف لجنة إذا علمت أن في المجلس شخصان مختصان لا يجتمعان ؟

عدد اللجان التي تحوي المختصان معاً :

$3\ P_2^2\ P_5^1 = 3.2.5 = 30$

$\Rightarrow 210 - 30 = 180$

ص 152 / ح 7 :

* اشترك 10 متسابقين في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاث جوائز ذهبية وفضية وبرونزية

بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز؟

$P_{10}^3 = 10.9.8 = 720$

مسألة :

* يريد معلم توزيع 5 جوائز مختلفة على طلابه البالغ عددهم 9، بحيث يحصل كل طالب على جائزة واحدة على الأقل

بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز ؟

الحل

$\binom{5}{2} \times P_4^4$

$= 10 \times (9 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= 10 \times 24 = 240$

نموذج وزاري :

* يريد طالب دراسة مواده السبعة بشكل متتابع.

1) بكم طريقة يمكن أن يرتب مواده السبعة؟

$P_7^7 = 7! = \boxed{5040}$ ← موضوري

2) بكم طريقة يمكن أن يرتب مواده السبعة إذا كانت الأولى رياضيات والأخيرة فيزياء ؟

$P_1^1 \cdot P_5^5 \cdot P_1^1 = 5! = 120$

نموذج وزاري :

* رف يحوي سبع كتب، 3 للمؤلف A و 4 للمؤلف B، بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب

1) إذا كانت الثلاث الأولى للمؤلف B؟

$P_4^3 \cdot P_4^4 = 4.3.2.4!$

$= 4.3.2.4.3.2.1$

$= 16.9.4$

$= 576$

Farah Notebook

2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كان الكتاب الأول للمؤلف B.

$P_4^1 \cdot P_6^6 = 4 \times 6!$

3) إذا كان كتابان فقط من الأول للمؤلف B ؟

$P_1^1 \cdot P_6^6 = 6!$

مسائل السحب

نوع السحب	القانون	ملاحظات
معاً	$\binom{n}{r}$	—
تتالي مع اعادة	n^r	1- عند سحب شيئين مختلفين مضروب بـ 2
تتالي دون اعادة	P_n^r	2- عند سحب ثلاث اشياء اثنان منها متماثلان مضروب بـ 3
		3- عند سحب ثلاث اشياء مختلفة مضروب بـ $3! = 6$

ملاحظة : إذا ورد التريتب لا نضرب بشيء.

★ المسائل :

1) صندوق يحوي 10 كرات (6 حمراء - 4 بيضاء - 1 سوداء) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة.

1- كم عدد النتائج الممكنة ؟

$n(\Omega) = P_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

2- كم عدد النتائج تحقق :

a) كرتين الأولتين من اللون نفسه ؟

$n(\Omega) = 3 \cdot P_6^2 \cdot P_4^1 + 3 P_3^2 \cdot P_7^1$

$= 486$

b) ثلاث كرات مختلفة ؟

$n(B) = 3! \cdot P_6^1 \cdot P_3^1 \cdot P_1^1 = 108$

c) ثلاث كرات ليست جميعها ذات لون واحد ؟

- $n(C') = P_6^3 + P_3^3$

$= 6 \cdot 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 126$

- $n(C) = 720 - 126 = 594$

d) كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

- $n(D) = 3 P_6^1 \cdot P_4^2 + 3 P_6^2 \cdot P_4^1 + P_6^3$

$= 216 + 360 + 120 = 696$

طريقة 2 :

- $n(D') = P_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

$\Rightarrow n(D) = 720 - 24 = 696$

e) كرة سوداء واحدة على الأكثر ؟

$n(e) = 3 P_1^1 \cdot P_9^2 + P_9^3$

2) صندوق يحوي عشر كرات (6 حمراء - 4 بيضاء - 1 سوداء) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع اعادة.

ملاحظة : مثل طلبات المسألة السابقة لكن مع اعادة "الحل دون كتابة الأسئلة مرة ثانية"

Farah Notebook

ج1:

$n(\Omega) = 10^3 = 1000$

ج2:

a) $n(A) = 3 . 6^2 . 4^1 + 3 . 3^2 . 7^1 + 3 . 1^2 . 1^1$

$=$

b) $n(B) = 3! . 6^1 . 3^1 . 3^1$

$= 108$

c) $n(C') = 6^3 + 3^3 + 1^3 = 244$

$\Rightarrow n(C) = 1000 - 244 = 756$

d) $n(1') = 9^3 = 64$

$\Rightarrow n(1) = 1000 - 64 = 936$

e) $n(E) = 3 . 1^1 . 9^2 + 9^3$

$= 972$

(3) دورة 2020 ثانية:

- صندوق يحتوي على 5 كرات مرقمة بالأرقام (1, 2, 3, 4, 5) سحب من الصندوق كرتين على التوالي مع إعادة.

1- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟

$n(\Omega) = 5^2 = 25$

2- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب والتي تشمل كرتين مجموعهما مزدوج؟

$n(A) = 2 . 3^1 . 2^1 = 12$

(4) مسألة حرة 161:

- نتأمل صندوقاً يحوي 4 كرات مماثلة، لا تحمل أرقام (6, 7, 8, 9) سحب ثلاث كرات على التوالي مع إعادة.

1- كم عدد النتائج الممكنة للتجربة؟

$n(\Omega) = 4^3 = 64$

2- كم نتيجة ممكنة في كل من:

a) الكرة المسحوبة أولاً تحمل رقم 6، الثانية تحمل رقم 6، والثالثة تحمل رقم 7؟

$1^1 . 1^1 . 1^1 = 1$

تفكير: ليش ما ضربنا 6 مع أنه سحب ثلاث كرات مختلفة؟ "لأنه حدد لنا ترتيب الكرات".

b) الكرة المسحوبة أولاً تحمل رقم 6، والثانية تحمل رقم 7؟

$1^1 . 1^1 . 4^1 = 4$

c) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل رقم 6، والمسحوبة ثالثة تحمل رقم 6؟

$1^1 . 1^1 . 4^1 = 4$

d) الكرة المسحوبة ثانياً تحمل رقم 7؟

$1^1 . 4^2 = 16$

Farah Notebook

★ المقاطيع في الأشكال الهندسية

• مضلع محدب عدد رؤوسه n
"عدد أضلاعه"

1- كم عدد القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين.

ج: $\binom{n}{2}$

2- كم عدد الأشعة ..... ؟

ج: $2 \times \binom{n}{2}$

3- كم عدد الأقطار التي تصل بين رأسين غير متجاورين ؟

ج: $\binom{n}{2} - n$

4- كم عدد نقاط تقاطع الأقطار ؟

ج: $\binom{n}{4} + n$

5- كم عدد المثلثات التي يمكن الحصول عليها إذا وصلنا بين ثلاث رؤوس ؟

ج: $\binom{n}{3}$

6- كم عدد الرباعيات .....

ج: $\binom{n}{4}$

7- كم عدد المثلثات المتجهة ؟

ج: n

• خواص المضلع المنتظم:

8- كم عدد الأقطار المركزية

ج: $\frac{n}{2}$

9- كم عدد المثلثات المتقايسة الأضلاع ؟

ج: $\frac{n}{2}(n-2)$

10- كم عدد المثلثات القائمة ؟

(المتفرجة - القائمة) - عدد المثلثات

11- كم عدد المستطيلات ؟

$\binom{\text{عدد الأقطار المركزية}}{2}$

★ مسألة 1:

• لتكن A B C D E F) نقاط على دائرة C مركزها O تشكل مسدس منتظم.

(1) كم عدد القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين ؟

$\binom{n}{2} = \binom{6}{2}$ 15

(2) كم عدد الأشعة المستقيمة التي تصل بين رأسين ؟

$2 \times \binom{n}{2} = 2 \times 15 = 30$

(3) كم عدد الأقطار المستقيمة التي تصل بين رأسين ؟

$\binom{n}{2} - n = 15 - 6 = 9$

(4) كم عدد نقاط تقاطع الأقطار

$\binom{n}{4} + n = \binom{6}{4} + 6 = 21$

(5) كم عدد المثلثات التي يمكن الحصول عليها إذا وصلنا بين ثلاث نقاط ؟

$\binom{6}{5} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$

Farah Notebook

@Moo.6

/ /

(6) كم عدد المثلثات بقاعدة ؟

$3 \cdot 4 = 12$

(7) كم عدد المثلثات بصورة ؟

عددها 6

(8) كم عدد المثلثات بحادة ؟

$20 - (18) = 2$

(9) كم عدد المستطيلات ؟

$\binom{3}{2} = 3$

★ دورة 2022 ثانية

• لتكن c دائرة مركزها o

فيها 6 أوتار مختلفة، لتكن

$S = \{P_1, P_2, \dots P_{12}\}$ مجموعة أطراف

هذه الأوتار.

(1) ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟

$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

(2) ما عدد المضلعات الرباعية ؟

$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$

(3) كم عدد المستطيلات ؟

$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

★ مسألة 11 / ص 165 :

في الشكل الآتي تمثل

شبكة منتظمة مرسومة

في مربع :

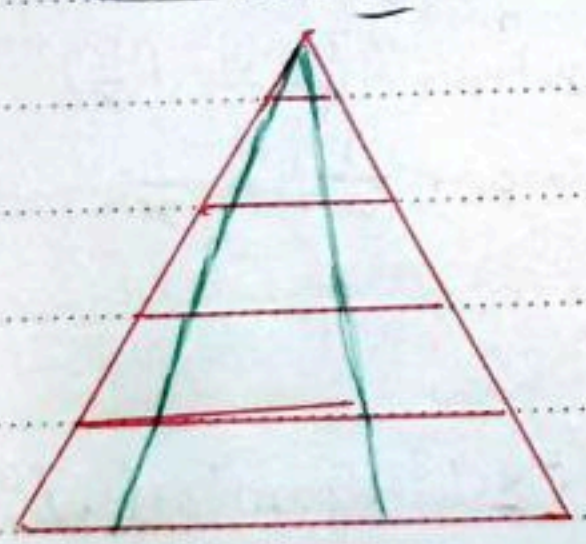
(س) هاعدد المستطيلات المرسومة في الشكل السابق ؟

عدد المستقيمات الأفقية × عدد المستقيمات الشاقولية

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{2} = 10 \times 6 = 60$

★ مسألة :

• في الشكل الآتي تمثل شبكة مرسومة في مثلث :



(س) ما عدد المثلثات في الشكل ؟

(الشكل مثلث تحته ضلعان شاقوليان و ضلع أفقي (قاعدة)) " تفكير "

الحل :

$\binom{4}{2}\binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30$

★ منشور ذي الحدين

١) عدد حدوده $n+1$.

2) a و b سالب ؛ تناوب الاشارات

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n.b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1 + \dots \binom{n}{n}a^0.b^n$$

• الحد ذي الدليل ٢ :

$$T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}.b^r$$

يستخدم في حالة حد معين او رتبة معينة او صفة معينة ..

س : انشر كل من العبارات :

1) $(x+\frac{1}{x})^4$

$= \binom{4}{0}x^4.(\frac{1}{x})^0 + \binom{4}{1}x^3(\frac{1}{x})^1 + \binom{4}{2}x^2(\frac{1}{x})^2$
$+ \binom{4}{3}x^1(\frac{1}{x})^3 + \binom{4}{4}x^0(\frac{1}{x})^4$
$= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

2) $(2x-1)^6$

$= \binom{6}{0}(2x)^6(1)^0 - \binom{6}{1}(2x)^5(1)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(1)^2$
$- \binom{6}{3}(2x)^3(1)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(1)^4 - \binom{6}{5}(2x)^1$
$+ \binom{6}{6}(2x)^0(1)^6$
$\Rightarrow (2x-1)^6 = 64x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 160x^3$
$+ 60x^2 - 12x + 1$

★ مثال صـ ١٥٩ :

• انشر $(1+2x)^n$

ثم استنتج قيمة المجموع

$S_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$

$(1+2x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(2x)^1 + \binom{n}{2}(2x)^2$
$+ \dots\dots + \binom{n}{n}(2x)^n$

وضع نستنتج أن : $x = 1$

$\Rightarrow S_n = 3^n$

• حول $\cos^4 x$ إلى مجموع نسب قياسية

$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{1}{16}(e^{ix}+e^{-ix})^4$

$= \frac{1}{16}\left[\binom{4}{0}(e^{ix})^4 + \binom{4}{1}(e^{ix})^3(e^{-ix})^1\right.$
$+ \binom{4}{2}(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + \binom{4}{3}(e^{ix})^1(e^{-ix})^3$
$\left. + \binom{4}{4}(e^{-ix})^4\right]$
$= \frac{1}{16}\left[e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right]$
$= \frac{1}{16}\left[e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right]$
$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

1) استنتج $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^4 x\, dx$

$I = \left[\frac{1}{16}(\frac{1}{2}\sin 4x + 4\sin 2x + 6x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$I = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}\right.$

• حول $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ كـ مجموع متتية

$$(\cos x \cdot \sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{16}(2\cos 4x - 2)$$

• استنتج $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

$$I = \left[-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$I = \frac{\pi}{16}$$

★ مسألة :

1) كيف نكتب $\sin^5 x$ على شكل مجموع بسيط

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5$$
$$= \frac{1}{32i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$$
$$= \frac{1}{32i}\left[\binom{5}{0}e^{5ix} - \binom{5}{1}e^{4ix}e^{-ix} + \binom{5}{2}e^{3ix}e^{-2ix} - \binom{5}{3}e^{2ix}e^{-3ix} + \binom{5}{4}e^{ix}e^{-4ix} - \binom{5}{5}e^{-5ix}\right]$$
$$= \frac{1}{32i}\left[e^{5ix} - e^{-5ix} - 5\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{32i}\left[2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 2i\sin x\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right]$$

2) استنتج $I = \int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$

$$I = \left[\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 10\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 10\right)$$

★ مسألة :

1) عين في منشور $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$:

• حد العام الذي يحوي x^2 :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$
$$= \binom{10}{r} x^{10-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$= \binom{10}{r} x^{10-r} \cdot x^{-r} = \binom{10}{r} x^{10-2r}$$
$$\Rightarrow 10 - 2r = 2 \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$$

إذا الحد الخامس.

• الحد الثابت ، المستقل عن x ، الذي لا يحتوي x

$$10 - 2r = 0 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

إذا السادس.

2) أحسب معامل x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$

$$T_r = \binom{15}{r} 2^{15-r} \cdot (3x)^r$$
$$= \binom{15}{r} 2^{15-r} \cdot 3^r \cdot x^r$$
$$\Rightarrow r = 3$$

الحد الرابع

مثال

$$T_3 = \binom{15}{3} 2^{12} \cdot 3^3$$

3) معامل $x^2 y$ في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$

$$T_r = \binom{8}{r} \left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^r$$
$$= \binom{8}{r} y^{16-2r} \cdot x^{-8+r} \cdot x^r \cdot y^{-r}$$
$$= \binom{8}{r} y^{16-3r} \cdot x^{-8+2r}$$

$16 - 3r = 1 \Rightarrow 3r = 15 \Rightarrow r = 5$
$-8 + 2r = 2 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$

الحد السادس

$$T_5 = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$$

مثال

Farah Notebook

14) ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي مفكوك $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ على حد ثابت

الحل: $T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} (\frac{1}{x})^r$

$= \binom{n}{r} x^{2n-3r}$

$2n - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{2n}{3}$

n مضاعف للعدد 3.

15) ما الشرط على العدد الطبيعي r كي يحوي مفكوك $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ على حد ثابت

$2n - 3r = 0 \Rightarrow n = \frac{3r}{2}$

r مضاعف لـ 2.

16) ما آحاد وعشرات العدد 11^{11}

$(1+10)^{11} = \binom{11}{0} 1^{11} \cdot 10^0 + \binom{11}{1} 1^{10} \cdot 10^1 + \binom{11}{2} 1^9 \cdot 10^2 + \cdots + \binom{11}{11} 1^0 + 10^{11}$

مضاعف لـ 100 أحادها وعشراتها 0

$= 1 + 110 + \cdots$

$= 111 + \cdots$

آحاد 1 وعشرات 1

17) $F(x) = (1+ax)^5 (1+bx)^4$

a و b طبيعيان إذا علمت أن معامل x هي 62، احسب قيم a+b

$F(x) = 5a(1+ax)^4 \cdot (1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3 (1+bx)^5$

$F'(0) = 5a + 4b = 62$

$4a + 4b = 62 - a$ -a.

$4(a+b) \leq 62$

$a+b \leq \frac{62}{14} \approx 15,5$

$a+b \leq 15$

$5a + 5b = 62 + b$ +b.

$5(a+b) \geq 62$

$a+b \geq \frac{62}{5} \approx 12,4$

$a+b \geq 13$

$\Rightarrow a+b \in \{13, 14, 15\}$

* نهاية التحليل التوافقي *

[2023/4/26
@Mo.Medwar]

Farah Notebook

ملاحظة :
النوطة شاملة لأفكار البحث
وتغنيك عن الكتاب واسئلة
الدورات لأنها تحتوي على
جميع التمارين

لا تنسونا من صالح دعائكم ،
بالتوفيق للجميع .